Първо Контролно ПО АЛГЕБРА 1
Специалност Компютърни науки
Вариант 1, 15 ноември 2013

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. Пресметнете всички комплексни стойности на $\sqrt[3]{-2}$.

Задача 2. За кои стойности на параметъра $\lambda \in \mathbb{C}$ векторът $v = (3, -4, 6, \lambda)$ е линейна комбинация на векторите

$$a_1 = (1, -1, 2, 3), a_2 = (2, 1, -1, 2), a_3 = (3, -1, 1, 1).$$

Задача 3. За $c \neq 0$ пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1+c & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1+c^2 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1+c^{n-1} & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+c^n \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Нека $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$, $1 \leq i \leq n$ са векторите с единствена ненулева компанента 1 в i-та позиция, $V_1 = l(e_i - ie_1 \mid 2 \leq i \leq n)$, $V_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = ix_1, \ 2 \leq i \leq n\}$.
(а) Да се докаже, че V_1 е подпространство на $\mathbb{R}^n$ и да се намери базис на V_1.
(б) Да се докаже, че $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ е директна сума на подпространствата си V_1 и V_2.

Първо Контролно ПО АЛГЕБРА 1
Специалност Компютърни науки
Вариант 2, 15 ноември 2013

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. Пресметнете всички комплексни стойности на $\sqrt[4]{16}$.

Задача 2. За кои стойности на параметъра $\lambda \in \mathbb{C}$ векторът $v = (2, 6, -5, \lambda)$ е линейна комбинация на векторите

$$a_1 = (1.2, -1, 1), a_2 = (2, 1, -1, 1), a_3 = (3, 1, 1, -1).$$

Задача 3. За $c \neq 0$ пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+\frac{1}{c} & 2 \\ 1 & 1 & \dots & 1+\frac{1}{2c} & 1 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1+\frac{1}{(n-1)c} & \dots & 1 & 1 & 2 \\ 1+\frac{1}{nc} & 1 & \dots & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Нека $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$, $1 \leq i \leq n$ са векторите с единствена ненулева компанента 1 в i-та позиция, $V_1 = l(e_i - ie_1 \mid 2 \leq i \leq n)$, $V_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = ix_1, \ 2 \leq i \leq n\}$.
(а) Да се докаже, че V_1 е подпространство на $\mathbb{R}^n$ и да се намери базис на V_1.
(б) Да се докаже, че $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ е директна сума на подпространствата си V_1 и V_2.

Първо Контролно ПО АЛГЕБРА 1
Специалност Компютърни науки
Вариант 3, 15 ноември 2013

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. Пресметнете всички комплексни стойности на $\sqrt[3]{-2i}$.

Задача 2. За кои стойности на параметъра $\lambda \in \mathbb{C}$ векторът $v = (3, -1, 3, \lambda)$ е линейна комбинация на векторите

$$a_1 = (1, -1, 2, 1), a_2 = (2, 1, -1, 1), a_3 = (3, 1, -1, -1).$$

Задача 3. За $c \neq 0$ пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2+c & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2+c^2 & \dots & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2+c^{n-1} & 2 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2+c^n \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Нека $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$, $1 \leq i \leq n$ са векторите с единствена ненулева компанента 1 в i-та позиция, $V_1 = l(e_i - ie_1 \mid 2 \leq i \leq n)$, $V_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = ix_1, \ 2 \leq i \leq n\}$.
(а) Да се докаже, че V_1 е подпространство на $\mathbb{R}^n$ и да се намери базис на V_1.
(б) Да се докаже, че $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ е директна сума на подпространствата си V_1 и V_2.

Първо Контролно ПО АЛГЕБРА 1
Вариант 4, 15 ноември 2013

Име:	
Група:	Факултетен №

Задача 1. Пресметнете всички комплексни стойности на $\sqrt[3]{i}$.

Задача 2. За кои стойности на параметъра $\lambda \in \mathbb{C}$ векторът $v = (-6, 6, -2, \lambda)$ е линейна комбинация на векторите

$$a_1 = (1, 1, -1, 2), a_2 = (2, -2, 1, -1), a_3 = (3, -1, -1, -1).$$

Задача 3. За $c \neq 0$ пресметнете детерминантата

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2+\frac{1}{c} & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2+\frac{1}{2c} & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2+\frac{1}{(n-1)c} & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2+\frac{1}{nc} & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Нека $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0 \dots 0)$, $1 \leq i \leq n$ са векторите с единствена ненулева компанента 1 в i-та позиция, $V_1 = l(e_i - ie_1 \mid 2 \leq i \leq n)$, $V_2 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i = ix_1, \ 2 \leq i \leq n\}$.
(а) Да се докаже, че V_1 е подпространство на $\mathbb{R}^n$ и да се намери базис на V_1.
(б) Да се докаже, че $\mathbb{R}^n = V_1 \oplus V_2$ е директна сума на подпространствата си V_1 и V_2.

