вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80922	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Сияна Ясенова Плачкова**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 2, 4, 3), a_2 = (2, -4, 3, -4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4, 2, 3, -1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{29}{45}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{13}{45}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{29}{45}a_1 + \frac{13}{45}a_2 = \left[\frac{142}{45}, \frac{2}{15}, \frac{31}{9}, \frac{7}{9}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{38}{45}, \frac{28}{15}, -\frac{4}{9}, -\frac{16}{9}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{29}{45}a_1 + \frac{13}{45}a_2 = \left[\frac{142}{45}, \frac{2}{15}, \frac{31}{9}, \frac{7}{9}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{38}{45}, \frac{28}{15}, -\frac{4}{9}, -\frac{16}{9}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3-x & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3-x & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 3$ и $b = -1$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2 - 4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a + 2b = 6 - 2 = 4, \lambda_4 = 2a - 2b = 6 + 2 = 8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A - \lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, -1, -1, 1] \\ e_4 &= [1, 1, -1, -1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80930	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Артем Александрович Никифоров**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 1, 3, 1), a_2 = (-1, 3, -1, 4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-4, -3, 3, -1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{11}{27} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{4}{9}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{11}{27}a_1 + -\frac{4}{9}a_2 = \left[-\frac{32}{27}, -\frac{47}{27}, -\frac{7}{9}, -\frac{59}{27}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{76}{27}, -\frac{34}{27}, \frac{34}{9}, \frac{32}{27}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{11}{27}a_1 + -\frac{4}{9}a_2 = \left[-\frac{32}{27}, -\frac{47}{27}, -\frac{7}{9}, -\frac{59}{27}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{76}{27}, -\frac{34}{27}, \frac{34}{9}, \frac{32}{27}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 & -4 \\ 4 & -6 & -4 & 6 \\ 6 & -4 & -6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-6 & 4 & 6 & -4 \\ 4 & -x-6 & -4 & 6 \\ 6 & -4 & -x-6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -x-6 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-6$ и $b=4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+8 = 8, \lambda_4 = 2a-2b = 0-8 = -8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i=1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80940	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Николай Колев Георгиев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 4, 1, 2), a_2 = (4, -3, 2, -1) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-1, 4, 4, 1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{19}{30} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{3}{10}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{19}{30}a_1 + -\frac{3}{10}a_2 = \left[\frac{7}{10}, \frac{103}{30}, \frac{1}{30}, \frac{47}{30}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{17}{10}, \frac{17}{30}, \frac{119}{30}, -\frac{17}{30}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{19}{30}a_1 + -\frac{3}{10}a_2 = \left[\frac{7}{10}, \frac{103}{30}, \frac{1}{30}, \frac{47}{30}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{17}{10}, \frac{17}{30}, \frac{119}{30}, -\frac{17}{30}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 & -5 \\ 5 & -3 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & -3 & 5 \\ -5 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-3 & 5 & 3 & -5 \\ 5 & -x-3 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & -x-3 & 5 \\ -5 & 3 & 5 & -x-3 \end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = -3$ и $b = 5$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+10 = 10, \lambda_4 = 2a-2b = 0-10 = -10$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A - \lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80942	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Михаил Руменов Младенов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 4, 2, 1), a_2 = (-1, 2, -4, 3) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (3, 4, -3, -1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{3}{5} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{7}{15}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{3}{5}a_1 + \frac{7}{15}a_2 = \left[\frac{4}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, 2\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, -3\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{3}{5}a_1 + \frac{7}{15}a_2 = \left[\frac{4}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, 2\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{3}, -3\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 2-x & -4 & -2 & 4 \\ -4 & 2-x & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2-x & -4 \\ 4 & -2 & -4 & 2-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 2$ и $b = -4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 4-8 = -4, \lambda_4 = 2a-2b = 4+8 = 12$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80943	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Димитър Емилов Кермедчиев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 4, 1, 3), a_2 = (4, -4, 3, -1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-3, -4, 2, -4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{19}{21}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{19}{21}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \left[-\frac{16}{7}, -\frac{104}{21}, \frac{2}{21}, -\frac{64}{21}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{5}{7}, \frac{20}{21}, \frac{40}{21}, -\frac{20}{21}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{19}{21}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \left[-\frac{16}{7}, -\frac{104}{21}, \frac{2}{21}, -\frac{64}{21}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{5}{7}, \frac{20}{21}, \frac{40}{21}, -\frac{20}{21}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 3\\ -3 & 1 & 3 & -1\\ -1 & 3 & 1 & -3\\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & -1 & 3\\ -3 & 1-x & 3 & -1\\ -1 & 3 & 1-x & -3\\ 3 & -1 & -3 & 1-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 1$ и $b = -3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 2-6 = -4, \lambda_4 = 2a-2b = 2+6 = 8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, -1, -1, 1] \\ e_4 &= [1, 1, -1, -1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80948	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Звездалина Димитрова Димитрова**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 4, 2, 1), a_2 = (-1, 2, -4, 1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (1, 3, -4, -1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{2}{11}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{10}{11}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{2}{11}a_1 + \frac{10}{11}a_2 = \left[-\frac{8}{11}, \frac{28}{11}, -\frac{36}{11}, \frac{12}{11}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{19}{11}, \frac{5}{11}, -\frac{8}{11}, -\frac{23}{11}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{2}{11}a_1 + \frac{10}{11}a_2 = \left[-\frac{8}{11}, \frac{28}{11}, -\frac{36}{11}, \frac{12}{11}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{19}{11}, \frac{5}{11}, -\frac{8}{11}, -\frac{23}{11}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5-x & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 5-x & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 5$ и $b = -3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 10-6 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 10+6 = 16$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80949	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Валерия Младенова Тодорова**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 1, 2, 3), a_2 = (1, -2, 3, -2) \ \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-3, -1, -3, 1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{5}{9} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{5}{9}a_1 + -\frac{2}{3}a_2 = \left[-\frac{16}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{28}{9}, -\frac{1}{3}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{11}{9}, -\frac{16}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{3}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{5}{9}a_1 + -\frac{2}{3}a_2 = \left[-\frac{16}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{28}{9}, -\frac{1}{3}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{11}{9}, -\frac{16}{9}, \frac{1}{9}, \frac{4}{3}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 4-x & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 4-x & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 4-x & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 4-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 4$ и $b = -2$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 8-4 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 8+4 = 12$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80950	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Георги Валериев Павлов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 4, 4, 4), a_2 = (4, -4, -4, 4) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (2, -4, 4, -4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{1}{8}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{1}{8}a_1 + -\frac{1}{8}a_2 = [-1, 0, 0, -1]$ и $h = v - v_0 = [3, -4, 4, -3]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{1}{8}a_1 + -\frac{1}{8}a_2 = [-1, 0, 0, -1]$ **и** $h = v - v_0 = [3, -4, 4, -3]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3-x & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3-x & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 3$ и $b = -1$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 6-2 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 6+2 = 8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,\ $ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, -1, -1, 1] \\ e_4 &= [1, 1, -1, -1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80951	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Ивайло Валериев Хартарски**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 4, 3, 2), a_2 = (-2, 3, -4, 1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4, -3, -3, 4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{3}{10}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{1}{30}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = -\frac{3}{10}a_1 + -\frac{1}{30}a_2 = \left[-\frac{7}{30}, -\frac{13}{10}, -\frac{23}{30}, -\frac{19}{30}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{127}{30}, -\frac{17}{10}, -\frac{67}{30}, \frac{139}{30}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{3}{10}a_1 + -\frac{1}{30}a_2 = \left[-\frac{7}{30}, -\frac{13}{10}, -\frac{23}{30}, -\frac{19}{30}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{127}{30}, -\frac{17}{10}, -\frac{67}{30}, \frac{139}{30}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
6 & -4 & -6 & 4\\
-4 & 6 & 4 & -6\\
-6 & 4 & 6 & -4\\
4 & -6 & -4 & 6
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
6-x & -4 & -6 & 4\\
-4 & 6-x & 4 & -6\\
-6 & 4 & 6-x & -4\\
4 & -6 & -4 & 6-x
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 6$ и $b = -4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2 - 4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 12-8 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 12+8 = 20$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, -1, -1, 1] \\ e_4 &= [1, 1, -1, -1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80956	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Йордан Драгомиров Михайлов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 4, 1, 4), a_2 = (1, -4, -1, 4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (1, -4, 4, 4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{5}{34} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{29}{34}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{5}{34}a_1 + \frac{29}{34}a_2 = \left[1, -\frac{48}{17}, -\frac{12}{17}, 4\right]$ и $h = v - v_0 = \left[0, -\frac{20}{17}, \frac{80}{17}, 0\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{5}{34}a_1 + \frac{29}{34}a_2 = \left[1, -\frac{48}{17}, -\frac{12}{17}, 4\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[0, -\frac{20}{17}, \frac{80}{17}, 0\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 2-x & -4 & -2 & 4 \\ -4 & 2-x & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2-x & -4 \\ 4 & -2 & -4 & 2-x \end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 2$ и $b = -4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 4-8 = -4, \lambda_4 = 2a-2b = 4+8 = 12$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80957	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Гален Пламенов Георгиев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 4, 2, 1), a_2 = (-1, 2, -4, 3) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (3, -1, 3, 3)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} :$ $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{7}{15} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{4}{15}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{7}{15}a_1 + -\frac{4}{15}a_2 = \left[\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 2, -\frac{1}{3}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}, 1, \frac{10}{3}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{7}{15}a_1 + -\frac{4}{15}a_2 = \left[\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, 2, -\frac{1}{3}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{4}{3}, -\frac{7}{3}, 1, \frac{10}{3}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1-x & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1-x & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 1$ и $b = -3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2 - 4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 2-6 = -4, \lambda_4 = 2a-2b = 2+6 = 8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80958	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Бетина Емилова Иванова**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 4, 2, 2), a_2 = (4, -1, 2, -2) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-3, 3, -3, -3)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{3}{25} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{3}{5}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = -\frac{3}{25}a_1 + -\frac{3}{5}a_2 = \left[-\frac{63}{25}, \frac{3}{25}, -\frac{36}{25}, \frac{24}{25}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{12}{25}, \frac{72}{25}, -\frac{39}{25}, -\frac{99}{25}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{3}{25}a_1 + -\frac{3}{5}a_2 = \left[-\frac{63}{25}, \frac{3}{25}, -\frac{36}{25}, \frac{24}{25}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{12}{25}, \frac{72}{25}, -\frac{39}{25}, -\frac{99}{25}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
-6 & 4 & 6 & -4 \\
4 & -6 & -4 & 6 \\
6 & -4 & -6 & 4 \\
-4 & 6 & 4 & -6
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
-x-6 & 4 & 6 & -4 \\
4 & -x-6 & -4 & 6 \\
6 & -4 & -x-6 & 4 \\
-4 & 6 & 4 & -x-6
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-6$ и $b=4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+8 = 8, \lambda_4 = 2a-2b = 0-8 = -8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80964	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Пламен Живков Начев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 2, 1, 3), a_2 = (2, -2, 3, -1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (3, -2, 3, -2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{1}{18}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{7}{6}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{1}{18}a_1 + \frac{7}{6}a_2 = \left[\frac{20}{9}, -\frac{22}{9}, \frac{31}{9}, -\frac{4}{3}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{2}{3}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{1}{18}a_1 + \frac{7}{6}a_2 = \left[\frac{20}{9}, -\frac{22}{9}, \frac{31}{9}, -\frac{4}{3}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{7}{9}, \frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{2}{3}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3-x & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3-x & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 3$ и $b = -1$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 6-2 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 6+2 = 8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80965	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Кристин Илиева Александрова**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 1, 3, 4), a_2 = (3, -4, -4, 1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (2, -1, -4, 2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{1}{14} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{1}{14} a_1 + \frac{2}{3} a_2 = \left[\frac{16}{7}, -\frac{109}{42}, -\frac{103}{42}, \frac{20}{21}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{2}{7}, \frac{67}{42}, -\frac{65}{42}, \frac{22}{21}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{1}{14} a_1 + \frac{2}{3} a_2 = \left[\frac{16}{7}, -\frac{109}{42}, -\frac{103}{42}, \frac{20}{21}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{2}{7}, \frac{67}{42}, -\frac{65}{42}, \frac{22}{21}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & -4 \\ 4 & -6 & -4 & 6 \end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 6-x & -4 & -6 & 4 \\ -4 & 6-x & 4 & -6 \\ -6 & 4 & 6-x & -4 \\ 4 & -6 & -4 & 6-x \end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 6$ и $b = -4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2 - 4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 12-8 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 12+8 = 20$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,\ $ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, -1, -1, 1] \\ e_4 &= [1, 1, -1, -1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80966	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Николай Георгиев Ватев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 4, 3, 2), a_2 = (-2, 3, -4, 1) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-4, 4, 3, -2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{17}{30}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{17}{30}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \left[\frac{1}{6}, \frac{43}{15}, \frac{9}{10}, \frac{4}{3}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{25}{6}, \frac{17}{15}, \frac{21}{10}, -\frac{10}{3}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{17}{30}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \left[\frac{1}{6}, \frac{43}{15}, \frac{9}{10}, \frac{4}{3}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{25}{6}, \frac{17}{15}, \frac{21}{10}, -\frac{10}{3}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -x-1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -x-1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -x-1 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-1$ и $b=3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+6 = 6, \lambda_4 = 2a-2b = 0-6 = -6$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80967	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Никола Ясенов Божинов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 4, 4, 3), a_2 = (4, -3, 3, -4) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-4, -2, 4, -2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{1}{5} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = -\frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \left[\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{21}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{21}{5}, -\frac{3}{5}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{1}{5}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \left[\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{7}{5}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{21}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{21}{5}, -\frac{3}{5}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
-2 & 4 & 2 & -4 \\
4 & -2 & -4 & 2 \\
2 & -4 & -2 & 4 \\
-4 & 2 & 4 & -2
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
-x-2 & 4 & 2 & -4 \\
4 & -x-2 & -4 & 2 \\
2 & -4 & -x-2 & 4 \\
-4 & 2 & 4 & -x-2
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = -2$ и $b = 4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+8 = 8, \lambda_4 = 2a-2b = 0-8 = -8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker \varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im} \varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im} \varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80972	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Кристиян Миленов Митов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1,4,4,1), a_2 = (-1,4,-4,1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (2,1,3,2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{10}{17}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{4}{17}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{10}{17}a_1 + -\frac{4}{17}a_2 = \left[\frac{14}{17}, \frac{24}{17}, \frac{56}{17}, \frac{6}{17}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{20}{17}, -\frac{7}{17}, -\frac{5}{17}, \frac{28}{17}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{10}{17}a_1 + -\frac{4}{17}a_2 = \left[\frac{14}{17}, \frac{24}{17}, \frac{56}{17}, \frac{6}{17}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{20}{17}, -\frac{7}{17}, -\frac{5}{17}, \frac{28}{17}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 & -4 \\ 4 & -6 & -4 & 6 \\ 6 & -4 & -6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-6 & 4 & 6 & -4 \\ 4 & -x-6 & -4 & 6 \\ 6 & -4 & -x-6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -x-6 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = -6$ и $b = 4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+8 = 8, \lambda_4 = 2a-2b = 0-8 = -8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80973	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Павел Василев Василев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 3, 1, 3), a_2 = (3, -3, 3, -1) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4, -2, -1, -1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{1}{14}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{4}{7}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{1}{14}a_1 + \frac{4}{7}a_2 = \left[\frac{27}{14}, -\frac{3}{2}, \frac{25}{14}, -\frac{5}{14}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{29}{14}, -\frac{1}{2}, -\frac{39}{14}, -\frac{9}{14}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{1}{14}a_1 + \frac{4}{7}a_2 = \left[\frac{27}{14}, -\frac{3}{2}, \frac{25}{14}, -\frac{5}{14}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{29}{14}, -\frac{1}{2}, -\frac{39}{14}, -\frac{9}{14}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -x-3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -x-3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -x-3 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-3$ и $b=1$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+2 = 2, \lambda_4 = 2a-2b = 0-2 = -2$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80974	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Ива Пламенова Григорова**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 2, 4, 4), a_2 = (4, -4, -4, 2) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (3, 3, 4, -1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{15}{26}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{9}{26}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{15}{26}a_1 + -\frac{9}{26}a_2 = \left[\frac{12}{13}, \frac{33}{13}, \frac{48}{13}, \frac{21}{13}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{27}{13}, \frac{6}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{34}{13}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{15}{26}a_1 + -\frac{9}{26}a_2 = \left[\frac{12}{13}, \frac{33}{13}, \frac{48}{13}, \frac{21}{13}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{27}{13}, \frac{6}{13}, \frac{4}{13}, -\frac{34}{13}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -x-4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -x-4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -x-4 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-4$ и $b=2$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x)=\begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x)=x^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x)=x^2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2\begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3=2a+2b=0+4=4, \lambda_4=2a-2b=0-4=-4$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E)=0,$ за $i=1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80975	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Елеонора Красимирова Димова**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1,1,4,2), a_2 = (-2,4,-1,1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4,-2,1,2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{5}{11} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{15}{22}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{5}{11} a_1 + -\frac{15}{22} a_2 = \left[\frac{20}{11}, -\frac{25}{11}, \frac{5}{2}, \frac{5}{22}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{24}{11}, \frac{3}{11}, -\frac{3}{2}, \frac{39}{22}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{5}{11} a_1 + -\frac{15}{22} a_2 = \left[\frac{20}{11}, -\frac{25}{11}, \frac{5}{2}, \frac{5}{22}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{24}{11}, \frac{3}{11}, -\frac{3}{2}, \frac{39}{22}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix} -5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5 \\ 5 & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -x-5 & -3 & 5 \\ 5 & -3 & -x-5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -x-5 \end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-5$ и $b=3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+6 = 6, \lambda_4 = 2a-2b = 0-6 = -6$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80980	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Кристиян Руменов Пейчев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 1, 2, 1), a_2 = (2, -1, -2, 1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-3, 3, -4, -1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{6}{5} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{6}{5}a_1 + -\frac{1}{5}a_2 = \left[-\frac{14}{5}, -1, -2, -\frac{7}{5}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{1}{5}, 4, -2, \frac{2}{5}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{6}{5}a_1 + -\frac{1}{5}a_2 = \left[-\frac{14}{5}, -1, -2, -\frac{7}{5}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{1}{5}, 4, -2, \frac{2}{5}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -x-1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -x-1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -x-1 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-1$ и $b=3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+6 = 6, \lambda_4 = 2a-2b = 0-6 = -6$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80981	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Теодор Райчов Кирилов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 4, 2, 1), a_2 = (-1, 2, -4, 3) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-3, -4, -3, 1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -1\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = -1a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \left[-\frac{10}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{10}{3}, 0\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right]$.

