Контролна работа № 2 по АЛГЕБРА 1
Специалност Компютърни науки
Вариант 1, 10 януари 2014 г.

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. Да се реши матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Линейният оператор $\varphi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ има матрица

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & -1 & -1 \\ 1 & -1 & a & -1 \\ 1 & -1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

спрямо някакъв базис на пространството $\mathbb{C}^4$ на наредените четворки комплексни числа. Да се намерят базиси на ядрото $\ker\varphi$ и на образа $\mathrm{im}\varphi$ на φ в зависимост от стойностите на комплексния параметър $a \in \mathbb{C}$.

Задача 3. В пространството $\mathbb{Q}^4$ на наредените четворки рационални числа са дадени линейната обвивка $l(a_1, a_2, a_3)$ на векторите

$$a_1 = (1,0,1,1), \quad a_2 = (1,2,3,0), \quad a_3 = (3,4,7,1)$$

и пространството от решения W на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =0 \\ & & 4x_3 & -7x_4 & =0 \end{array} \right. .$$

Да се намерят базиси на сумата $U+W$ и на сечението $U \cap W$ на U и W.

Задача 4. Нека $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е линеен оператор, чийто образ се съдържа в множеството от решения M на линейното уравнение

$$y_1 + \ldots + y_n = 2013.$$

Да се докаже, че Φ има 1-мерно инвариантно подпространство.

Контролна работа № 2 АЛГЕБРА 1
Специалност Компютърни науки
Вариант 2, 10 януари 2014 г.

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. Да се реши матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & -5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Линейният оператор $\varphi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ има матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+b \\ -1 & -1 & 1+b & 1 \\ -1 & 1+b & -1 & 1 \\ 1+b & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо някакъв базис на пространството $\mathbb{C}^4$ на наредените четворки комплексни числа. Да се намерят базиси на ядрото $\ker\varphi$ и на образа $\mathrm{im}\varphi$ на φ в зависимост от стойностите на комплексния параметър $b \in \mathbb{C}$.

Задача 3. В пространството $\mathbb{Q}^4$ на наредените четворки рационални числа са дадени линейната обвивка $l(a_1, a_2, a_3)$ на векторите

$$a_1 = (0,1,1,1), \quad a_2 = (2,3,1,0), \quad a_3 = (-4,-2,0,1)$$

и пространството от решения W на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & -x_2 & -4x_3 & -2x_4 & =0 \\ & & 5x_3 & +8x_4 & =0 \end{array} \right. .$$

Да се намерят базиси на сумата $U+W$ и на сечението $U \cap W$ на U и W.

Задача 4. Нека $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е линеен оператор, чийто образ се съдържа в множеството от решения M на линейното уравнение

$$y_1 + \ldots + y_n = 2014.$$

Да се докаже, че Φ има 1-мерно инвариантно подпространство.

Контролна работа № 2 по АЛГЕБРА 1
Специалност Компютърни науки
Вариант 3, 10 януари 2014 г.

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. Да се реши матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Линейният оператор $\varphi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ има матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & a-1 \\ 1 & -1 & a-1 & -1 \\ 1 & a-1 & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо някакъв базис на пространството $\mathbb{C}^4$ на наредените четворки комплексни числа. Да се намерят базиси на ядрото $\ker \varphi$ и на образа $\mathrm{im}\varphi$ на φ в зависимост от стойностите на комплексния параметър $a \in \mathbb{C}$.

Задача 3. В пространството $\mathbb{Q}^4$ на наредените четворки рационални числа са дадени линейната обвивка $l(a_1, a_2, a_3)$ на векторите

$$a_1 = (1,0,1,1), \quad a_2 = (1,2,3,0), \quad a_3 = (3,4,7,1)$$

и пространството от решения W на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & -x_4 & =0 \end{array} \right. .$$

Да се намерят базиси на сумата $U + W$ и на сечението $U \cap W$ на U и W.

Задача 4. Нека $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е линеен оператор, чийто образ се съдържа в множеството от решения M на линейното уравнение

$$y_1 + \ldots + y_n = 2013.$$

Да се докаже, че Φ има 1-мерно инвариантно подпространство.

Контролна работа № 2 по АЛГЕБРА 1
Специалност Компютърни науки
Вариант 4, 10 януари 2014 г.

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. Да се реши матричното уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Линейният оператор $\varphi : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ има матрица

$$\begin{pmatrix} b-2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & b-2 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & b-2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & b-2 \end{pmatrix}$$

спрямо някакъв базис на пространството $\mathbb{C}^4$ на на наредените четворки комплексни числа. Да се намерят базиси на ядрото $\ker \varphi$ и на образа $\mathrm{im}\varphi$ на φ в зависимост от стойностите на комплексния параметър $b \in \mathbb{C}$.

