ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1

специалност Компютърни науки

Вариант 1, 27 януари 2015 г.

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. Да се намери рангът на матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -7 & 13 & -6 \\ -1 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p \end{pmatrix}$$

в зависимост от стойностите на параметъра p.

Задача 2. В линейното пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейната обвивка $\mathbb{U} = l(a_1, a_2)$ на векторите

$$a_1 = (1, 2, 1, -2), \quad a_2 = (1, 0, 3, -2)$$

и пространството от решения $\mathbb{W}$ на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} 2x_1 & -x_2 & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & = 0 \end{array} \right. .$$

Да се намерят базиси на сечението $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$ и на сумата $\mathbb{U} + \mathbb{W}$.

Задача 3. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$, линейният оператор $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 4 \\ -8 & -7 & -4 \\ 4 & -4 & -13 \end{pmatrix}.$$

Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на ψ е диагонална, както и тази матрица D.

Задача 4. Нека $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ е линеен оператор в крайномерно пространство $\mathbb{V}$ с $\varphi^2 = 4\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$. Да се докаже, че:

(а) φ е обратим линеен оператор;

(б) ако λ е собствена стойност на φ, то $\lambda = \pm 2$;

(в) $\mathrm{im}(\varphi + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) = \mathrm{im}(\varphi + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{V}})^2$;

(г) $\ker(\varphi + 2\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) \cap \ker(\varphi - 2\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) = \{\mathcal{O}_{\mathbb{V}}\}$;

(д) $\{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = 2v\} = \{\varphi(v) + 2v \mid v \in \mathbb{V}\}$.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1

специалност Компютърни науки

Вариант 2, 27 януари 2015 г.

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. Да се намери рангът на матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -7 & -13 & -6 \\ -1 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p \end{pmatrix}$$

в зависимост от стойностите на параметъра p.

Задача 2. В линейното пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейната обвивка $\mathbb{U} = l(a_1, a_2)$ на векторите

$$a_1 = (1, -4, -1, 2), \quad a_2 = (1, 0, 3, 2)$$

и пространството от решения $\mathbb{W}$ на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{lllll} 3x_1 & +x_2 & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +4x_4 & = 0 \end{array} \right. .$$

Да се намерят базиси на сечението $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$ и на сумата $\mathbb{U} + \mathbb{W}$.

Задача 3. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$, линейният оператор $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на ψ е диагонална, както и тази матрица D.

Задача 4. Нека $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ е линеен оператор в крайномерно пространство $\mathbb{V}$ с $\varphi^2 = 9\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$. Да се докаже, че:

(а) φ е обратим линеен оператор;

(б) ако λ е собствена стойност на φ, то $\lambda = \pm 3$;

(в) $\mathrm{im}(\varphi + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) = \mathrm{im}(\varphi + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{V}})^2$;

(г) $\ker(\varphi + 3\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) \cap \ker(\varphi - 3\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) = \{\mathcal{O}_{\mathbb{V}}\}$;

(д) $\{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = 3v\} = \{\varphi(v) + 3v \mid v \in \mathbb{V}\}$.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1

специалност Компютърни науки

Вариант 3, 27 януари 2015 г.

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. Да се намери рангът на матрицата

$$\begin{pmatrix} -1 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & p & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p \end{pmatrix}$$

в зависимост от стойностите на параметъра p.

Задача 2. В линейното пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейната обвивка $\mathbb{U} = l(a_1, a_2)$ на векторите

$$a_1 = (1, 4, 2, -2), \quad a_2 = (1, 0, 6, -2)$$

и пространството от решения $\mathbb{W}$ на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} 3x_1 & -2x_2 & -2x_3 & & = 0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 0 \end{array} \right. .$$

Да се намерят базиси на сечението $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$ и на сумата $\mathbb{U} + \mathbb{W}$.

Задача 3. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$, линейният оператор $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -8 & 4 \\ -8 & -9 & -4 \\ 4 & -4 & -15 \end{pmatrix}.$$

Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на ψ е диагонална, както и тази матрица D.

Задача 4. Нека $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ е линеен оператор в крайномерно пространство $\mathbb{V}$ с $\varphi^2 = 16\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$. Да се докаже, че:

(а) φ е обратим линеен оператор;

(б) ако λ е собствена стойност на φ, то $\lambda = \pm 4$;

(в) $\mathrm{im}(\varphi + 4\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) = \mathrm{im}(\varphi + 4\mathrm{Id}_{\mathbb{V}})^2$;

(г) $\ker(\varphi + 4\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) \cap \ker(\varphi - 4\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) = \{\mathcal{O}_{\mathbb{V}}\}$;

(д) $\{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = 4v\} = \{\varphi(v) + 4v \mid v \in \mathbb{V}\}$.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1

специалност Компютърни науки

Вариант 4, 27 януари 2015 г.

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. Да се намери рангът на матрицата

$$\begin{pmatrix} -1 & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & p & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -8 & -18 & -9 \\ 0 & 0 & -1 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & p \end{pmatrix}$$

в зависимост от стойностите на параметъра p.

Задача 2. В линейното пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейната обвивка $\mathbb{U} = l(a_1, a_2)$ на векторите

$$a_1 = (1, 4, 1, 2), \quad a_2 = (1, 0, -3, 2)$$

и пространството от решения $\mathbb{W}$ на хомогенната система линейни уравнения

$$\left| \begin{array}{rrrrl} x_1 & +2x_2 & -2x_3 & & = 0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = 0 \end{array} \right. .$$

Да се намерят базиси на сечението $\mathbb{U} \cap \mathbb{W}$ и на сумата $\mathbb{U} + \mathbb{W}$.

Задача 3. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^3$, линейният оператор $\psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 2 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^3$, в който матрицата D на ψ е диагонална, както и тази матрица D.

Задача 4. Нека $\varphi : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ е линеен оператор в крайномерно пространство $\mathbb{V}$ с $\varphi^2 = 25\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}$. Да се докаже, че:

(а) φ е обратим линеен оператор;

(б) ако λ е собствена стойност на φ, то $\lambda = \pm 5$;

(в) $\mathrm{im}(\varphi + 5\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) = \mathrm{im}(\varphi + 5\mathrm{Id}_{\mathbb{V}})^2$;

(г) $\ker(\varphi + 5\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) \cap \ker(\varphi - 5\mathrm{Id}_{\mathbb{V}}) = \{\mathcal{O}_{\mathbb{V}}\}$;

(д) $\{v \in \mathbb{V} \mid \varphi(v) = 5v\} = \{\varphi(v) + 5v \mid v \in \mathbb{V}\}$.