ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1
Вариант A, 28.01.2008г.

Задача 1. Да се намери рангът на системата n-мерни вектори $a_1(\lambda, \lambda, ..., \lambda, \lambda, 0)$, $a_2(\mu, \mu, ..., \mu, 0, \lambda)$, $a_3(\mu, \mu, ..., 0, \mu, \lambda)$,. . . , $a_n(0, \mu, ..., \mu, \mu, \lambda)$ в зависимост от стойността на параметрите. Да се определи кога векторите са базис на n-мерното векторно пространство $\mathbb{R}^n$ и в тези случаи да се намерят координатите на вектора $b(1, 1, ..., 1)$ спрямо този базис.

Задача 2. В тримерното евклидово пространство $E = \mathbb{R}^3$ е зададено изображението φ т.че $\varphi(x) = (a, x)b - (b, x)a$ за всеки вектор $x \in E$, където $a = e_2 - 2e_3$, $b = e_1 - e_2$ и $e = \{e_1(1, 0, 0), e_2(0, 1, 0), e_3(0, 0, 1)\}$ е стандартният ортонормиран базис на E.
а) Да се докаже, че изображението φ е линеен оператор и φ^2 е симетричен оператор.
б) Да се намери матрицата на оператора φ^2 в базиса e и да се намери ортонормиран базис на E, в който матрицата на φ^2 е диагонална.
в) Да се намери матрицата на φ^{2009} в базиса e.

Задача 3. а) Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 x_1 & + & \lambda_2 x_2 & + & \cdots & + & \lambda_k x_k & = & 0 \\ \lambda_1^2 x_1 & + & \lambda_2^2 x_2 & + & \cdots & + & \lambda_k^2 x_k & = & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \lambda_1^k x_1 & + & \lambda_2^k x_2 & + & \cdots & + & \lambda_k^k x_k & = & 0 \end{array}\right. ,$$

където k е естествено число и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ са различни помежду си ненулеви комплексни числа .
б) Да се докаже, че системата

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \cdots & + & \lambda_n & = & 0 \\ \lambda_1^2 & + & \lambda_2^2 & + & \cdots & + & \lambda_n^2 & = & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \lambda_1^n & + & \lambda_2^n & + & \cdots & + & \lambda_n^n & = & 0 \end{array}\right.$$

има само нулево решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, където λ_i е комплексна променлива за всяко i.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1
Вариант B, 28.01.2008г.

Задача 1. Да се намери рангът на системата n-мерни вектори $a_1(\lambda, \lambda, ..., \lambda, \lambda, 0)$, $a_2(\mu, \mu, ..., \mu, 0, \lambda)$, $a_3(\mu, \mu, ..., 0, \mu, \lambda)$,. . . , $a_n(0, \mu, ..., \mu, \mu, \lambda)$ в зависимост от стойността на параметрите. Да се определи кога векторите са базис на n-мерното векторно пространство $\mathbb{R}^n$ и в тези случаи да се намерят координатите на вектора $b(1, 1, ..., 1)$ спрямо този базис.

Задача 2. В тримерното евклидово пространство $E = \mathbb{R}^3$ е зададено изображението φ т.че $\varphi(x) = (a, x)b - (b, x)a$ за всеки вектор $x \in E$, където $a = e_1 - 2e_3$, $b = e_1 - e_2$ и $e = \{e_1(1, 0, 0), e_2(0, 1, 0), e_3(0, 0, 1)\}$ е стандартният ортонормиран базис на E.
а) Да се докаже, че изображението φ е линеен оператор и φ^2 е симетричен оператор.
б) Да се намери матрицата на оператора φ^2 в базиса e и да се намери ортонормиран базис на E, в който матрицата на φ^2 е диагонална.
в) Да се намери матрицата на φ^{2009} в базиса e.

Задача 3. а) Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 x_1 & + & \lambda_2 x_2 & + & \cdots & + & \lambda_k x_k & = & 0 \\ \lambda_1^2 x_1 & + & \lambda_2^2 x_2 & + & \cdots & + & \lambda_k^2 x_k & = & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \lambda_1^k x_1 & + & \lambda_2^k x_2 & + & \cdots & + & \lambda_k^k x_k & = & 0 \end{array}\right. ,$$

където k е естествено число и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ са различни помежду си ненулеви комплексни числа .
б) Да се докаже, че системата

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \cdots & + & \lambda_n & = & 0 \\ \lambda_1^2 & + & \lambda_2^2 & + & \cdots & + & \lambda_n^2 & = & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \lambda_1^n & + & \lambda_2^n & + & \cdots & + & \lambda_n^n & = & 0 \end{array}\right.$$

има само нулево решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, където λ_i е комплексна променлива за всяко i.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1
Вариант C, 28.01.2008г.

