ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1

специалност Компютърни Науки, II поток

Вариант 1, 6 февруари 2012г.

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. В зависимост от стойностите на комплексните параметри p, q да се намери ранга на системата вектори

$$v_1 = (1, -1, 2, 1, 1), \quad v_2 = (2, 1, -1, 1, -1)$$
$$v_3 = (1, -1, 1, -1, 1), \quad v_4 = (-1, -1, 2, p, q).$$

Задача 2. (а) За произволни подпространства U_1 и U_2 на n-мерното евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ да се докаже, че ортогоналното допълнение на сумата

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

съвпада със сечението на ортогоналните допълнения на събираемите.

(б) Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейната обвивка $U_1 = l_\mathbb{R}(a_1, a_2)$ на векторите

$$a_1 = (1, -1, 2, 1), \quad a_2 = (1, 1, -1, 1)$$

и линейната обвивка $U_2 = l_\mathbb{R}(b_1, b_2)$ на векторите

$$b_1 = (1, -1, -1, 1), \quad b_2 = (2, 2, -5, 2).$$

Да се намери:
(i) хомогенна система уравнения с пространство от решения $U_1 + U_2$;
(ii) базис на сечението $U_1^\perp \cap U_2^\perp$ на ортогоналните допълнения $U_i^\perp$ на U_i.

Задача 3. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$, линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D.

Задача 4. Линейните оператори

$$\varphi_1 : V \to V, \quad \varphi_2 : V \to V \quad \text{и} \quad \psi : V \to V$$

в крайномерно пространство V над числово поле F изпълняват равенството

$$\varphi_1\varphi_2 + \psi = \mathrm{Id}_V.$$

Ако единственият вектор $v \in V$ с $\psi(v) = v$ е нулевият вектор на V, да се докаже, че операторите φ_1 и φ_2 са обратими.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1

специалност Компютърни Науки, II поток

Вариант 2, 6 февруари 2012г.

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. В зависимост от стойностите на комплексните параметри p, q да се намери ранга на системата вектори

$$v_1 = (1, -2, 1, 1, 1), \quad v_2 = (1, -1, 1, 1, -1)$$
$$v_3 = (2, 1, 1, -1, -1), \quad v_4 = (-1, 1, -1, p, q).$$

Задача 2. (а) За произволни подпространства U_1 и U_2 на n-мерното евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ да се докаже, че ортогоналното допълнение на сумата

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

съвпада със сечението на ортогоналните допълнения на събираемите.

(б) Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейната обвивка $U_1 = l_\mathbb{R}(a_1, a_2)$ на векторите

$$a_1 = (1, -2, 1, 1), \quad a_2 = (1, -1, -1, 1)$$

и линейната обвивка $U_2 = l_\mathbb{R}(b_1, b_2)$ на векторите

$$b_1 = (1, 1, 1, -1), \quad b_2 = (2, -5, -2, 4).$$

Да се намери:
(i) хомогенна система уравнения с пространство от решения $U_1 + U_2$;
(ii) базис на сечението $U_1^\perp \cap U_2^\perp$ на ортогоналните допълнения $U_i^\perp$ на U_i.

Задача 3. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$, линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D.

Задача 4. Линейните оператори

$$\varphi_1 : V \to V, \quad \varphi_2 : V \to V \quad \text{и} \quad \psi : V \to V$$

в крайномерно пространство V над числово поле F изпълняват равенството

$$\varphi_1\varphi_2 + \psi = \mathrm{Id}_V.$$

Ако единственият вектор $v \in V$ с $\psi(v) = v$ е нулевият вектор на V, да се докаже, че операторите φ_1 и φ_2 са обратими.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1

специалност Компютърни Науки, II поток

Вариант 3, 6 февруари 2012г.

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. В зависимост от стойностите на комплексните параметри p, q да се намери ранга на системата вектори

$$v_1 = (1, -1, 2, 1, 1), \quad v_2 = (1, -1, 1, 1, 1)$$
$$v_3 = (2, 1, -1, -1, -1), \quad v_4 = (1, -1, 2, p, q).$$

Задача 2. (а) За произволни подпространства U_1 и U_2 на n-мерното евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ да се докаже, че ортогоналното допълнение на сумата

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

съвпада със сечението на ортогоналните допълнения на събираемите.

(б) Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейната обвивка $U_1 = l_{\mathbb{R}}(a_1, a_2)$ на векторите

$$a_1 = (1, 1, -2, 1), \quad a_2 = (-1, 1, 1, -1)$$

и линейната обвивка $U_2 = l_{\mathbb{R}}(b_1, b_2)$ на векторите

$$b_1 = (1, 1, -1, -1), \quad b_2 = (-2, 2, 3, -4).$$

Да се намери:
(i) хомогенна система уравнения с пространство от решения $U_1 + U_2$;
(ii) базис на сечението $U_1^\perp \cap U_2^\perp$ на ортогоналните допълнения $U_i^\perp$ на U_i.

Задача 3. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$, линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D.

Задача 4. Линейните оператори

$$\varphi_1 : V \to V, \quad \varphi_2 : V \to V \quad \text{и} \quad \psi : V \to V$$

в крайномерно пространство V над числово поле F изпълняват равенството

$$\varphi_1\varphi_2 + \psi = \mathrm{Id}_V.$$

Ако единственият вектор $v \in V$ с $\psi(v) = v$ е нулевият вектор на V, да се докаже, че операторите φ_1 и φ_2 са обратими.

ПИСМЕН ИЗПИТ ПО АЛГЕБРА 1

специалност Компютърни Науки, II поток

Вариант 4, 6 февруари 2012г.

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. В зависимост от стойностите на комплексните параметри p, q да се намери ранга на системата вектори

$$v_1 = (1, 1, -2, 1, 1), \quad v_2 = (1, -1, -1, 1, -1)$$
$$v_3 = (2, 1, 1, 1, -1), \quad v_4 = (-1, 1, 1, p, q).$$

Задача 2. (а) За произволни подпространства U_1 и U_2 на n-мерното евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ да се докаже, че ортогоналното допълнение на сумата

$$(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

съвпада със сечението на ортогоналните допълнения на събираемите.

(б) Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ са дадени линейната обвивка $U_1 = l_{\mathbb{R}}(a_1, a_2)$ на векторите

$$a_1 = (1, 2, 1, -1), \quad a_2 = (1, -1, 1, -1)$$

и линейната обвивка $U_2 = l_{\mathbb{R}}(b_1, b_2)$ на векторите

$$b_1 = (1, 1, -1, -1), \quad b_2 = (2, -1, 4, -2).$$

Да се намери:
(i) хомогенна система уравнения с пространство от решения $U_1 + U_2$;
(ii) базис на сечението $U_1^\perp \cap U_2^\perp$ на ортогоналните допълнения $U_i^\perp$ на U_i.

Задача 3. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$, линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ има матрица

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Да се намери ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който матрицата D на φ е диагонална, както и тази матрица D.

Задача 4. Линейните оператори

$$\varphi_1 : V \to V, \quad \varphi_2 : V \to V \quad \text{и} \quad \psi : V \to V$$

в крайномерно пространство V над числово поле F изпълняват равенството

$$\varphi_1\varphi_2 + \psi = \mathrm{Id}_V.$$

Ако единственият вектор $v \in V$ с $\psi(v) = v$ е нулевият вектор на V, да се докаже, че операторите φ_1 и φ_2 са обратими.