Отговор: $v_0 = -1a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \left[-\frac{10}{3}, -\frac{10}{3}, -\frac{10}{3}, 0\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
-2 & 4 & 2 & -4\\
4 & -2 & -4 & 2\\
2 & -4 & -2 & 4\\
-4 & 2 & 4 & -2
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
-x-2 & 4 & 2 & -4\\
4 & -x-2 & -4 & 2\\
2 & -4 & -x-2 & 4\\
-4 & 2 & 4 & -x-2
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-2$ и $b=4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+8 = 8, \lambda_4 = 2a-2b = 0-8 = -8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker \varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im} \varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im} \varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80983	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Цветелина Николаева Костадинова**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 4, 3, 1), a_2 = (3, -1, -3, 4) \ \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4, -2, -3, -2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{1}{5}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{3}{7}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{1}{5}a_1 + \frac{3}{7}a_2 = \left[\frac{24}{35}, -\frac{43}{35}, -\frac{66}{35}, \frac{53}{35}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{116}{35}, -\frac{27}{35}, -\frac{39}{35}, -\frac{123}{35}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{1}{5}a_1 + \frac{3}{7}a_2 = \left[\frac{24}{35}, -\frac{43}{35}, -\frac{66}{35}, \frac{53}{35}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{116}{35}, -\frac{27}{35}, -\frac{39}{35}, -\frac{123}{35}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 & 5 \\ -5 & 3 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \\ 5 & -3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & -5 & -3 & 5 \\ -5 & 3-x & 5 & -3 \\ -3 & 5 & 3-x & -5 \\ 5 & -3 & -5 & 3-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 3$ и $b = -5$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a + 2b = 6 - 10 = -4, \lambda_4 = 2a - 2b = 6 + 10 = 16$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A - \lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80988	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Константин Георгиев Узунов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2,3,4,3), a_2 = (3,-2,3,-4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-4,-2,-4,-1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{33}{38} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_{)} \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{8}{19}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{33}{38}a_1 + -\frac{8}{19}a_2 = \left[-3, -\frac{67}{38}, -\frac{90}{19}, -\frac{35}{38}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-1, -\frac{9}{38}, \frac{14}{19}, -\frac{3}{38}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{33}{38}a_1 + -\frac{8}{19}a_2 = \left[-3, -\frac{67}{38}, -\frac{90}{19}, -\frac{35}{38}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-1, -\frac{9}{38}, \frac{14}{19}, -\frac{3}{38}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -x-4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -x-4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -x-4 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-4$ и $b=2$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+4 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 0-4 = -4$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i=1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80989	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Любомир Пламенов Иванов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 1, 1, 4), a_2 = (1, -4, -4, 1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (3, 3, 3, -4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{1}{17} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{25}{34}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{1}{17}a_1 + -\frac{25}{34}a_2 = \left[-\frac{1}{2}, 3, 3, -\frac{1}{2}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{7}{2}, 0, 0, -\frac{7}{2}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{1}{17}a_1 + -\frac{25}{34}a_2 = \left[-\frac{1}{2}, 3, 3, -\frac{1}{2}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{7}{2}, 0, 0, -\frac{7}{2}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix} -5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5 \\ 5 & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -x-5 & -3 & 5 \\ 5 & -3 & -x-5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -x-5 \end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-5$ и $b=3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+6 = 6, \lambda_4 = 2a-2b = 0-6 = -6$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80990	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Стефан Илчев Илев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2,1,3,2), a_2 = (-2,3,-1,2) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (1,-3,1,1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)$$