Задача 3. В пространството $\mathbb{Q}^4$ на наредените четворки рационални числа са дадени линейната обвивка $l(a_1, a_2, a_3)$ на векторите

$$a_1 = (0,1,1,1), \quad a_2 = (2,3,1,0), \quad a_3 = (-4,-2,2,4)$$

и пространството от решения W на хомогенната линейна система

$$\left| \begin{array}{ccccc} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & =0 \\ -x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \end{array} \right. .$$

Да се намерят базиси на сумата $U + W$ и на сечението $U \cap W$ на U и W.

Задача 4. Нека $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ е линеен оператор, чийто образ се съдържа в множеството от решения M на линейното уравнение

$$y_1 + \ldots + y_n = 2014.$$

Да се докаже, че Φ има 1-мерно инвариантно подпространство.

Решения

Задача 1 - 1 точка

Вариант 1: Записваме двете матрици една след друга.

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

След едновременни елементарни преобразувания по редове към двете матрици по метода на Gauss получаваме:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -7 \end{array}\right)$$

Ето още някои междинни стъпки:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -13 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & -7 \end{array}\right)$$

Оттук намираме, че търсената стойност на X е

$$\left(\begin{array}{cc} -13 & 14 \\ 6 & -5 \\ -2 & 1 \\ 6 & -7 \end{array}\right)$$

Вариант 2: По подобен начин намираме, че търсената стойност на X е

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & -2 \\ -2 & -1 \\ 6 & -1 \\ -3 & 0 \end{array}\right)$$

Вариант 3: С аналогични разглеждания намираме, че матрицата X е

$$\left(\begin{array}{cc} 6 & -7 \\ -13 & 14 \\ 6 & -5 \\ -2 & 1 \end{array}\right)$$

Вариант 4: В този сличай, матрицата X е

$$\left(\begin{array}{cc} -3 & 0 \\ -2 & -1 \\ 0 & -2 \\ 6 & -1 \end{array}\right)$$

Задача 2 - 1 точка
От тях 0.4 точки се дават за целенасочени преобразувания на разглежданите матрици. По 0.1 точки се дава за базиси на ядрото $\ker\varphi$ и на образа $\mathrm{im}\varphi$ във всеки от трите случая.

Варинат 1 : За да намерим $Ker\varphi$, образуваме хомогенната линейна система с матрица от коефициенти, равна на матрицата на φ, а именно:

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + ax_2 - x_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 + ax_3 - x_4 = 0$$
$$x_1 - x_2 - x_3 + ax_4 = 0$$

Прибавяме първото уравнение към следващите:

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$(1+a)x_1 + (1+a)x_2 = 0$$
$$(1+a)x_1 \ \ + (1+a)ax_3 = 0$$
$$(1+a)x_1 \ \ + (1+a)ax_4 = 0$$

При $a = -1$ последните три уравнения отпадат и намираме, че базисът на $Ker\varphi$ се състои от векторите $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$.
При $a \neq -1$ делим на $a+1$ и получаваме

$$ax_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 \ \ + x_3 = 0$$
$$x_1 \ \ + x_4 = 0$$

От последните три уравнения имаме $x_2 = x_3 = x_4 = -x_1$. Като извадим последните три уравнения от първото, получаваме $(a-3)x_1 = 0$. Оттук при $a = 3$ следва, че първото урванение отпада и получаваме, че базисът на $Ker\varphi$ се състои от вектора $(1,-1,-1,-1)$. За $a \neq 3$ имаме $Ker\varphi = 0$.
За намиране на образа $Im\varphi$ търсим максимална линейно независима подсистема на вектор-стълбовете на матрицата на φ. Изваждаме последния стълб от останалите и получаваме

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a+1 & a+1 & 0 & -1 \\ a+1 & 0 & a+1 & -1 \\ 1-a^2 & -a-1 & -a-1 & a \end{pmatrix}$$

При $a = -1$ първите три стълба стават нулеви и базис на $Im\varphi$ е последният стълб $(1,-1,-1,-1)$.
В противен случай, делим първите три стълба на $a+1$ и получаваме матрицата

