НАКРИТИЯ НА РИМАНОВИ ПОВЪРХНОСТИ И ЦЕЛИ РАЗШИРЕНИЯ

1. Накрития на риманови повърхности

Нека U е отворено подмножество на $\mathbb{C}$ и $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{O}(U)$ са холоморфни функции в U. Да означим с X подмножеството на $U \times \mathbb{C}$, което се състои от всички нули на полинома $f(w) = a_0(z)w^n + a_1 w^{n-1} + \cdots + a_n \in \mathcal{O}(U)[w]$,

$$X = \{(z, w) \in U \times \mathbb{C} : a_0(z)w^n + a_1(z)w^{n-1} + \cdots + a_n(z) = 0\}.$$

В този параграф ще предполагаме, че холоморфната функция a_0 не е тъждествено равна на 0. Нека $p : X \to U$ е ограничението на проекцията $U \times \mathbb{C} \to U$ върху X.

Твърдение 1.1. *Ако $a_0(z) \neq 0$ за всяко $z \in U$, то изображението $p : X \to U$ е собствено, т.е. за всяко компактно множество $K \subset U$, множеството $p^{-1}(K)$ също е компактно.*

В доказателството на Твърдение 1.1 ще използуваме следната добре известна оценка за корените на моничен полином:

Лема. *Ако $w \in \mathbb{C}$ е корен на полинома $w^n + b_1 w^{n-1} + \cdots + b_n \in \mathbb{C}[w]$, то $|w| \leq 1 + |b_1| + \cdots + |b_n|$.*

Доказателство. Ако $|w| < 1$, неравенството е очевидно изпълнено. Ако $|w| \geq 1$, то $|w|^n \leq |b_1||w|^{n-1} + \cdots + |b_n| \leq |b_1||w|^{n-1} + \cdots + |b_n||w|^{n-1}$, откъдето $|w| \leq |b_1| + \cdots + |b_n|$. □

Доказателство на Твърдение 1.1. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че $a_0 \equiv 1$. Нека K е компактно подмножество на U. Тъй като функциите $a_1, \dots, a_n$ са непрекъснати, то съществува положително число M, такова че $1 + |a_1(z)| + \cdots + |a_n(z)| \leq M$ за всяко $z \in K$. От току що доказаната лема следва, че $p^{-1}(K) \subset K \times D_M(0)$, където $D_M(0)$ е затвореният диск с център 0 и радиус M. Тъй като множеството $p^{-1}(K)$ е затворено и множеството $K \times D_M(0)$ е компактно, то множеството $p^{-1}(K)$ също е компактно. □

Пример 1.2. Нека $U = \mathbb{C}$ и $f = zw - 1$. В този случай изображението $p : X \to \mathbb{C}$ *не е* собствено.

Обратното твърдение на Твърдение 1.1 също е вярно.

Твърдение 1.3. *Ако изображението $p : X \to U$ е собствено, то $a_0(z) \neq 0$ за всяко $z \in U$.*

Доказателство. Нека $z_0 \in U$. Ако $a_i(z_0) = 0$ за всеки индекс $0 \leq i \leq n$, то слоят $p^{-1}(z_0) = \mathbb{C}$ няма да бъде компактно множество. Следователно съществува индекс i, за който $a_i(z_0) \neq 0$. Тъй като множеството на нулите на холоморфната функция a_0 няма точки на сгъстяване в U, то съществуват компактна околност K на z_0 и положителна константа A, такива че

(i) $a_0(z) \neq 0$ всяко $z \in K \setminus \{z_0\}$;

(ii) $|a_i(z)| > A$ за всяко $z \in K$.

Нека $z \in K$ и нека $f(z, w) = a_0(z)\,(w - w_1(z)) \dots (w - w_n(z))$ е разлагането на полинома $f(z, w) \in \mathbb{C}[w]$ на линейни множители. Тъй като p е собствено изображение, то съществува положителна константа M, такава че $|w_j(z)| < M$ за всяко $z \in K$ и всеки индекс $0 \le j \le n$. Сега от формулата на Виет

$$a_i(z) = a_0(z)\,\sigma_i(w_1(z), \dots, w_n(z)), \qquad z \in K \setminus \{z_0\},$$

получаваме оценката

$$|a_0(z)| = |a_i(z)|\,|\sigma_i(w_1(z), \dots, w_n(z))|^{-1} \ge A \left[\binom{n}{i} M^i\right]^{-1}, \qquad z \in K \setminus \{z_0\},$$

от която следва, че $a_0(z_0) \neq 0$. □

Нека $R = R(f, f') \in \mathcal{O}(U)$ е резултантата на полиномите f и f' и нека

$$U_R = \{z \in U : R(z) \neq 0\}.$$

Множеството U_R се състои от всички $z \in U$, за които са изпълнени следните условия:

(i) $a_0(z) \neq 0$;

(ii) $f(z, w)$ няма кратни корени.