$$\Leftrightarrow (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{2}{9}$$

$$0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)$$

$$\Leftrightarrow (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{5}{9}$$

Оттук $v_0 = \frac{2}{9}a_1 + -\frac{5}{9}a_2 = \left[\frac{14}{9}, -\frac{13}{9}, \frac{11}{9}, -\frac{2}{3}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{5}{9}, -\frac{14}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{5}{3}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{2}{9}a_1 + -\frac{5}{9}a_2 = \left[\frac{14}{9}, -\frac{13}{9}, \frac{11}{9}, -\frac{2}{3}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{5}{9}, -\frac{14}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{5}{3}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5-x & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 5-x & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 5$ и $b = -3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 10-6 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 10+6 = 16$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80991	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Атанас Валериев Даков**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 4, 4, 3), a_2 = (4, -3, 3, -4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4, -1, 4, 1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{27}{50} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{27}{50}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{27}{50}a_1 + \frac{27}{50}a_2 = \left[\frac{189}{50}, \frac{27}{50}, \frac{189}{50}, -\frac{27}{50}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{11}{50}, -\frac{77}{50}, \frac{11}{50}, \frac{77}{50}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{27}{50}a_1 + \frac{27}{50}a_2 = \left[\frac{189}{50}, \frac{27}{50}, \frac{189}{50}, -\frac{27}{50}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{11}{50}, -\frac{77}{50}, \frac{11}{50}, \frac{77}{50}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 4-x & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 4-x & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 4-x & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 4-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 4$ и $b = -2$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 8-4 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 8+4 = 12$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80996	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Александър Методиев Александров**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 2, 1, 2), a_2 = (-2, 1, -2, 4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-3, -3, -4, -4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{6}{5} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{1}{5}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = -\frac{6}{5}a_1 + -\frac{1}{5}a_2 = \left[-\frac{22}{5}, -\frac{13}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{16}{5}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{7}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{16}{5}, -\frac{4}{5}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{6}{5}a_1 + -\frac{1}{5}a_2 = \left[-\frac{22}{5}, -\frac{13}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{16}{5}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{7}{5}, -\frac{2}{5}, -\frac{16}{5}, -\frac{4}{5}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
-3 & 5 & 3 & -5 \\
5 & -3 & -5 & 3 \\
3 & -5 & -3 & 5 \\
-5 & 3 & 5 & -3
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
-x-3 & 5 & 3 & -5 \\
5 & -x-3 & -5 & 3 \\
3 & -5 & -x-3 & 5 \\
-5 & 3 & 5 & -x-3
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-3$ и $b=5$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+10 = 10, \lambda_4 = 2a-2b = 0-10 = -10$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E)=0,$ за $i=1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80997	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Николай Здравков Бързанов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 4, 2, 3), a_2 = (4, -1, 3, -2) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-4, 4, 3, -4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{1}{5} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{1}{5}a_1 + -\frac{1}{10}a_2 = \left[-\frac{1}{5}, \frac{9}{10}, \frac{1}{10}, \frac{4}{5}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{19}{5}, \frac{31}{10}, \frac{29}{10}, -\frac{24}{5}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{1}{5}a_1 + -\frac{1}{10}a_2 = \left[-\frac{1}{5}, \frac{9}{10}, \frac{1}{10}, \frac{4}{5}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{19}{5}, \frac{31}{10}, \frac{29}{10}, -\frac{24}{5}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 & 5 \\ -5 & 3 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \\ 5 & -3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & -5 & -3 & 5 \\ -5 & 3-x & 5 & -3 \\ -3 & 5 & 3-x & -5 \\ 5 & -3 & -5 & 3-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=3$ и $b=-5$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 6-10 = -4, \lambda_4 = 2a-2b = 6+10 = 16$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E)=0,$ за $i=1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80998	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Кристиан Мирославов Митов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 4, 2, 1), a_2 = (2, -1, -2, 4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4, 2, 4, 1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = 1 \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{2}{25}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = 1a_1 + \frac{2}{25}a_2 = \left[\frac{54}{25}, \frac{98}{25}, \frac{46}{25}, \frac{33}{25}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{46}{25}, -\frac{48}{25}, \frac{54}{25}, -\frac{8}{25}\right]$.

