Писмен изпит по Линейна Алгебра
спец. Математика
09.09.2006

Задача 1. Да се реши матричното уравнение $AX = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. В зависимост от стойностите на параметъра λ, да се намери рангът на матрицата

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека e_1, e_2, e_3 е стандартният базис в евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$ и $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ е линеен оператор, действащ по правилото

$$\varphi(\xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3) = \xi_3 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_1 e_3.$$

Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази диагонална матрица.
Да се докаже, че съществуват подпространства U и V на $\mathbb{R}^3$, такива че $\mathbb{R}^3 = U \oplus V$ и $\varphi(u) = u$ за всеки вектор $u \in U$, а $\varphi(v) = -v$ за всеки вектор $v \in V$.