ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1
специалност Компютърни науки, I курс
2 февруари 2006
Вариант A

Задача 1. Да се намерят всички стойности на параметъра λ, за които векторът $b = (1-2i, 1-2i, 1-2i, 1-2i, \lambda)$ може да се представи по единствен начин като линейна комбинация на векторите: $a_1 = (\lambda, 2, 2, 2, 2)$, $a_2 = (2, \lambda, 1-2i, 1-2i, 1-2i)$, $a_3 = (1-2i, 1-2i, \lambda, 2, 2)$, $a_4 = (2, 2, 2, \lambda, 1-2i)$.

Задача 2. В четиримерното евклидово пространство E с ортонормиран базис e_1, e_2, e_3, e_4 е зададен линеен оператор φ, който има следната матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Да се намерят $\operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Ker}\varphi$;

б) Да се определят размерностите на подпространствата $\operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\varphi$;

в) Да се намери ортонормиран базис на E, спрямо който матрицата D на оператора φ е диагонална, както и тази матрица.

Задача 3. Нека V е линейно пространство с размерност n и $\varphi : V \to V$ и $\psi : V \to V$ са линейни оператори. Да се докаже, че:

а) ако φ е обратим оператор, то $r(\varphi.\psi) = r(\psi.\varphi) = r(\psi)$;

б) $d(\psi.\varphi) = d(\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\psi)$;

в) $r(\psi.\varphi) \leqq \min\{r(\psi), r(\varphi)\}$;

г) $r(\psi.\varphi) \geqq r(\psi) + r(\varphi) - n$.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1
специалност Компютърни науки, I курс
2 февруари 2006
Вариант B

Задача 1. Да се намерят всички стойности на параметъра λ, за които векторът $b = (1+3i, 1+3i, 1+3i, 1+3i, \lambda)$ може да се представи по единствен начин като линейна комбинация на векторите: $a_1 = (\lambda, 2, 2, 2, 2)$, $a_2 = (2, \lambda, 1+3i, 1+3i, 1+3i)$, $a_3 = (1+3i, 1+3i, \lambda, 2, 2)$, $a_4 = (2, 2, 2, \lambda, 1+3i)$.

Задача 2. В четиримерното евклидово пространство E с ортонормиран базис e_1, e_2, e_3, e_4 е зададен линеен оператор φ, който има следната матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Да се намерят $\operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Ker}\varphi$;

б) Да се определят размерностите на подпространствата $\operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\varphi$;

в) Да се намери ортонормиран базис на E, спрямо който матрицата D на оператора φ е диагонална, както и тази матрица.

Задача 3. Нека V е линейно пространство с размерност n и $\varphi : V \to V$ и $\psi : V \to V$ са линейни оператори. Да се докаже, че:

а) ако φ е обратим оператор, то $r(\varphi.\psi) = r(\psi.\varphi) = r(\psi)$;

б) $d(\psi.\varphi) = d(\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\psi)$;

в) $r(\psi.\varphi) \leqq \min\{r(\psi), r(\varphi)\}$;

г) $r(\psi.\varphi) \geqq r(\psi) + r(\varphi) - n$.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1
специалност Компютърни науки, I курс
2 февруари 2006
Вариант C

Задача 1. Да се намерят всички стойности на параметъра λ, за които векторът $b = (1+3i, 1+3i, 1+3i, 1+3i, \lambda)$ може да се представи по единствен начин като линейна комбинация на векторите: $a_1 = (\lambda, 3, 3, 3, 3)$, $a_2 = (3, \lambda, 1+3i, 1+3i, 1+3i)$, $a_3 = (1+3i, 1+3i, \lambda, 3, 3)$, $a_4 = (3, 3, 3, \lambda, 1+3i)$.

Задача 2. В четиримерното евклидово пространство E с ортонормиран базис e_1, e_2, e_3, e_4 е зададен линеен оператор φ, който има следната матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

а) Да се намерят $\operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Ker}\varphi$;

б) Да се определят размерностите на подпространствата $\operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\varphi$;

в) Да се намери ортонормиран базис на E, спрямо който матрицата D на оператора φ е диагонална, както и тази матрица.

Задача 3. Нека V е линейно пространство с размерност n и $\varphi : V \to V$ и $\psi : V \to V$ са линейни оператори. Да се докаже, че:

а) ако φ е обратим оператор, то $r(\varphi.\psi) = r(\psi.\varphi) = r(\psi)$;

б) $d(\psi.\varphi) = d(\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\psi)$;

в) $r(\psi.\varphi) \leqq \min\{r(\psi), r(\varphi)\}$;

г) $r(\psi.\varphi) \geqq r(\psi) + r(\varphi) - n$.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1
специалност Компютърни науки, I курс
2 февруари 2006
Вариант D

Задача 1. Да се намерят всички стойности на параметъра λ, за които векторът $b = (2+3i, 2+3i, 2+3i, 2+3i, \lambda)$ може да се представи по единствен начин като линейна комбинация на векторите: $a_1 = (\lambda, 3, 3, 3, 3)$, $a_2 = (3, \lambda, 2+3i, 2+3i, 2+3i)$, $a_3 = (2+3i, 2+3i, \lambda, 3, 3)$, $a_4 = (3, 3, 3, \lambda, 2+3i)$.

Задача 2. В четиримерното евклидово пространство E с ортонормиран базис e_1, e_2, e_3, e_4 е зададен линеен оператор φ, който има следната матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

а) Да се намерят $\operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Ker}\varphi$;

б) Да се определят размерностите на подпространствата $\operatorname{Im}\varphi + \operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\varphi$;

в) Да се намери ортонормиран базис на E, спрямо който матрицата D на оператора φ е диагонална, както и тази матрица.

Задача 3. Нека V е линейно пространство с размерност n и $\varphi : V \to V$ и $\psi : V \to V$ са линейни оператори. Да се докаже, че:

а) ако φ е обратим оператор, то $r(\varphi.\psi) = r(\psi.\varphi) = r(\psi)$;

б) $d(\psi.\varphi) = d(\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi \cap \operatorname{Ker}\psi)$;

в) $r(\psi.\varphi) \leqq \min\{r(\psi), r(\varphi)\}$;

г) $r(\psi.\varphi) \geqq r(\psi) + r(\varphi) - n$.