Отговор: $v_0 = 1a_1 + \frac{2}{25}a_2 = \left[\frac{54}{25}, \frac{98}{25}, \frac{46}{25}, \frac{33}{25}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{46}{25}, -\frac{48}{25}, \frac{54}{25}, -\frac{8}{25}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
2 & -4 & -2 & 4 \\
-4 & 2 & 4 & -2 \\
-2 & 4 & 2 & -4 \\
4 & -2 & -4 & 2
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
2-x & -4 & -2 & 4 \\
-4 & 2-x & 4 & -2 \\
-2 & 4 & 2-x & -4 \\
4 & -2 & -4 & 2-x
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 2$ и $b = -4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 4-8 = -4, \lambda_4 = 2a-2b = 4+8 = 12$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0$, за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81000	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Димитър Панайотов Ценков**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 1, 1, 3), a_2 = (1, -1, 3, -1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-2, 4, 1, -4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned} & 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\ \Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{3}{4} \\ & 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\ \Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{3}{4}a_1 + \frac{1}{12}a_2 = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{3}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{4}{3}, \frac{29}{6}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{3}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{3}{4}a_1 + \frac{1}{12}a_2 = \left[-\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}, -\frac{1}{2}, -\frac{7}{3}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{4}{3}, \frac{29}{6}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{3}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 & -4 \\ 4 & -6 & -4 & 6 \\ 6 & -4 & -6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-6 & 4 & 6 & -4 \\ 4 & -x-6 & -4 & 6 \\ 6 & -4 & -x-6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -x-6 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-6$ и $b=4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+8 = 8, \lambda_4 = 2a-2b = 0-8 = -8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81004	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Мария Тихомирова Дулева**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 2, 4, 1), a_2 = (4, -1, -4, 2) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-4, -1, 3, -3)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{9}{37}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{33}{37}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = -\frac{9}{37}a_1 + -\frac{33}{37}a_2 = \left[-\frac{168}{37}, \frac{15}{37}, \frac{96}{37}, -\frac{75}{37}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{20}{37}, -\frac{52}{37}, \frac{15}{37}, -\frac{36}{37}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{9}{37}a_1 + -\frac{33}{37}a_2 = \left[-\frac{168}{37}, \frac{15}{37}, \frac{96}{37}, -\frac{75}{37}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{20}{37}, -\frac{52}{37}, \frac{15}{37}, -\frac{36}{37}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix} 5 & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5 \end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5-x & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 5-x & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5-x \end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=5$ и $b=-3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 10-6 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 10+6 = 16$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\mathrm{Im}\,\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \mathrm{Im}\,\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81005	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Виктория Георгиева Терзиева**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 1, 1, 2), a_2 = (-2, 1, -1, 1) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4, 3, 4, 4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{19}{7} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{5}{7}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{19}{7}a_1 + -\frac{5}{7}a_2 = \left[\frac{29}{7}, 2, \frac{24}{7}, \frac{33}{7}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{1}{7}, 1, \frac{4}{7}, -\frac{5}{7}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{19}{7}a_1 + -\frac{5}{7}a_2 = \left[\frac{29}{7}, 2, \frac{24}{7}, \frac{33}{7}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{1}{7}, 1, \frac{4}{7}, -\frac{5}{7}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
4 & -2 & -4 & 2 \\
-2 & 4 & 2 & -4 \\
-4 & 2 & 4 & -2 \\
2 & -4 & -2 & 4
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
4 - x & -2 & -4 & 2 \\
-2 & 4 - x & 2 & -4 \\
-4 & 2 & 4 - x & -2 \\
2 & -4 & -2 & 4 - x
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 4$ и $b = -2$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 8-4 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 8+4 = 12$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81006	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Ивайло Митков Стоилов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3,1,3,3), a_2 = (1,-3,3,-3) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (2,-3,-3,4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{3}{14}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{5}{14}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{3}{14}a_1 + -\frac{5}{14}a_2 = \left[\frac{2}{7}, \frac{9}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{12}{7}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{12}{7}, -\frac{30}{7}, -\frac{18}{7}, \frac{16}{7}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{3}{14}a_1 + -\frac{5}{14}a_2 = \left[\frac{2}{7}, \frac{9}{7}, -\frac{3}{7}, \frac{12}{7}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{12}{7}, -\frac{30}{7}, -\frac{18}{7}, \frac{16}{7}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3-x & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3-x & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 3$ и $b = -1$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2 - 4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a + 2b = 6 - 2 = 4, \lambda_4 = 2a - 2b = 6 + 2 = 8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A - \lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, -1, -1, 1] \\ e_4 &= [1, 1, -1, -1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81007	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Асен Димитров Вълчев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 4, 4, 4), a_2 = (4, -4, -1, 4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (1, 1, 4, -4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{5}{49} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{20}{49}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{5}{49}a_1 + -\frac{20}{49}a_2 = \left[-\frac{75}{49}, \frac{100}{49}, \frac{40}{49}, -\frac{60}{49}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{124}{49}, -\frac{51}{49}, \frac{156}{49}, -\frac{136}{49}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{5}{49}a_1 + -\frac{20}{49}a_2 = \left[-\frac{75}{49}, \frac{100}{49}, \frac{40}{49}, -\frac{60}{49}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{124}{49}, -\frac{51}{49}, \frac{156}{49}, -\frac{136}{49}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
6 & -4 & -6 & 4 \\
-4 & 6 & 4 & -6 \\
-6 & 4 & 6 & -4 \\
4 & -6 & -4 & 6
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
6-x & -4 & -6 & 4 \\
-4 & 6-x & 4 & -6 \\
-6 & 4 & 6-x & -4 \\
4 & -6 & -4 & 6-x
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=6$ и $b=-4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3=2a+2b=12-8=4, \lambda_4=2a-2b=12+8=20$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E)=0,\ $ за $i=1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi: V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81008	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Диана Антонова Генева**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3,4,4,2), a_2 = (-2,4,-4,3) \ \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-2,3,3,3)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{8}{15}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{13}{45}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{8}{15}a_1 + \frac{13}{45}a_2 = \left[\frac{46}{45}, \frac{148}{45}, \frac{44}{45}, \frac{29}{15}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{136}{45}, -\frac{13}{45}, \frac{91}{45}, \frac{16}{15}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{8}{15}a_1 + \frac{13}{45}a_2 = \left[\frac{46}{45}, \frac{148}{45}, \frac{44}{45}, \frac{29}{15}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{136}{45}, -\frac{13}{45}, \frac{91}{45}, \frac{16}{15}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -x-1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -x-1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -x-1 \end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-1$ и $b=3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+6 = 6, \lambda_4 = 2a-2b = 0-6 = -6$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81013	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Ралица Георгиева Великова**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 3, 1, 1), a_2 = (1, -1, -2, 3) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-4, -4, 4, -4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{4}{3} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{4}{3}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{4}{3}a_1 + -\frac{4}{3}a_2 = \left[-4, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{16}{3}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[0, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{4}{3}a_1 + -\frac{4}{3}a_2 = \left[-4, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{16}{3}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[0, -\frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1-x & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1-x & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 1$ и $b = -3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 2-6 = -4, \lambda_4 = 2a-2b = 2+6 = 8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81014	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Явор Жулиенов Станков**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3,1,2,2), a_2 = (-2,2,-1,3) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-1,1,-3,4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = 0\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{19}{18}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = 0a_1 + \frac{19}{18}a_2 = \left[-\frac{19}{9}, \frac{19}{9}, -\frac{19}{18}, \frac{19}{6}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{10}{9}, -\frac{10}{9}, -\frac{35}{18}, \frac{5}{6}\right]$.