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1-a & -1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Вадим втори и трети стълб от първия и същевременно разместваме втори и трети стълбове, за да получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3-a & -1 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Ако $a = 3$, то максимална линейно независима подсистема на вектор-стълбовете се образува от последните три сътлба, т.е. базис на $Im\varphi$ е $(1,-1,-1,3)$, $(0,1,0-1)$, $(0,0,1,-1)$. За $a \neq 3$, базис на $Im\varphi$ е стандартния базис, понеже в този случай $Im\varphi$ е V. Окончателно, при $a = -1$, образът $Im\varphi$ има базис $(1,-1,-1,-1)$ и базис $(1,1,0,0)$, $(1,0,1,0)$, $(1,0,0,1)$ на $Ker\varphi$.
Ако $a = 3$, то базис на $Ker\varphi$ е $(1,-1,-1,-1)$, а базис на $Im\varphi$ е $(1,-1,-1,3)$, $(0,1,0-1)$, $(0,0,1,-1)$. В общия случай, при $a \neq -1; 3$ имаме $Ker\varphi = 0$, а $Im\varphi = V$ има стандартния базис.

По подобен начин във Вариант 2 получаваме, че
При $b = -2$, базис на $Ker\varphi$ е $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, а базис на $Im\varphi$ е $(1, -1, -1, -1)$;
За $b = 2$, базис на $Ker\varphi$ е $(1, 1, 1, -1)$, а базис на $Im\varphi$ е $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$.
В общия случай, за $b \neq 2; -2$ имаме $Ker\varphi = 0$, а сатндартният базис е базис на $Im\varphi = V$.
По подобен начин, за трети вариант получаваме, че:
Ако $a = 0$, то базис на $Ker\varphi$ е $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, а базис на $Im\varphi$ е $(1, 1, 1, -1)$;
За $a = 4$, базис на $Ker\varphi$ е $(1, -1, -1, -1)$, а базис на $Im\varphi$ е $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$.
В общия случай, при $b \neq 2; -2$ имаме $Ker\varphi = 0$, а сатндартният базис е базис на $Im\varphi = V$.
Аналогични разглеждания дават в четвърти вариант следния отговор:
Ако $b = 1$, то базис на $Ker\varphi$ е $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, а базис на $Im\varphi$ е $(1, -1, -1, -1)$;
За $b = 5$, базис на $Ker\varphi$ е $(1, 1, 1, -1)$, а базис на $Im\varphi$ е $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(1, 0, 0, 1)$.
В общия случай, при $b \neq 2; -2$ имаме $Ker\varphi = 0$, а стандартният базис е базис на $Im\varphi = V$.

Задача 3 - 1 точка

Вариант 1
За намиране на фундаментална система решения, задаваща W се дават 0.25 точки. За целта изваждаме хъпвото уравнение от второто и веднага, от новополученото второ и трето уравнение намираме $x_3 = x_4 = 0$. Оттук следва непосердствено, че фундаментална система решения, а следователно и базис на W е веторът $(1, 1, 0, 0)$.
За намиране на хомогенна система линейни уравнения, задаваща U се дават следващите 0.25 точки. По-точно, намираме фундаментална система решения на помощната хомогенна система линейни уравнения

$$y_1 + \ \ y_3 + y_4 = 0$$

$$y_1 + 2y_2 + 3y_3 \ \ = 0$$

$$3y_1 + 4y_2 + 7y_3 + y_4 = 0,$$

с коефициенти, образувани по редове от координатите на a_1, a_2, a_3:
Изваждаме първото уравнение от второто и първото, умножено по три от третото, за да получим

$$y_1 + \ \ y_3 + y_4 = 0$$

$$2y_2 + 2y_3 - y_4 = 0$$

(Съобразийме, че новополученото трето уравнение е пропорционално на второто.) Намираме, че фундаментална система решения на тази хомогенна система линейни уравнения е $(-2, 1, 0, 2)$, $(-1, -1, 1, 0)$. Следователно системата, задаваща U е

$$-2x_1 + x_2 + x_4 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

За намиране на $U \cap W = 0$ се дават 0.25 точки. За целта е достатъчно да проверим, че векторът $(1, 1, 0, 0)$ не е решение на дадената система и, следователно, $U \cap W = 0$.
Оттук и от теоремата за размерност на сума и сечение на подпространства имаме $U + W = V$. В резултат, стандартният базис е базис на сумата $U + W = V$. За намиране на базис на $U + W = V$ се дават последните 0.25 точки.
По подобен начин, във Варианти 2, 3, 4 намираме, че $U \cap W = 0$ и че $U + W = V$. Стандартният бази е базис на $U + W = V$.

Задача 4 - 1 точка

От условието следва, че $Im\varphi$ се съдържа строго във V. Следователно, по теоремата на ранга и дефекта имаме, че $Im\varphi \neq 0$. Тогава пространството, породено от собствен вектор на нулевата собствена стойност е 1-мерно инвариантно подпространство.