Задача 1. Да се намери рангът на системата n-мерни вектори $a_1(\lambda, \lambda, ..., \lambda, \lambda, 0)$, $a_2(\mu, \mu, ..., \mu, 0, \lambda)$, $a_3(\mu, \mu, ..., 0, \mu, \lambda)$,. . . , $a_n(0, \mu, ..., \mu, \mu, \lambda)$ в зависимост от стойността на параметрите. Да се определи кога векторите са базис на n-мерното векторно пространство $\mathbb{R}^n$ и в тези случаи да се намерят координатите на вектора $b(1, 1, ..., 1)$ спрямо този базис.

Задача 2. В тримерното евклидово пространство $E = \mathbb{R}^3$ е зададено изображението φ т.че $\varphi(x) = (a, x)b - (b, x)a$ за всеки вектор $x \in E$, където $a = e_2 - 2e_3$, $b = e_1 - e_3$ и $e = \{e_1(1, 0, 0), e_2(0, 1, 0), e_3(0, 0, 1)\}$ е стандартният ортонормиран базис на E.
а) Да се докаже, че изображението φ е линеен оператор и φ^2 е симетричен оператор.
б) Да се намери матрицата на оператора φ^2 в базиса e и да се намери ортонормиран базис на E, в който матрицата на φ^2 е диагонална.
в) Да се намери матрицата на φ^{2009} в базиса e.

Задача 3. а) Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 x_1 & + & \lambda_2 x_2 & + & \cdots & + & \lambda_k x_k & = & 0 \\ \lambda_1^2 x_1 & + & \lambda_2^2 x_2 & + & \cdots & + & \lambda_k^2 x_k & = & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \lambda_1^k x_1 & + & \lambda_2^k x_2 & + & \cdots & + & \lambda_k^k x_k & = & 0 \end{array}\right. ,$$

където k е естествено число и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ са различни помежду си ненулеви комплексни числа .
б) Да се докаже, че системата

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \cdots & + & \lambda_n & = & 0 \\ \lambda_1^2 & + & \lambda_2^2 & + & \cdots & + & \lambda_n^2 & = & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \lambda_1^n & + & \lambda_2^n & + & \cdots & + & \lambda_n^n & = & 0 \end{array}\right.$$

има само нулево решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, където λ_i е комплексна променлива за всяко i.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1
Вариант D, 28.01.2008г.

Задача 1. Да се намери рангът на системата n-мерни вектори $a_1(\lambda, \lambda, ..., \lambda, \lambda, 0)$, $a_2(\mu, \mu, ..., \mu, 0, \lambda)$, $a_3(\mu, \mu, ..., 0, \mu, \lambda)$,. . . , $a_n(0, \mu, ..., \mu, \mu, \lambda)$ в зависимост от стойността на параметрите. Да се определи кога векторите са базис на n-мерното векторно пространство $\mathbb{R}^n$ и в тези случаи да се намерят координатите на вектора $b(1, 1, ..., 1)$ спрямо този базис.

Задача 2. В тримерното евклидово пространство $E = \mathbb{R}^3$ е зададено изображението φ т.че $\varphi(x) = (a, x)b - (b, x)a$ за всеки вектор $x \in E$, където $a = e_1 - 2e_2$, $b = e_1 - e_2$ и $e = \{e_1(1, 0, 0), e_2(0, 1, 0), e_3(0, 0, 1)\}$ е стандартният ортонормиран базис на E.
а) Да се докаже, че изображението φ е линеен оператор и φ^2 е симетричен оператор.
б) Да се намери матрицата на оператора φ^2 в базиса e и да се намери ортонормиран базис на E, в който матрицата на φ^2 е диагонална.
в) Да се намери матрицата на φ^{2009} в базиса e.

Задача 3. а) Да се реши системата

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 x_1 & + & \lambda_2 x_2 & + & \cdots & + & \lambda_k x_k & = & 0 \\ \lambda_1^2 x_1 & + & \lambda_2^2 x_2 & + & \cdots & + & \lambda_k^2 x_k & = & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \lambda_1^k x_1 & + & \lambda_2^k x_2 & + & \cdots & + & \lambda_k^k x_k & = & 0 \end{array}\right. ,$$

където k е естествено число и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ са различни помежду си ненулеви комплексни числа .
б) Да се докаже, че системата

$$\left|\begin{array}{ccccccccc} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & \cdots & + & \lambda_n & = & 0 \\ \lambda_1^2 & + & \lambda_2^2 & + & \cdots & + & \lambda_n^2 & = & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ \lambda_1^n & + & \lambda_2^n & + & \cdots & + & \lambda_n^n & = & 0 \end{array}\right.$$

има само нулево решение $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, където λ_i е комплексна променлива за всяко i.