Отговор: $v_0 = 0a_1 + \frac{19}{18}a_2 = \left[-\frac{19}{9}, \frac{19}{9}, -\frac{19}{18}, \frac{19}{6}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{10}{9}, -\frac{10}{9}, -\frac{35}{18}, \frac{5}{6}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 & -4 \\ 4 & -6 & -4 & 6 \\ 6 & -4 & -6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-6 & 4 & 6 & -4 \\ 4 & -x-6 & -4 & 6 \\ 6 & -4 & -x-6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -x-6 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-6$ и $b=4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+8 = 8, \lambda_4 = 2a-2b = 0-8 = -8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81016	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Станислав Веселинов Величков**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 1, 1, 4), a_2 = (1, -4, -2, 1) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-1, 4, 4, 3)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{9}{11}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -1
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{9}{11}a_1 + -1a_2 = \left[\frac{7}{11}, \frac{53}{11}, \frac{31}{11}, \frac{25}{11}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{18}{11}, -\frac{9}{11}, \frac{13}{11}, \frac{8}{11}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{9}{11}a_1 + -1a_2 = \left[\frac{7}{11}, \frac{53}{11}, \frac{31}{11}, \frac{25}{11}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{18}{11}, -\frac{9}{11}, \frac{13}{11}, \frac{8}{11}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -x-4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -x-4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -x-4 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-4$ и $b=2$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+4 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 0-4 = -4$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81017	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Димитър Георгиев Димитров**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 4, 1, 2), a_2 = (-2, 1, -4, 3) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-4, -2, 1, -2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{23}{30} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{2}{15}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{23}{30}a_1 + -\frac{2}{15}a_2 = \left[-\frac{61}{30}, -\frac{16}{5}, -\frac{7}{30}, -\frac{29}{15}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{59}{30}, \frac{6}{5}, \frac{37}{30}, -\frac{1}{15}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{23}{30}a_1 + -\frac{2}{15}a_2 = \left[-\frac{61}{30}, -\frac{16}{5}, -\frac{7}{30}, -\frac{29}{15}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{59}{30}, \frac{6}{5}, \frac{37}{30}, -\frac{1}{15}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5 \\ 5 & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -x-5 & -3 & 5 \\ 5 & -3 & -x-5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -x-5 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-5$ и $b=3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+6 = 6, \lambda_4 = 2a-2b = 0-6 = -6$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81022	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Петър Стефанов Баев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 4, 3, 1), a_2 = (3, -1, -3, 4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (1, -4, -4, -3)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{4}{5}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{4}{5}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \left[-\frac{9}{5}, -\frac{17}{5}, -3, 0\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{14}{5}, -\frac{3}{5}, -1, -3\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{4}{5}a_1 + \frac{1}{5}a_2 = \left[-\frac{9}{5}, -\frac{17}{5}, -3, 0\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{14}{5}, -\frac{3}{5}, -1, -3\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -x-1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -x-1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -x-1 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-1$ и $b=3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+6 = 6, \lambda_4 = 2a-2b = 0-6 = -6$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker \varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im} \varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im} \varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker \varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81023	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Николай Юлиянов Николов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 3, 4, 2), a_2 = (-2, 4, -3, 4) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (3, 4, -1, 3)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{26}{45} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{5}{9}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{26}{45}a_1 + \frac{5}{9}a_2 = \left[\frac{6}{5}, \frac{178}{45}, \frac{29}{45}, \frac{152}{45}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{9}{5}, \frac{2}{45}, -\frac{74}{45}, -\frac{17}{45}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{26}{45}a_1 + \frac{5}{9}a_2 = \left[\frac{6}{5}, \frac{178}{45}, \frac{29}{45}, \frac{152}{45}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{9}{5}, \frac{2}{45}, -\frac{74}{45}, -\frac{17}{45}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-2 & 4 & 2 & -4 \\ 4 & -x-2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & -x-2 & 4 \\ -4 & 2 & 4 & -x-2 \end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-2$ и $b=4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+8 = 8, \lambda_4 = 2a-2b = 0-8 = -8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right], \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81024	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Иван Иванов Минев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 2, 4, 4), a_2 = (2, -2, 4, -4) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (3, -3, -1, 2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{1}{10}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = 0
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{1}{10}a_1 + 0a_2 = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{14}{5}, -\frac{16}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{1}{10}a_1 + 0a_2 = \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{14}{5}, -\frac{16}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
-3 & 5 & 3 & -5\\
5 & -3 & -5 & 3\\
3 & -5 & -3 & 5\\
-5 & 3 & 5 & -3
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
-x-3 & 5 & 3 & -5\\
5 & -x-3 & -5 & 3\\
3 & -5 & -x-3 & 5\\
-5 & 3 & 5 & -x-3
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-3$ и $b=5$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+10 = 10, \lambda_4 = 2a-2b = 0-10 = -10$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E)=0,$ за $i=1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81025	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Валентин Пламенов Димитров**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 1, 4, 1), a_2 = (4, -1, -3, 1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4, -4, 4, -2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{22}{27} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{2}{9}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{22}{27}a_1 + \frac{2}{9}a_2 = \left[\frac{10}{3}, \frac{16}{27}, \frac{70}{27}, \frac{28}{27}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{2}{3}, -\frac{124}{27}, \frac{38}{27}, -\frac{82}{27}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{22}{27}a_1 + \frac{2}{9}a_2 = \left[\frac{10}{3}, \frac{16}{27}, \frac{70}{27}, \frac{28}{27}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{2}{3}, -\frac{124}{27}, \frac{38}{27}, -\frac{82}{27}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 & 5 \\ -5 & 3 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \\ 5 & -3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & -5 & -3 & 5 \\ -5 & 3-x & 5 & -3 \\ -3 & 5 & 3-x & -5 \\ 5 & -3 & -5 & 3-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 3$ и $b = -5$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a + 2b = 6 - 10 = -4, \lambda_4 = 2a - 2b = 6 + 10 = 16$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A - \lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right], \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0$, за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81030	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Радослав Георгиев Георгиев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 1, 1, 3), a_2 = (1, -3, 3, -1) \ \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (3, 1, 1, -2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{1}{4}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = \left[1, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[2, \frac{3}{2}, 0, -\frac{5}{2}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{4}a_2 = \left[1, -\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[2, \frac{3}{2}, 0, -\frac{5}{2}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -x-4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -x-4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -x-4 \end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-4$ и $b=2$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+4 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 0-4 = -4$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81031	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Гюлджан Ибраим Купен**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 1, 3, 1), a_2 = (3, -1, -1, 1) \ \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-2, 4, 4, -1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{13}{12}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{5}{4}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{13}{12}a_1 + -\frac{5}{4}a_2 = \left[-\frac{8}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{2}, -\frac{1}{6}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{13}{12}a_1 + -\frac{5}{4}a_2 = \left[-\frac{8}{3}, \frac{7}{3}, \frac{9}{2}, -\frac{1}{6}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
-5 & 3 & 5 & -3\\
3 & -5 & -3 & 5\\
5 & -3 & -5 & 3\\
-3 & 5 & 3 & -5
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
-x-5 & 3 & 5 & -3\\
3 & -x-5 & -3 & 5\\
5 & -3 & -x-5 & 3\\
-3 & 5 & 3 & -x-5
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-5$ и $b=3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+6 = 6, \lambda_4 = 2a-2b = 0-6 = -6$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81032	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Андрей Петров Русев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 4, 4, 2), a_2 = (-2, 4, -4, 3) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4, 2, 1, 1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} :$ $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{26}{45} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{1}{45}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{26}{45}a_1 + -\frac{1}{45}a_2 = \left[\frac{16}{9}, \frac{20}{9}, \frac{12}{5}, \frac{49}{45}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{20}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{7}{5}, -\frac{4}{45}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{26}{45}a_1 + -\frac{1}{45}a_2 = \left[\frac{16}{9}, \frac{20}{9}, \frac{12}{5}, \frac{49}{45}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{20}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{7}{5}, -\frac{4}{45}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5-x & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 5-x & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 5$ и $b = -3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2 - 4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 10-6 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 10+6 = 16$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81033	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Михаил Лазаров Петрушев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 4, 1, 3), a_2 = (4, -4, 3, -1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-3, 2, -4, 1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{5}{42}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{11}{14}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{5}{42}a_1 + -\frac{11}{14}a_2 = \left[-\frac{76}{21}, \frac{8}{3}, -\frac{52}{21}, \frac{3}{7}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{13}{21}, -\frac{2}{3}, -\frac{32}{21}, \frac{4}{7}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{5}{42}a_1 + -\frac{11}{14}a_2 = \left[-\frac{76}{21}, \frac{8}{3}, -\frac{52}{21}, \frac{3}{7}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{13}{21}, -\frac{2}{3}, -\frac{32}{21}, \frac{4}{7}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 4-x & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 4-x & 2 & -4 \\ -4 & 2 & 4-x & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 4-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 4$ и $b = -2$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 8-4 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 8+4 = 12$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0$, за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81039	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Мария Стефанова Манчева**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 1, 3, 4), a_2 = (1, -3, 4, -3) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-3, 2, -4, -4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -1\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{13}{35}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -1a_1 + -\frac{13}{35}a_2 = \left[-\frac{118}{35}, \frac{4}{35}, -\frac{157}{35}, -\frac{101}{35}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{13}{35}, \frac{66}{35}, \frac{17}{35}, -\frac{39}{35}\right]$.

Отговор: $v_0 = -1a_1 + -\frac{13}{35}a_2 = \left[-\frac{118}{35}, \frac{4}{35}, -\frac{157}{35}, -\frac{101}{35}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{13}{35}, \frac{66}{35}, \frac{17}{35}, -\frac{39}{35}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 & 5 \\ -5 & 3 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \\ 5 & -3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & -5 & -3 & 5 \\ -5 & 3-x & 5 & -3 \\ -3 & 5 & 3-x & -5 \\ 5 & -3 & -5 & 3-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 3$ и $b = -5$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a + 2b = 6 - 10 = -4, \lambda_4 = 2a - 2b = 6 + 10 = 16$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A - \lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right], \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81040	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Пламен Малинов Каращранов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 1, 3, 1), a_2 = (3, -1, -4, 1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (3, 3, -1, 4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{16}{27} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_{)} \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{14}{27}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{16}{27}a_1 + \frac{14}{27}a_2 = \left[\frac{106}{27}, \frac{2}{27}, -\frac{8}{27}, \frac{10}{9}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{25}{27}, \frac{79}{27}, -\frac{19}{27}, \frac{26}{9}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{16}{27}a_1 + \frac{14}{27}a_2 = \left[\frac{106}{27}, \frac{2}{27}, -\frac{8}{27}, \frac{10}{9}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{25}{27}, \frac{79}{27}, -\frac{19}{27}, \frac{26}{9}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 2-x & -4 & -2 & 4 \\ -4 & 2-x & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2-x & -4 \\ 4 & -2 & -4 & 2-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 2$ и $b = -4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 4-8 = -4, \lambda_4 = 2a-2b = 4+8 = 12$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right], \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81041	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Николина Йорданова Ванчева**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 1, 4, 2), a_2 = (-2, 4, -1, 2) \ \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-4, 1, -4, 4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{3}{5}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{24}{25}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{3}{5}a_1 + \frac{24}{25}a_2 = \left[-\frac{78}{25}, \frac{81}{25}, -\frac{84}{25}, \frac{18}{25}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{22}{25}, -\frac{56}{25}, -\frac{16}{25}, \frac{82}{25}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{3}{5}a_1 + \frac{24}{25}a_2 = \left[-\frac{78}{25}, \frac{81}{25}, -\frac{84}{25}, \frac{18}{25}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{22}{25}, -\frac{56}{25}, -\frac{16}{25}, \frac{82}{25}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 3\\ -3 & 1 & 3 & -1\\ -1 & 3 & 1 & -3\\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & -1 & 3\\ -3 & 1-x & 3 & -1\\ -1 & 3 & 1-x & -3\\ 3 & -1 & -3 & 1-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 1$ и $b = -3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 2-6 = -4, \lambda_4 = 2a-2b = 2+6 = 8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81042	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Николай Светлинов Божанов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 1, 2, 4), a_2 = (1, -3, 4, -2) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-4, 2, -1, 1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{4}{15} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{8}{15}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{4}{15}a_1 + -\frac{8}{15}a_2 = \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, 0\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{4}{15}a_1 + -\frac{8}{15}a_2 = \left[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, 0\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & 6 & -4 \\ 4 & -6 & -4 & 6 \\ 6 & -4 & -6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-6 & 4 & 6 & -4 \\ 4 & -x-6 & -4 & 6 \\ 6 & -4 & -x-6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -x-6 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-6$ и $b=4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+8 = 8, \lambda_4 = 2a-2b = 0-8 = -8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i=1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81047	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Димитър Атанасов Лазаров**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 1, 4, 2), a_2 = (-2, 4, -1, 3) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4, -3, 1, 4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{7}{10}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{3}{10}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{7}{10}a_1 + -\frac{3}{10}a_2 = \left[\frac{27}{10}, -\frac{1}{2}, \frac{31}{10}, \frac{1}{2}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{13}{10}, -\frac{5}{2}, -\frac{21}{10}, \frac{7}{2}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{7}{10}a_1 + -\frac{3}{10}a_2 = \left[\frac{27}{10}, -\frac{1}{2}, \frac{31}{10}, \frac{1}{2}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{13}{10}, -\frac{5}{2}, -\frac{21}{10}, \frac{7}{2}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
4 & -2 & -4 & 2\\
-2 & 4 & 2 & -4\\
-4 & 2 & 4 & -2\\
2 & -4 & -2 & 4
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
4-x & -2 & -4 & 2\\
-2 & 4-x & 2 & -4\\
-4 & 2 & 4-x & -2\\
2 & -4 & -2 & 4-x
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 4$ и $b = -2$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 8-4 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 8+4 = 12$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0$, за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81048	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Радослав Боянов Комитов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 4, 1, 4), a_2 = (4, -1, 4, -1) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4, 2, 4, 4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{16}{17} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{13}{17}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{16}{17}a_1 + \frac{13}{17}a_2 = [4, 3, 4, 3]$ и $h = v - v_0 = [0, -1, 0, 1]$.

