вар.	ф. номер	гр.	пот.	к.	сп.	име
1						

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА
Специалност Компютърни Науки
11.09.2005 г.

Задача 1. (1,5 точки) Нека V е множеството от матрици

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

и $U = \{ A \in V \mid x + y + 2z = 0 \}$.

а) Да се докаже, че V е линейно пространство над $\mathbb{R}$ относно обичайното събиране на матрици и умножение на матрица с число;

б) Да се докаже, че U е линейно подпространство на V;

в) Да се намерят базиси на V и U.

Задача 2. (1 точка) Нека e_1, e_2, e_3 е базис на линейното пространство V и $\varphi : V \to V$ е линеен оператор, изобразяващ векторите

$$a_1 = e_1 + 2e_2,\ a_2 = 2e_1 + e_2 + e_3,\ a_3 = -e_1 - e_3,$$

съответно, във векторите

$$b_1 = e_1 - e_2 + e_3,\ b_2 = e_1 - e_3,\ b_3 = e_1 + 2e_2 + e_3.$$

Да намери матрицата на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3.

Задача 3. (1,5 точки) В евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$ е зададен линеен оператор φ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -4 \\ 2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$.

а) Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, спрямо който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D;

б) Да се докаже, че $\varphi^2 + 3\varphi = 18\mathrm{Id}$.

вар.	ф. номер	гр.	пот.	к.	сп.	име
2						

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА
Специалност Компютърни Науки
11.09.2005 г.

Задача 1. (1,5 точки) Нека V е множеството от матрици

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

и $U = \{ A \in V \mid x + 2y + 4z = 0 \}$.

а) Да се докаже, че V е линейно пространство над $\mathbb{R}$ относно обичайното събиране на матрици и умножение на матрица с число;

б) Да се докаже, че U е линейно подпространство на V;

в) Да се намерят базиси на V и U.

Задача 2. (1 точка) Нека e_1, e_2, e_3 е базис на линейното пространство V и $\varphi : V \to V$ е линеен оператор, изобразяващ векторите

$$a_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ a_2 = -e_1 - e_3,\ a_3 = 2e_1 + 3e_2 + 3e_3,$$

съответно, във векторите

$$b_1 = e_1 + e_2 - e_3,\ b_2 = e_2 + e_3,\ b_3 = 2e_1 - e_3.$$

Да намери матрицата на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3.

Задача 3. (1,5 точки) В евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$ е зададен линеен оператор φ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$.

а) Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, спрямо който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D;

б) Да се докаже, че $\varphi^2 - 3\varphi = 18\mathrm{Id}$.

вар.	ф. номер	гр.	пот.	к.	сп.	име
3						

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА
Специалност Компютърни Науки
11.09.2005 г.

Задача 1. (1,5 точки) Нека V е множеството от матрици

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

и $U = \{ A \in V \mid x + 3y + 6z = 0 \}$.

а) Да се докаже, че V е линейно пространство над $\mathbb{R}$ относно обичайното събиране на матрици и умножение на матрица с число;

б) Да се докаже, че U е линейно подпространство на V;

в) Да се намерят базиси на V и U.

Задача 2. (1 точка) Нека e_1, e_2, e_3 е базис на линейното пространство V и $\varphi : V \to V$ е линеен оператор, изобразяващ векторите

$$a_1 = e_1 + 2e_2 + e_3,\ a_2 = e_2 + e_3,\ a_3 = -3e_1 - e_2 + 3e_3,$$

съответно, във векторите

$$b_1 = e_1 - e_2 + 2e_3,\ b_2 = e_1 + e_2 - e_3,\ b_3 = e_1 + e_3.$$

Да намери матрицата на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3.

Задача 3. (1,5 точки) В евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$ е зададен линеен оператор φ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -2 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$.

а) Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, спрямо който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D;

б) Да се докаже, че $\varphi^2 - 15\varphi + 36\mathrm{Id} = 0$.

вар.	ф. номер	гр.	пот.	к.	сп.	име
4						

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА
Специалност Компютърни Науки
11.09.2005 г.

Задача 1. (1,5 точки) Нека V е множеството от матрици

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

и $U = \{ A \in V \mid x + 4y + 8z = 0 \}$.

а) Да се докаже, че V е линейно пространство над $\mathbb{R}$ относно обичайното събиране на матрици и умножение на матрица с число;

б) Да се докаже, че U е линейно подпространство на V;

в) Да се намерят базиси на V и U.

Задача 2. (1 точка) Нека e_1, e_2, e_3 е базис на линейното пространство V и $\varphi : V \to V$ е линеен оператор, изобразяващ векторите

$$a_1 = e_1 + e_2 + e_3,\ a_2 = -e_1 + 2e_2,\ a_3 = e_1 + e_3,$$

съответно, във векторите

$$b_1 = e_1 - e_2 - e_3,\ b_2 = 2e_1 - e_2,\ b_3 = e_1 + e_2 + e_3.$$

Да намери матрицата на φ спрямо базиса e_1, e_2, e_3.

Задача 3. (1,5 точки) В евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$ е зададен линеен оператор φ с матрица

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

спрямо ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$.

а) Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, спрямо който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D;

б) Да се докаже, че $\varphi^2 + 15\varphi + 36\mathrm{Id} = 0$.