

Примерни задачи по ЛААГ — I част

Въпрос 1. Решете уравнението в множеството на комплексните числа \mathbb{C} :

а) $|x| + x = 1 + 3i$; б) $x^4 + 81 = 0$.

Въпрос 2. Пресметнете в \mathbb{C} :

а) $\frac{(2+i)(3-i)-2}{2i+3}$; б) $(1 + \sqrt{3}i)^{105}$; в) коренувайте в \mathbb{C} $\left\{ \sqrt[4]{\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}} \right\}$.

Въпрос 3. Пресметнете детерминантата:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & i & -i \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -i & i \end{vmatrix}$; в) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 8 & 8 & \dots & 8 & 8 \\ 8 & 5 & 8 & 8 & \dots & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 5 & 8 & \dots & 8 & 8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 8 & 8 & 8 & 8 & \dots & 5 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & \dots & 8 & 5 \end{vmatrix}_{n \times n}$;

г) $\Delta_n = \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & \dots & 6 & 6 & 1 \\ 6 & 6 & 6 & \dots & 6 & 1 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & \dots & 1 & 6 & 6 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 6 & 1 & 6 & \dots & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 6 & 6 & \dots & 6 & 6 & 6 \end{vmatrix}$; д) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2^2 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2^{n-1} \end{vmatrix}$;

ж) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & -1 \end{vmatrix}$; з) $\begin{vmatrix} -6 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 9 & -6 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 9 & -6 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 9 & -6 \end{vmatrix}$.

Въпрос 4. Решете матричните уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 7 \\ 6 & 3 & 9 \end{pmatrix}$.

Въпрос 5. намерете обратната на матрицата:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Въпрос 6. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. Пресметнете:

а) AB ; б) $AB - BA$; в) A^2 .

Въпрос 7. Дадени са векторите $b = (-1, 7, \lambda)$, $a_1 = (1, -2, 1)$, $a_2 = (-1, 3, 1)$ и $a_3 = (0, 1, \mu + 1)$. При какви стойности на параметрите λ и μ векторът b :

- не е линейна комбинация на a_1, a_2, a_3 ;
- се представя по единствен начин като линейна комбинация на a_1, a_2, a_3 ;
- се представя по повече от един начин като линейна комбинация на a_1, a_2, a_3 .

Въпрос 8. Нека $U = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (1, 1, 2, 2)$ и $a_2 = (1, -1, 2, -2)$. Нека още W е пространството от решенията на хомогенната система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Да се намерят базиси на $U + W$ и $U \cap W$

Въпрос 9. Нека $U = l(a_1, a_2, a_3)$, където $a_1 = (1, 2, 1, 2)$, $a_2 = (2, 1, 2, 1)$ и $a_3 = (1, 2, 3, 4)$. Нека още W е пространството от решенията на хомогенната система

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Да се намерят базиси на $U + W$ и $U \cap W$

Въпрос 10. Векторите e_1, e_2, e_3 образуват базис на тримерното пространство V . Да се докаже, че векторите a_1, a_2, a_3 също образуват базис на V и да се намерят матрицата на прехода от e_1, e_2, e_3 към a_1, a_2, a_3 и да се намерят координатите на вектора $v = 2e_1 + 2e_2 + 3e_3$ в базиса a_1, a_2, a_3 , където:

- а) $a_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $a_2 = e_1 + e_2 + 2e_3$, $a_3 = e_1 + 2e_2 + 2e_3$;
- б) $a_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3$, $a_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3$, $a_3 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3$

Въпрос 11. Да се построи по метода на Грам-Шмид ортонормиран базис на линейната обвивка на векторите:

- а) $a_1 = (2, 1, 3, -1)$, $a_2 = (7, 4, 3, -3)$, $a_3 = (1, 1, -6, 0)$, $a_4 = (5, 7, 7, 8)$;
- б) $a_1 = (2, 5, 1, 3)$, $a_2 = (5, 11, 1, 4)$, $a_3 = (4, 7, -1, -1)$.

Въпрос 12. Даден е триъгълник с върхове $A(-1, 2, 3)$, $B(1, 2, 1)$ и $C(0, 1, 1)$. Намерете вектора \overrightarrow{CM} , където M е средата на AB , $|\overrightarrow{CM}|$ и косинуса на ъгъла, който медианата CM сключва със страната AB .

Въпрос 13. Съставете уравнение на права в равнината, съдържаща точките $A(2, 4)$ и $B(4, 0)$ и намерете точка Q , ортогонално симетрична на точката $P(7, 4)$ относно правата.

Въпрос 14. Съставете уравненията на страните на триъгълник, ако са дадени върхът му $A(3, -1)$ и уравнението на височина $h: 2x - 3y + 6 = 0$ и на медиана $m: y - 2 = 0$, излизащи от един връх.

Въпрос 15. Точките $A(0, 2)$ и $B(2, -1)$ са съседни върхове на успоредник, а точката $Q(2, 0)$ е пресечна точка на диагоналите му. Съставете уравненията на страните на успоредника.