Отговор: $v_0 = \frac{16}{17}a_1 + \frac{13}{17}a_2 = [4, 3, 4, 3]$ **и** $h = v - v_0 = [0, -1, 0, 1]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3-x & 1 & -3 \\ -3 & 1 & 3-x & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 3$ и $b = -1$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2 - 4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a + 2b = 6 - 2 = 4, \lambda_4 = 2a - 2b = 6 + 2 = 8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A - \lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, -1, -1, 1] \\ e_4 &= [1, 1, -1, -1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81049	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Ваня Янева Гушева**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 1, 1, 4), a_2 = (1, -4, -2, 1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-3, 3, 1, 1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{1}{11}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{8}{11}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{1}{11}a_1 + -\frac{8}{11}a_2 = \left[-\frac{6}{11}, 3, \frac{17}{11}, -\frac{4}{11}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{27}{11}, 0, -\frac{6}{11}, \frac{15}{11}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{1}{11}a_1 + -\frac{8}{11}a_2 = \left[-\frac{6}{11}, 3, \frac{17}{11}, -\frac{4}{11}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{27}{11}, 0, -\frac{6}{11}, \frac{15}{11}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & -4 \\ 4 & -6 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 6-x & -4 & -6 & 4 \\ -4 & 6-x & 4 & -6 \\ -6 & 4 & 6-x & -4 \\ 4 & -6 & -4 & 6-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=6$ и $b=-4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 12-8 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 12+8 = 20$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81050	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Ангел Павлов Ангелов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 1, 2, 2), a_2 = (-2, 2, -1, 4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-1, 3, -4, 4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{1}{25}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{28}{25}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{1}{25}a_1 + \frac{28}{25}a_2 = \left[-\frac{12}{5}, \frac{11}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{22}{5}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{14}{5}, -\frac{2}{5}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{1}{25}a_1 + \frac{28}{25}a_2 = \left[-\frac{12}{5}, \frac{11}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{22}{5}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{7}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{14}{5}, -\frac{2}{5}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -x-1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -x-1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -x-1 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = -1$ и $b = 3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+6 = 6, \lambda_4 = 2a-2b = 0-6 = -6$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\mathrm{Im}\,\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \mathrm{Im}\,\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81053	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Мартин Йорданов Минчев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 4, 1, 2), a_2 = (-2, 1, -4, 1) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (2, -2, 1, 4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{3}{22}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{3}{11}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{3}{22}a_1 + -\frac{3}{11}a_2 = \left[\frac{15}{22}, \frac{3}{11}, \frac{27}{22}, 0\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{29}{22}, -\frac{25}{11}, -\frac{5}{22}, 4\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{3}{22}a_1 + -\frac{3}{11}a_2 = \left[\frac{15}{22}, \frac{3}{11}, \frac{27}{22}, 0\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{29}{22}, -\frac{25}{11}, -\frac{5}{22}, 4\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 & -3 & 5 \\ -5 & 3 & 5 & -3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \\ 5 & -3 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & -5 & -3 & 5 \\ -5 & 3-x & 5 & -3 \\ -3 & 5 & 3-x & -5 \\ 5 & -3 & -5 & 3-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 3$ и $b = -5$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2 - 4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a + 2b = 6 - 10 = -4, \lambda_4 = 2a - 2b = 6 + 10 = 16$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A - \lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81054	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Людмил Добромиров Делчев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 2, 2, 4), a_2 = (2, -2, 4, -2) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (3, 4, 4, 4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{19}{14} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{3}{14}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{19}{14}a_1 + \frac{3}{14}a_2 = \left[\frac{22}{7}, \frac{16}{7}, \frac{25}{7}, 5\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{1}{7}, \frac{12}{7}, \frac{3}{7}, -1\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{19}{14}a_1 + \frac{3}{14}a_2 = \left[\frac{22}{7}, \frac{16}{7}, \frac{25}{7}, 5\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{1}{7}, \frac{12}{7}, \frac{3}{7}, -1\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 2 - x & -4 & -2 & 4 \\ -4 & 2 - x & 4 & -2 \\ -2 & 4 & 2 - x & -4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 - x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 2$ и $b = -4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2 - 4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 4-8 = -4, \lambda_4 = 2a-2b = 4+8 = 12$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81055	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Мила Ангелова Тошева**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 1, 2, 1), a_2 = (2, -1, -3, 1) \ \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-3, 2, -1, -3)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{4}{5} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{8}{15}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{4}{5}a_1 + -\frac{8}{15}a_2 = \left[-\frac{52}{15}, -\frac{4}{15}, 0, -\frac{4}{3}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{7}{15}, \frac{34}{15}, -1, -\frac{5}{3}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{4}{5}a_1 + -\frac{8}{15}a_2 = \left[-\frac{52}{15}, -\frac{4}{15}, 0, -\frac{4}{3}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{7}{15}, \frac{34}{15}, -1, -\frac{5}{3}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1-x & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 1-x & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 1$ и $b = -3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 2-6 = -4, \lambda_4 = 2a-2b = 2+6 = 8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, -1, -1, 1] \\ e_4 &= [1, 1, -1, -1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81056	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Светлин Трифонов Василев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 1, 3, 2), a_2 = (-2, 3, -1, 1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4, -2, 4, 3)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{4}{3}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -1
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{4}{3}a_1 + -1a_2 = \left[\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, 5, \frac{5}{3}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{4}{3}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{4}{3}a_1 + -1a_2 = \left[\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, 5, \frac{5}{3}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -1, \frac{4}{3}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
-6 & 4 & 6 & -4\\
4 & -6 & -4 & 6\\
6 & -4 & -6 & 4\\
-4 & 6 & 4 & -6
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
-x-6 & 4 & 6 & -4\\
4 & -x-6 & -4 & 6\\
6 & -4 & -x-6 & 4\\
-4 & 6 & 4 & -x-6
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-6$ и $b=4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+8 = 8, \lambda_4 = 2a-2b = 0-8 = -8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От горепоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81057	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Стефан Николаев Николов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 1, 4, 3), a_2 = (1, -3, 3, -4) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-4, -4, -1, 4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{8}{35} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{11}{35}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = -\frac{8}{35}a_1 + -\frac{11}{35}a_2 = \left[-1, \frac{5}{7}, -\frac{13}{7}, \frac{4}{7}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-3, -\frac{33}{7}, \frac{6}{7}, \frac{24}{7}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{8}{35}a_1 + -\frac{11}{35}a_2 = \left[-1, \frac{5}{7}, -\frac{13}{7}, \frac{4}{7}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-3, -\frac{33}{7}, \frac{6}{7}, \frac{24}{7}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
-3 & 1 & 3 & -1 \\
1 & -3 & -1 & 3 \\
3 & -1 & -3 & 1 \\
-1 & 3 & 1 & -3
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
-x-3 & 1 & 3 & -1 \\
1 & -x-3 & -1 & 3 \\
3 & -1 & -x-3 & 1 \\
-1 & 3 & 1 & -x-3
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-3$ и $b=1$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3=2a+2b=0+2=2, \lambda_4=2a-2b=0-2=-2$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E)=0,$ за $i=1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0$, за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81058	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Александър Спасов Попов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 4, 2, 1), a_2 = (2, -1, -1, 4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (2, 2, 4, 4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = 1\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{7}{11}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = 1a_1 + \frac{7}{11}a_2 = \left[\frac{25}{11}, \frac{37}{11}, \frac{15}{11}, \frac{39}{11}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{3}{11}, -\frac{15}{11}, \frac{29}{11}, \frac{5}{11}\right]$.

