ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА I
специалност Компютърни Науки
24 януари 2005
Вариант A

**Задача 1.** Да се определи за кои стойности на параметъра $\lambda$ квадратната матрица

$$A = \begin{pmatrix} -2\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -2\lambda & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2\lambda & \cdots & 1 & 1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -2\lambda \end{pmatrix}$$

от ред $n$ е обратима и за тези стойности на $\lambda$ да се намери обратната матрица $A^{-1}$.

**Задача 2.** Нека $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ е линейното пространство на квадратните матрици от ред 2 с реални коефициенти и нека

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\},$$
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & 2a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

а) Да се докаже, че $U$ и $W$ са подпространства на $V$;

б) Да се намерят базиси на сумата $U + W$ и сечението $U \cap W$ на подпространствата $U$ и $W$.

**Задача 3.** В тримерно евклидово пространство $E$ с ортонормиран базис $e_1, e_2, e_3$ е зададен линеен оператор $\varphi : E \to E$ по правилото:

$$\varphi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = (-5\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3)e_1 +$$
$$+(2\alpha_1 - 8\alpha_2 + 2\alpha_3)e_2 + (4\alpha_1 + 2\alpha_2 - 5\alpha_3)e_3.$$

а) Да се намери ортонормиран базис, спрямо който матрицата $D$ на оператора $\varphi$ е диагонална, както и тази матрица $D$;

б) Да се намери матрицата на оператора $\varphi^{2005}$ спрямо базиса $e_1, e_2, e_3$.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА I
специалност Компютърни Науки
24 януари 2005
Вариант B

**Задача 1.** Да се определи за кои стойности на параметъра $\lambda$ квадратната матрица

$$A = \begin{pmatrix} -3\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -3\lambda & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3\lambda & \cdots & 1 & 1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -3\lambda \end{pmatrix}$$

от ред $n$ е обратима и за тези стойности на $\lambda$ да се намери обратната матрица $A^{-1}$.

**Задача 2.** Нека $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ е линейното пространство на квадратните матрици от ред 2 с реални коефициенти и нека

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3a & 3b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\},$$
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 3b & 3a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

а) Да се докаже, че $U$ и $W$ са подпространства на $V$;

б) Да се намерят базиси на сумата $U + W$ и сечението $U \cap W$ на подпространствата $U$ и $W$.

**Задача 3.** В тримерно евклидово пространство $E$ с ортонормиран базис $e_1, e_2, e_3$ е зададен линеен оператор $\varphi : E \to E$ по правилото:

$$\varphi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = (-2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3)e_1 +$$
$$+(3\alpha_1 - 10\alpha_2 + \alpha_3)e_2 + (3\alpha_1 + \alpha_2 - 10\alpha_3)e_3.$$

а) Да се намери ортонормиран базис, спрямо който матрицата $D$ на оператора $\varphi$ е диагонална, както и тази матрица $D$;

б) Да се намери матрицата на оператора $\varphi^{2005}$ спрямо базиса $e_1, e_2, e_3$.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА I
специалност Компютърни Науки
24 януари 2005
Вариант C

**Задача 1.** Да се определи за кои стойности на параметъра $\lambda$ квадратната матрица

$$A = \begin{pmatrix} -4\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -4\lambda & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4\lambda & \cdots & 1 & 1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -4\lambda \end{pmatrix}$$

от ред $n$ е обратима и за тези стойности на $\lambda$ да се намери обратната матрица $A^{-1}$.

**Задача 2.** Нека $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ е линейното пространство на квадратните матрици от ред 2 с реални коефициенти и нека

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 4a & 4b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\},$$
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & 4a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

а) Да се докаже, че $U$ и $W$ са подпространства на $V$;

б) Да се намерят базиси на сумата $U + W$ и сечението $U \cap W$ на подпространствата $U$ и $W$.

**Задача 3.** В тримерно евклидово пространство $E$ с ортонормиран базис $e_1, e_2, e_3$ е зададен линеен оператор $\varphi : E \to E$ по правилото:

$$\varphi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = (-10\alpha_1 - 4\alpha_2 - 2\alpha_3)e_1 +$$
$$+(-4\alpha_1 - 4\alpha_2 + 4\alpha_3)e_2 + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2 - 10\alpha_3)e_3.$$

а) Да се намери ортонормиран базис, спрямо който матрицата $D$ на опeррaтора $\varphi$ е диагонална, както и тази матрица $D$;

б) Да се намери матрицата на оператора $\varphi^{2005}$ спрямо базиса $e_1, e_2, e_3$.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА I
специалност Компютърни Науки
24 януари 2005
Вариант D

**Задача 1.** Да се определи за кои стойности на параметъра $\lambda$ квадратната матрица

$$A = \begin{pmatrix} -5\lambda & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & -5\lambda & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -5\lambda & \cdots & 1 & 1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -5\lambda \end{pmatrix}$$

от ред $n$ е обратима и за тези стойности на $\lambda$ да се намери обратната матрица $A^{-1}$.

**Задача 2.** Нека $V = M_{2\times2}(\mathbb{R})$ е линейното пространство на квадратните матрици от ред 2 с реални коефициенти и нека

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 5a & 5b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\},$$
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 5b & 5a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

а) Да се докаже, че $U$ и $W$ са подпространства на $V$;

б) Да се намерят базиси на сумата $U + W$ и сечението $U \cap W$ на подпространствата $U$ и $W$.

**Задача 3.** В тримерно евклидово пространство $E$ с ортонормиран базис $e_1, e_2, e_3$ е зададен линеен оператор $\varphi : E \to E$ по правилото

$$\varphi(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) = (-5\alpha_1 + 3\alpha_2 + 6\alpha_3)e_1 +$$
$$+(3\alpha_1 - 13\alpha_2 + 2\alpha_3)e_2 + (6\alpha_1 + 2\alpha_2 - 10\alpha_3)e_3.$$

а) Да се намери ортонормиран базис, спрямо който матрицата $D$ на оператора $\varphi$ е диагонална, както и тази матрица $D$;

б) Да се намери матрицата на оператора $\varphi^{2005}$ спрямо базиса $e_1, e_2, e_3$.