Нека $X_R = p^{-1}(U_R)$ и нека $p_R = p|_{U_R}$ е ограничението на p върху X_R. В следващата лема разглеждаме X_R като топологично пространство с топологията, която е индуцирана от $U \times \mathbb{C}$.

Лема 1.4. *Изображението $p_R : X_R \to U_R$ е неразклонено n-листно топологично накритие.*

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че за всяка точка $z_0 \in U_R$ съществуват отворена околност $V \subset U_R$ на z_0 и отворени подмножества $W_i \subset X$, $i = 1, \dots, n$, такива че

(i) $p^{-1}(V) = \bigcup_{i=1}^n W_i$;

(ii) $W_i \cap W_j = \emptyset$, $i \neq j$;

(iii) $p|_{W_i} : W_i \to V$ е хомеоморфизъм за $i = 1, \dots, n$.

Нека $w_i(z_0)$, $i = 1, \dots, n$, са корените на полинома $f(z_0, w)$. Избираме окръжности $\gamma_i = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_i(z_0)| = r_i\}$ с радиуси $r_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, такива че дисковете $D_i = \{w \in \mathbb{C} : |w - w_i(z_0)| < r_i\}$, $i = 1, \dots, n$, нямат общи точки: $D_i \cap D_j = \emptyset$ за $i \neq j$. Ясно е, че полиномът $f_0(w) = f(z_0, w)$ не се анулира върху компактното множество $\gamma = \cup_{i=1}^n \gamma_i$. Нека $M > 0$ е минимумът на $|f_0(w)|$ върху γ. От непрекъснатостта на функцията $f(z, w)$ и компактността на γ следва, че съществува околност $V \subset U_R$ на z_0, такава че

$$|f(z, w)| > \frac{M}{2} > 0, \qquad z \in V,\ w \in \gamma.$$

За всяко $z \in V$, нека $n_i(z)$ е броят на нулите на полинома $f(z, w)$ в диска D_i, $i = 1, \dots, n$. Според принципът на аргумента

$$n_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_i} \frac{f'_w(z, w)}{f(z, w)}\,\mathrm{d}w, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Тъй като $n_i(z_0) = 1$, $i = 1, \dots, n$, и всяка от функциите $n_i : V \to \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, е холоморфна, то за всяко $z \in V$, полиномът $f(z, w)$ има точно един корен $w_i(z)$ в диска D_i, $i = 1, \dots, n$. Освен това всяка от функциите $w_i : V \to \mathbb{C}$ е холоморфна защото

$$w_i(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_i} \frac{w f'_w(z, w)}{f(z, w)}\,\mathrm{d}w, \qquad i = 1, \dots, n.$$

Нека $\Gamma_i : V \to V \times \mathbb{C}$ е графиката на w_i: $\Gamma_i(z) = (z, w_i(z))$, $z \in V$, $i = 1, \ldots, n$. Сега е лесно да се види, че множеството V и множествата $W_i = \Gamma_i(V)$, $i = 1, \ldots, n$, удовлетворяват условия (i), (ii) и (iii). □

Известно е, че ако M е топологично пространство, N е риманова повърхност и $q : M \to N$ е неразклонено топологично накритие, то M притежава единствена структура на риманова повърхност, за която изображението q е локално бихоломорфно. Използувайки този факт и Лема 1.4 получаваме следното твърдение:

Твърдение 1.5. *Множеството X_R притежава единствена структура на риманова повърхност, за която изображението $p|_R : X_R \to U_R$ е локално бихоломорфно. С тази структура на риманова повърхност на X_R, изображението $p|_R : X_R \to U_R$ е неразклонено n-листно аналитично накритие.*

Доказателство. Следва непосредствено от Лема 1.4. □

Литература

[1] О. Форстер, Римановы поверхности, “Мир”, Москва 1980.