Отговор: $v_0 = 1a_1 + \frac{7}{11}a_2 = \left[\frac{25}{11}, \frac{37}{11}, \frac{15}{11}, \frac{39}{11}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{3}{11}, -\frac{15}{11}, \frac{29}{11}, \frac{5}{11}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -x-4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -x-4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -x-4 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-4$ и $b=2$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+4 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 0-4 = -4$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81063	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Евгени Сотиров Батев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 4, 3, 4), a_2 = (4, -3, 4, -3) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (1, 3, 2, -2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{13}{50} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{9}{50}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{13}{50}a_1 + \frac{9}{50}a_2 = \left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{13}{50}a_1 + \frac{9}{50}a_2 = \left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix} 6 & -4 & -6 & 4 \\ -4 & 6 & 4 & -6 \\ -6 & 4 & 6 & -4 \\ 4 & -6 & -4 & 6 \end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 6-x & -4 & -6 & 4 \\ -4 & 6-x & 4 & -6 \\ -6 & 4 & 6-x & -4 \\ 4 & -6 & -4 & 6-x \end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 6$ и $b = -4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 12-8 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 12+8 = 20$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, -1, -1, 1] \\ e_4 &= [1, 1, -1, -1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\mathrm{Im}\,\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \mathrm{Im}\,\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81064	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Любослав Красимиров Кънев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1,2,4,1), a_2 = (4,-1,-1,2) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4,-1,1,-3)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{3}{22} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{5}{11}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{3}{22}a_1 + \frac{5}{11}a_2 = \left[\frac{43}{22}, -\frac{2}{11}, \frac{1}{11}, \frac{23}{22}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{45}{22}, -\frac{9}{11}, \frac{10}{11}, -\frac{89}{22}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{3}{22}a_1 + \frac{5}{11}a_2 = \left[\frac{43}{22}, -\frac{2}{11}, \frac{1}{11}, \frac{23}{22}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{45}{22}, -\frac{9}{11}, \frac{10}{11}, -\frac{89}{22}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -x-1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & -x-1 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & -x-1 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = -1$ и $b = 3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+6 = 6, \lambda_4 = 2a-2b = 0-6 = -6$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81065	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Стефан Георгиев Петров**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 3, 1, 3), a_2 = (-3, 1, -3, 2) \ \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-2, -3, -2, 4)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{3}{23}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{17}{23}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = -\frac{3}{23}a_1 + \frac{17}{23}a_2 = \left[-\frac{57}{23}, \frac{8}{23}, -\frac{54}{23}, \frac{25}{23}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{11}{23}, -\frac{77}{23}, \frac{8}{23}, \frac{67}{23}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{3}{23}a_1 + \frac{17}{23}a_2 = \left[-\frac{57}{23}, \frac{8}{23}, -\frac{54}{23}, \frac{25}{23}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{11}{23}, -\frac{77}{23}, \frac{8}{23}, \frac{67}{23}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
-2 & 4 & 2 & -4\\
4 & -2 & -4 & 2\\
2 & -4 & -2 & 4\\
-4 & 2 & 4 & -2
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
-x-2 & 4 & 2 & -4\\
4 & -x-2 & -4 & 2\\
2 & -4 & -x-2 & 4\\
-4 & 2 & 4 & -x-2
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = -2$ и $b = 4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2 - 4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+8 = 8, \lambda_4 = 2a-2b = 0-8 = -8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A - \lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81066	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Александра Крумова Цветкова**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3,1,1,4), a_2 = (1,-3,4,-1) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-1,3,-1,-3)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{13}{27} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{11}{27}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = -\frac{13}{27}a_1 + -\frac{11}{27}a_2 = \left[-\frac{50}{27}, \frac{20}{27}, -\frac{19}{9}, -\frac{41}{27}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{23}{27}, \frac{61}{27}, \frac{10}{9}, -\frac{40}{27}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{13}{27}a_1 + -\frac{11}{27}a_2 = \left[-\frac{50}{27}, \frac{20}{27}, -\frac{19}{9}, -\frac{41}{27}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{23}{27}, \frac{61}{27}, \frac{10}{9}, -\frac{40}{27}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
-3 & 5 & 3 & -5 \\
5 & -3 & -5 & 3 \\
3 & -5 & -3 & 5 \\
-5 & 3 & 5 & -3
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
-x-3 & 5 & 3 & -5 \\
5 & -x-3 & -5 & 3 \\
3 & -5 & -x-3 & 5 \\
-5 & 3 & 5 & -x-3
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-3$ и $b=5$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+10 = 10, \lambda_4 = 2a-2b = 0-10 = -10$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E)=0,$ за $i=1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81071	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Явор Венциславов Големанов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 1, 2, 3), a_2 = (-3, 2, -1, 4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (3, 2, -4, 1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{3}{10}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{1}{10}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{3}{10}a_1 + \frac{1}{10}a_2 = \left[\frac{9}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{13}{10}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{21}{10}, \frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{3}{10}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{3}{10}a_1 + \frac{1}{10}a_2 = \left[\frac{9}{10}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{13}{10}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{21}{10}, \frac{3}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{3}{10}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-3 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & -x-3 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -x-3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -x-3 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-3$ и $b=1$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+2 = 2, \lambda_4 = 2a-2b = 0-2 = -2$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81072	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Йордан Руменов Русев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 4, 3, 4), a_2 = (4, -1, 4, -3) \ \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-1, 4, 1, 3)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{5}{7}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{13}{42}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{5}{7}a_1 + -\frac{13}{42}a_2 = \left[-\frac{11}{21}, \frac{19}{6}, \frac{19}{21}, \frac{53}{14}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{10}{21}, \frac{5}{6}, \frac{2}{21}, -\frac{11}{14}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{5}{7}a_1 + -\frac{13}{42}a_2 = \left[-\frac{11}{21}, \frac{19}{6}, \frac{19}{21}, \frac{53}{14}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{10}{21}, \frac{5}{6}, \frac{2}{21}, -\frac{11}{14}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-4 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & -x-4 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -x-4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 & -x-4 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-4$ и $b=2$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3=2a+2b=0+4=4, \lambda_4=2a-2b=0-4=-4$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E)=0,$ за $i=1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81073	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Мартин Илиев Касапов**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 3, 3, 1), a_2 = (3, -1, -2, 3) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-1, -4, 4, -2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{4}{23}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{13}{23}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = -\frac{4}{23}a_1 + -\frac{13}{23}a_2 = \left[-\frac{47}{23}, \frac{1}{23}, \frac{14}{23}, -\frac{43}{23}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{24}{23}, -\frac{93}{23}, \frac{78}{23}, -\frac{3}{23}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{4}{23}a_1 + -\frac{13}{23}a_2 = \left[-\frac{47}{23}, \frac{1}{23}, \frac{14}{23}, -\frac{43}{23}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{24}{23}, -\frac{93}{23}, \frac{78}{23}, -\frac{3}{23}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
-5 & 3 & 5 & -3\\
3 & -5 & -3 & 5\\
5 & -3 & -5 & 3\\
-3 & 5 & 3 & -5
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
-x-5 & 3 & 5 & -3\\
3 & -x-5 & -3 & 5\\
5 & -3 & -x-5 & 3\\
-3 & 5 & 3 & -x-5
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-5$ и $b=3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+6 = 6, \lambda_4 = 2a-2b = 0-6 = -6$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right], \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81074	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Катя Пламенова Христовска**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 1, 2, 2), a_2 = (-2, 2, -1, 4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (2, -1, -2, -3)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{3}{25} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{16}{25}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{3}{25}a_1 + -\frac{16}{25}a_2 = \left[\frac{4}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{14}{5}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{6}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{1}{5}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{3}{25}a_1 + -\frac{16}{25}a_2 = \left[\frac{4}{5}, -\frac{7}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{14}{5}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{6}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{12}{5}, -\frac{1}{5}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 5 - x & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5 - x & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 5 - x & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5 - x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 5$ и $b = -3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2 - 4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 10-6 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 10+6 = 16$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81079	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Димитър Христов Бакърджиев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 2, 3, 1), a_2 = (3, -1, -4, 2) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (4, -1, 4, 2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^{\perp}$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{14}{15} \\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{1}{30}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{14}{15}a_1 + \frac{1}{30}a_2 = \left[\frac{23}{6}, \frac{11}{6}, \frac{8}{3}, 1\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{1}{6}, -\frac{17}{6}, \frac{4}{3}, 1\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{14}{15}a_1 + \frac{1}{30}a_2 = \left[\frac{23}{6}, \frac{11}{6}, \frac{8}{3}, 1\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{1}{6}, -\frac{17}{6}, \frac{4}{3}, 1\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & -2 & 4 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-2 & 4 & 2 & -4 \\ 4 & -x-2 & -4 & 2 \\ 2 & -4 & -x-2 & 4 \\ -4 & 2 & 4 & -x-2 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = -2$ и $b = 4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+8 = 8, \lambda_4 = 2a-2b = 0-8 = -8$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right], \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81080	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Яна Василева Козарова**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 4, 4, 3), a_2 = (-3, 4, -4, 2) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-2, 1, -1, 2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{2}{45}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = \frac{2}{45}a_1 + \frac{2}{5}a_2 = \left[-\frac{10}{9}, \frac{16}{9}, -\frac{64}{45}, \frac{14}{15}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{19}{45}, \frac{16}{15}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{2}{45}a_1 + \frac{2}{5}a_2 = \left[-\frac{10}{9}, \frac{16}{9}, -\frac{64}{45}, \frac{14}{15}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{8}{9}, -\frac{7}{9}, \frac{19}{45}, \frac{16}{15}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 3 & -5 \\ 5 & -3 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & -3 & 5 \\ -5 & 3 & 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-3 & 5 & 3 & -5 \\ 5 & -x-3 & -5 & 3 \\ 3 & -5 & -x-3 & 5 \\ -5 & 3 & 5 & -x-3 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-3$ и $b=5$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+10 = 10, \lambda_4 = 2a-2b = 0-10 = -10$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E)=0,$ за $i=1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}},0,\tfrac{1}{\sqrt{2}},0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81081	**7**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Габриела Иванова Лухова**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (4, 1, 4, 4), a_2 = (1, -4, 4, -4) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-2, 3, 4, -2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
& 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = \frac{3}{49} \\
& 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\
\Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\
\Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{10}{49}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = \frac{3}{49}a_1 + \frac{10}{49}a_2 = \left[\frac{22}{49}, -\frac{37}{49}, \frac{52}{49}, -\frac{4}{7}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{120}{49}, \frac{184}{49}, \frac{144}{49}, -\frac{10}{7}\right]$.