Решения:

Задача 1 - 1 точка
Вариант 1

$-2 = -2(cos0 + isin0)$
$\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}(cos\frac{2k\pi}{3} + sin\frac{2k\pi}{3})$ за $k = 0, 1, 2$ и следователно $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}; -\sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}); -\sqrt[3]{2}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$
Аналогично с Вариант 1 намираме във Вариант 2, че $\sqrt[4]{16} = 2; -2; \sqrt[3]{-2}; -\sqrt[3]{-2}$
Вариант 3: $\sqrt[3]{-2i} = \sqrt[3]{2}; -\sqrt[3]{2}(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i); -\sqrt[3]{2}(\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)$
Вариант 4: $\sqrt[3]{i} = -i; \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

Задача 2 - 1 точка

Вариант 1: $v = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$ и като разпишем покоординатно получаваме

$$3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$-4 = -x_1 + x_2 - x_3$$

$$6 = 2x_1 - x_2 + x_3$$

$$\lambda = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

За ссставянето на тази система линейни уравнения се дават 0.25 точки.
За решаването на така получената система се дават 0.75 точки. По-точно, като прибавим първия ред към втория, първия ред по (-2) към третия, първия ред по (-3) към четвъртия, получаваме

$$3 = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$-4 = 3x_2 + x_3$$

$$0 = -5x_2 - 5x_3$$

$$\lambda - 9 = -4x_2 - 8x_3,$$

откъдето намираме $x_1 = -1$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$,$\lambda = -7$.
По подобен начин, във Вариант 2 имаме $\lambda = -1$, а за Варианти 3 и 4 следва $\lambda = 5$.

Задача 3 - 1 точка

Вариант 1 : Като извадим първия ред от всички останали и преобразуваме до детерминанта Пачи крак получаваме

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & c^2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & c^{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & c^n \end{vmatrix}.$$

За получаването на детерминанта Пачи крак се дават 0.25 точки.
Решаването на детерминантата Пачи крак се оценява с 0.5 точки. За окончателния отговор се датав 0.25 точки.
След елементарни преобразувания имаме
$c^{\frac{n(n+1)}{2}}(1 - \frac{c^n-1}{c^n(c-1)})$

Вариант 2: По подобен начин намираме $(-1)^{[\frac{n+1}{2}]}\frac{1}{n!c^n}(1-\frac{n(n+1)c}{2})$
Вариант 3: Аналогични разглеждания дават $c^{\frac{n(n+1)}{2}}(2+\frac{2(c^n-1)}{c^n(c-1)})$
Във Вариант 4 намираме $(-1)^{[\frac{n+1}{2}]}\frac{1}{n!c^n}(2+n(n+1)c)$

Задача 4 - 1 точка

(а) 0.5 точки за намиране на базис на V_1.
Понеже V_1 е линейна обвивка, то V_1 е подпространство. Един базис на това пространство е $e_i - ie_1$, $i = 2, \dots n$. За да установим, че посочените вектори образуват базис на V_1 е достатъчно да установим тяхната линейна независимост. Нека $x_2, \dots, x_n$ са такива числа, че $x_2(e_2 - 2e_1) + \dots + x_n(e_n - ne_n) = 0$. След разкриване на скобите получаваме линейна комбинация на $e_1, \dots e_n$ с коефициенти $x_2, \dots, x_n$ пред $e_2, \dots, e_n$, която е равна на нулевия вектор. Понеже $e_1, \dots, e_n$ е базис, а оттам и линейно независима система вектори, оттук следва $x_2 = \dots = x_n = 0$ и линейната независимост на векторите $e_i - ie_1$, $i = 2, \dots n$.
(б) 0.25 точки за доказване на $dimV_1 + dimV_2 = n = dimV$. По-точно, имаме $V_2 = l(a)$ за $a = (1, 2, \dots, n) = e_1 + \dots + e_n$. Следователно $dimV_2 = 1$. От (а) знаем, че $dimV_1 = n - 1$. Оттук $dimV_1 + dimV_2 = n = dimV$.
0.25 точки за установяване на $a \notin V_1$ и довършване на доказателството на твърдението. Да допуснем противното. Тогава съществуват $x_2, \dots, x_n$, такива че $e_1 + \dots + e_n = x_2(e_2 - 2e_1) + \dots + x_n(e_n - ne_n)$. След разкриване на скобите се получава линейна зависимост между $e_1, \dots e_n$ с коефициенти $x_2, \dots, x_n$ пред $e_2, \dots e_n$. Понеже $e_2, \dots e_n$ е базис, то $x_2 = \dots = x_n = 0$, което е противоречие, доказващо твърдението.