Отговор: $v_0 = \frac{3}{49}a_1 + \frac{10}{49}a_2 = \left[\frac{22}{49}, -\frac{37}{49}, \frac{52}{49}, -\frac{4}{7}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{120}{49}, \frac{184}{49}, \frac{144}{49}, -\frac{10}{7}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
3 & -5 & -3 & 5 \\
-5 & 3 & 5 & -3 \\
-3 & 5 & 3 & -5 \\
5 & -3 & -5 & 3
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
3 - x & -5 & -3 & 5 \\
-5 & 3 - x & 5 & -3 \\
-3 & 5 & 3 - x & -5 \\
5 & -3 & -5 & 3 - x
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 3$ и $b = -5$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2 - 4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a + 2b = 6 - 10 = -4, \lambda_4 = 2a - 2b = 6 + 10 = 16$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A - \lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right], \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned}$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81082	**8**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Мартин Владимиров Петков**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (2, 1, 1, 1), a_2 = (1, -1, -2, 1) \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-2, 4, -1, -2)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$
\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{3}{7}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{6}{7}
\end{aligned}
$$

Оттук $v_0 = -\frac{3}{7}a_1 + -\frac{6}{7}a_2 = \left[-\frac{12}{7}, \frac{3}{7}, \frac{9}{7}, -\frac{9}{7}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[-\frac{2}{7}, \frac{25}{7}, -\frac{16}{7}, -\frac{5}{7}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{3}{7}a_1 + -\frac{6}{7}a_2 = \left[-\frac{12}{7}, \frac{3}{7}, \frac{9}{7}, -\frac{9}{7}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[-\frac{2}{7}, \frac{25}{7}, -\frac{16}{7}, -\frac{5}{7}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$
\begin{pmatrix}
2 & -4 & -2 & 4\\
-4 & 2 & 4 & -2\\
-2 & 4 & 2 & -4\\
4 & -2 & -4 & 2
\end{pmatrix}.
$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$
f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix}
2-x & -4 & -2 & 4\\
-4 & 2-x & 4 & -2\\
-2 & 4 & 2-x & -4\\
4 & -2 & -4 & 2-x
\end{vmatrix}
$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 2$ и $b = -4$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 4-8 = -4, \lambda_4 = 2a-2b = 4+8 = 12$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,1,-1,-1] \\ e_4 &= [1,-1,-1,1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81087	**5**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Лилия Тихомирова Цветкова**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (1, 1, 2, 4), a_2 = (1, -1, 4, -2) \quad \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (1, -1, 1, -1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned}
&0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{1}{11}\\
&0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2)\\
\Leftrightarrow\ &(v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_)\\
\Leftrightarrow\ &\alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = \frac{4}{11}
\end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{1}{11}a_1 + \frac{4}{11}a_2 = \left[\frac{3}{11}, -\frac{5}{11}, \frac{14}{11}, -\frac{12}{11}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{8}{11}, -\frac{6}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{1}{11}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{1}{11}a_1 + \frac{4}{11}a_2 = \left[\frac{3}{11}, -\frac{5}{11}, \frac{14}{11}, -\frac{12}{11}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{8}{11}, -\frac{6}{11}, -\frac{3}{11}, \frac{1}{11}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5 \\ 5 & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -x-5 & -3 & 5 \\ 5 & -3 & -x-5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -x-5 \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a=-5$ и $b=3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2}=0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 0+6 = 6, \lambda_4 = 2a-2b = 0-6 = -6$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i=1,3,4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0,1,0,1] \\ e_2 &= [1,0,1,0] \\ e_3 &= [1,-1,-1,1] \\ e_4 &= [1,1,-1,-1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^{\perp}$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81088	**6**	**II**	**1**	**Компютърни Науки**
Име:	**Даниел Емилов Манчев**				

Трето Контролно по Алгебра I

спец. Компютърни Науки

24.01.14

Задача 1. В евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ е дадена линейната обвивка $U = l(a_1, a_2)$ на векторите $a_1 = (3, 2, 3, 2), a_2 = (3, -2, -3, 2) \ \in \mathbb{R}^4$. Да се намери ортогоналната проекция v_0 на вектора $v = (-1, 4, -2, -1)$ върху U и перпендикулярът h от v към U.

Решение. *(2 точки)* Първо нека забележим, че $(a_1, a_2) = 0$, от където a_1 и a_2 са перпендикулярни. В частност a_1 и a_2 са ортогонален базис на $\mathbb{U}$. Векторът v_0 лежи в $\mathbb{U}$, от където $\Rightarrow \exists\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$: $v_0 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Нека забележим още, че $v - v_0 = h \in \mathbb{U}^\perp$, от където $(v - v_0, a_1) = 0,\ (v - v_0, a_2) = 0$.

$$\begin{aligned} & 0 = (v - v_0, a_1) = (v, a_1) - (v_0, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) - \alpha_2(a_2, a_1) = (v, a_1) - \alpha_1(a_1, a_1) \\ \Leftrightarrow\ & (v, a_1) = \alpha_1(a_1, a_1) \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_1 = \frac{(v, a_1)}{(a_1, a_1)} = -\frac{3}{26} \\ & 0 = (v - v_0, a_2) = (v, a_2) - (v_0, a_2) = (v, a_1) - \alpha_1(a_2, a_1) - \alpha_2(a_2, a_2) = (v, a_2) - \alpha_2(a_2, a_2) \\ \Leftrightarrow\ & (v, a_2) = \alpha_2(a_2, a_) \\ \Leftrightarrow\ & \alpha_2 = \frac{(v, a_2)}{(a_2, a_2)} = -\frac{7}{26} \end{aligned}$$

Оттук $v_0 = -\frac{3}{26}a_1 + -\frac{7}{26}a_2 = \left[-\frac{15}{13}, \frac{4}{13}, \frac{6}{13}, -\frac{10}{13}\right]$ и $h = v - v_0 = \left[\frac{2}{13}, \frac{48}{13}, -\frac{32}{13}, -\frac{3}{13}\right]$.

Отговор: $v_0 = -\frac{3}{26}a_1 + -\frac{7}{26}a_2 = \left[-\frac{15}{13}, \frac{4}{13}, \frac{6}{13}, -\frac{10}{13}\right]$ **и** $h = v - v_0 = \left[\frac{2}{13}, \frac{48}{13}, -\frac{32}{13}, -\frac{3}{13}\right]$**.**

Задача 2. Спрямо ортонормиран базис на евклидовото пространство $\mathbb{R}^4$ линейният оператор $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ има матрица:

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5 & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Намерете ортонормиран базис на $\mathbb{R}^4$, в който φ има диагонална матрица D, както и тази матрица D.

Решение. *(2 точки)* Първо трябва да намерим характеристчния полином на матрицата A на оператора φ.

$$f_A(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 & -5 & 3 \\ -3 & 5-x & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 5-x & -3 \\ 3 & -5 & -3 & 5-x \end{vmatrix}$$

Забелязваме, че детерминантата ни е еквивалентна на дадената:

$$\begin{vmatrix} a-x & b & -a & -b \\ b & a-x & -b & -a \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix},$$

за $a = 5$ и $b = -3$. Прибавяме четвърти ред към втори и трети към първи за да получим

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 0 & -x & 0 \\ 0 & -x & 0 & -x \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & a-x & b \\ -b & -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Изваждаме първи стълб от трети и получаваме:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -a & -b & 2a-x & b \\ -b & -a & 2b & a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -b & a-x & b \\ -a & b & a-x \end{vmatrix}.$$

Накрая изваждаме отново първи стълб от трети, което води до:

$$f_A(x) = x^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b & a-x & 2b \\ -a & b & 2a-x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & a-x \end{vmatrix} = x^2[(x-2a)^2-4b^2] = x^2(x-(2a+2b))(x-(2a-2b)).$$

Оттук получаваме, че $\lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 2a+2b = 10-6 = 4, \lambda_4 = 2a-2b = 10+6 = 16$. Последователно пресмятаме съответните собствени вектори от системите хомогенни линейни уравнения $(A-\lambda_i E) = 0,$ за $i = 1, 3, 4$. Така получаваме векторите

$$\begin{aligned} e_1 &= [0, 1, 0, 1] \\ e_2 &= [1, 0, 1, 0] \\ e_3 &= [1, 1, -1, -1] \\ e_4 &= [1, -1, -1, 1] \end{aligned}$$

които са собствени вектори на оператора φ. След нормиране на векторите получаваме ортонормиран базис:

$$\begin{aligned} e_1 &= \left[0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right] \\ e_2 &= \left[\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right] \\ e_3 &= \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right] \\ e_4 &= \left[\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] \end{aligned},$$

в който φ има диагонална матрица

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{vmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi : V \to V$ е симетричен оператор в крайномерно евклидово пространство V. Да се докаже, че ядрото $\ker \varphi = (\mathrm{Im}\varphi)^\perp$ съвпада с ортогоналното допълнение на образа на φ.

Решение. *(1 точка)* По дефиниция $\ker\varphi = \{v \in V | \varphi(v) = \vec{o}\}$, $\operatorname{Im}\varphi = \{w \in V | \exists u \in V : \varphi(u) = w\}$. Нека вземем произволен вектор v от V и разгледаме скаларното му произведение с произволен вектор w от V. От гореспоменатите дефиниции и дефиницията на симетричен оператор получаваме следните равенства:

$$(v, w) = (v, \varphi(u)) = (\varphi(v), u) = (\vec{o}, u) = 0$$

Следователно за произволен вектор v от V получихме, че $(v, w) = 0,$ за всеки $w \in \operatorname{Im}\varphi$, което от своя страна е дефиницията за ортогонално допълнение. Така окончателно доказахме, че $\ker\varphi = (\operatorname{Im}\varphi)^{\perp}$.