вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80922	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Сияна Ясенова Плачкова**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} 2x_1 & -9x_2 & +2x_3 & +8x_4 & -5x_5 & =0 \\ 9x_1 & +8x_2 & +2x_3 & +4x_4 & +2x_5 & =0 \\ 9x_1 & -2x_2 & +2x_3 & +8x_4 & +2x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (2,9,2,8,0) \\ b = & (2,2,8,9,0) \\ c = & (2,2,0,9,8) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{7}{2}, 0, -1\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -8, \frac{5}{2}, -1\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & 9 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -8 & \frac{5}{2} & -1 \end{vmatrix} = 7004$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 2 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 2 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 9 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 2 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & 0 & 9 \\ -6 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -8 & 9 & -7 \\ 7 & -6 & 2 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 7 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 0 & -2 & 9 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -14 & 17 & -16 \\ 7 & -13 & 8 & -3 & -1 \\ -1 & -1 & 9 & -13 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, 0, 0, 1),\ a_2 = (-1, 1, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 10 & -4 \\ -2 & 4 & -1 \\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-6 & 10 & -4 \\ -2 & 4-x & -1 \\ 4 & -6 & 4-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -8 & 10 & -4 \\ -2 & 2 & -1 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, -2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80930	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Артем Александрович Никифоров**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} 2x_1 & -9x_2 & -3x_3 & +8x_4 & -5x_5 & =0 \\ 8x_1 & +9x_2 & -3x_3 & +5x_4 & +3x_5 & =0 \\ 8x_1 & -3x_2 & +6x_3 & -9x_4 & +3x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (0,9,3,8,0) \\ b = & (8,3,0,0,9) \\ c = & (9,0,8,0,3) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{92}{15}, -\frac{138}{35}, -\frac{78}{35}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{16}{5}, \frac{6}{5}, -\frac{9}{5}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 0 & 9 & 3 & 8 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 8 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -\frac{92}{15} & -\frac{138}{35} & -\frac{78}{35} \\ 0 & 1 & \frac{16}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{9}{5} \end{vmatrix} = \frac{26654}{7}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 3 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 3 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 3 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 3 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 0 & 9 \\ -5 & -3 & 8 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -8 & 9 & -6 \\ 9 & -5 & 0 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 9 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -3 & 0 & 9 \\ -5 & 2 & 11 & -8 & 0 \\ -3 & 11 & -16 & 17 & -15 \\ 9 & -14 & 5 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & 12 & -14 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 15 & 7 & 7 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 12 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 15 & 7 & 7 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 12 & 6 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{2}{3}, 0, 0, 1),\ a_2 = (0, -1, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-2 & 2 & 0 \\ -1 & 2-x & 0 \\ 2 & -2 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([0, 0, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80940	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Николай Колев Георгиев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 6x_1 & -9x_2 & -4x_3 & +8x_4 & +6x_5 & =0 \\ 4x_1 & -8x_2 & +2x_3 & -x_4 & +9x_5 & =0 \\ -9x_1 & -4x_2 & -8x_3 & -4x_4 & -4x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (0,9,4,8,0) \\ b = & (9,0,0,8,4) \\ c = & (4,8,9,0,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{215}{384}, -\frac{35}{48}, -\frac{77}{192}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{23}{24}, -\frac{1}{6}, \frac{13}{12}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 0 & 9 & 4 & 8 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 8 & 4 \\ 4 & 8 & 9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{215}{384} & -\frac{35}{48} & -\frac{77}{192} \\ 0 & 1 & -\frac{23}{24} & -\frac{1}{6} & \frac{13}{12} \end{vmatrix} = \frac{316627}{128}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 0 \\ 9 & 4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 0 \\ 9 & 4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 0 \\ 9 & 4 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & 0 & 9 \\ -4 & -4 & 8 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -8 & 9 & -5 \\ 9 & -4 & 0 & -1 & -4 \\ -1 & -4 & 9 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 & 0 & 9 \\ -4 & 0 & 12 & -8 & 0 \\ -4 & 12 & -16 & 17 & -14 \\ 9 & -13 & 4 & -1 & -3 \\ -1 & -3 & 13 & -13 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 8 & 8 & 9 & 12 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 8 & 8 & 9 & 12 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5}, 1),\ a_2 = (-1, 1, 0, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & -6 & 1 \\ 0 & -x-2 & 2 \\ 1 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80942	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Михаил Руменов Младенов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 2x_1 & -9x_2 & -4x_3 & +8x_4 & -5x_5 & =0 \\ 4x_1 & +2x_2 & +5x_3 & +9x_4 & -8x_5 & =0 \\ -5x_1 & -9x_2 & -4x_3 & +2x_4 & -8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (2,9,4,8,0) \\ b = & (8,2,0,4,9) \\ c = & (4,8,9,0,2) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{199}{570}, -\frac{159}{190}, -\frac{188}{285}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{261}{190}, \frac{37}{190}, -\frac{37}{95}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 4 & 9 \\ 4 & 8 & 9 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -\frac{199}{570} & -\frac{159}{190} & -\frac{188}{285} \\ 0 & 1 & -\frac{261}{190} & \frac{37}{190} & -\frac{37}{95} \end{vmatrix} = \frac{398709}{190}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 2 \\ 9 & 4 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 2 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 2 \\ 9 & 4 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 2 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 2 \\ 9 & 4 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 2 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 0 & 9 \\ -4 & -2 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -8 & 9 & -5 \\ 7 & -4 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & -4 & 7 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 & -2 & 9 \\ -4 & 2 & 8 & -6 & 0 \\ -2 & 8 & -14 & 17 & -14 \\ 7 & -11 & 6 & -3 & -3 \\ -1 & -3 & 11 & -11 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 10 & 9 & 5 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 10 & 9 & 5 & 12 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{3}{7}, -\frac{6}{7}, 0, 1),\ a_2 = (\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -4 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & -1 & 2 \\ -4 & 2-x & 2 \\ 2 & -3 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, 2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80943	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Димитър Емилов Кермедчиев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 3x_1 & +9x_2 & -4x_3 & +8x_4 & +6x_5 & =0 \\ 9x_1 & +4x_2 & -3x_3 & -8x_4 & -5x_5 & =0 \\ -4x_1 & +5x_2 & -8x_3 & -9x_4 & +3x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (3,9,4,8,0) \\ b = & (0,8,3,9,4) \\ c = & (9,4,8,3,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{941}{446}, -\frac{623}{446}, \frac{1235}{446}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{893}{446}, -\frac{395}{446}, \frac{453}{446}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 3 & 9 & 4 \\ 9 & 4 & 8 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{941}{446} & -\frac{623}{446} & \frac{1235}{446} \\ 0 & 1 & \frac{893}{446} & -\frac{395}{446} & \frac{453}{446} \end{vmatrix} = \frac{192985}{223}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 3 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 3 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 3 \\ 9 & 4 & 3 & 8 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 3 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 3 & 0 & 9 \\ -4 & -1 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -8 & 9 & -5 \\ 6 & -4 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & -4 & 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -1 & -3 & 9 \\ -4 & 3 & 6 & -5 & 0 \\ -1 & 6 & -13 & 17 & -14 \\ 6 & -10 & 7 & -4 & -3 \\ -1 & -3 & 10 & -10 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 12 & 12 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 10 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-2, 1, 0, 0),\ a_2 = (-2, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 5 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 4-x & -4 & 5 \\ 5 & -x-3 & 4 \\ 4 & -2 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 5 & -6 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{3}{2}, 1\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80948	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Звездалина Димитрова Димитрова**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V : \left| \begin{array}{rrrrrl} -8x_1 & -9x_2 & +4x_3 & -8x_4 & -6x_5 & =0 \\ -8x_1 & +4x_2 & +8x_3 & -9x_4 & +2x_5 & =0 \\ 8x_1 & -8x_2 & +6x_3 & +9x_4 & -4x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (8,9,4,8,0) \\ b = & (8,9,8,4,0) \\ c = & (8,4,8,9,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{4}{259}, -\frac{240}{259}, -\frac{4}{37}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{27}{518}, \frac{33}{259}, -\frac{121}{74}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 8 & 9 & 4 & 8 & 0 \\ 8 & 9 & 8 & 4 & 0 \\ 8 & 4 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{4}{259} & -\frac{240}{259} & -\frac{4}{37} \\ 0 & 1 & \frac{27}{518} & \frac{33}{259} & -\frac{121}{74} \end{vmatrix} = \frac{246990}{259}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 8 \\ 9 & 4 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 8 \\ 9 & 4 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 8 \\ 9 & 4 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 & 0 & 9 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -8 & 9 & -5 \\ 1 & -4 & 8 & -1 & -4 \\ -1 & -4 & 1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & -8 & 9 \\ -4 & 8 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -8 & 17 & -14 \\ 1 & -5 & 12 & -9 & -3 \\ -1 & -3 & 5 & -5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, -\frac{1}{3}, 0, 1),\ a_2 = (0, -\frac{2}{3}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & -1 & 3 \\ -2 & -x-1 & 5 \\ 2 & -3 & 5-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 2, 2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80949	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Валерия Младенова Тодорова**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -9x_1 & +9x_2 & +4x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ 3x_1 & -8x_2 & +4x_3 & -9x_4 & +9x_5 & =0 \\ 9x_1 & +8x_2 & -9x_3 & +4x_4 & -6x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (9,9,4,8,0) \\ b = & (9,4,8,0,9) \\ c = & (9,0,4,9,8) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{537}{319}, \frac{54}{319}, -\frac{291}{319}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{314}{319}, -\frac{569}{319}, -\frac{425}{319}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 9 & 9 & 4 & 8 & 0 \\ 9 & 4 & 8 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 4 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & \frac{537}{319} & \frac{54}{319} & -\frac{291}{319} \\ 0 & 1 & \frac{314}{319} & -\frac{569}{319} & -\frac{425}{319} \end{vmatrix} = -\frac{5189}{11}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 9 \\ 9 & 4 & 9 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 9 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 9 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 9 \\ 9 & 4 & 9 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 9 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 9 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 4 & 9 \\ 9 & 4 & 9 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 9 & 4 \\ 4 & 9 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 4 & 9 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 9 & 0 & 9 \\ -4 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -8 & 9 & -5 \\ 0 & -4 & 9 & -1 & -4 \\ -1 & -4 & 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 & -9 & 9 \\ -4 & 9 & -6 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & -7 & 17 & -14 \\ 0 & -4 & 13 & -10 & -3 \\ -1 & -3 & 4 & -4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 10 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & 1 & 1 \\ -3 & 3-x & 1 \\ 4 & -2 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([0, 1, -1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80950	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Георги Валериев Павлов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -3x_1 & -9x_2 & -5x_3 & -8x_4 & -6x_5 & =0 \\ 5x_1 & -9x_2 & -2x_3 & -8x_4 & -6x_5 & =0 \\ 4x_1 & -5x_2 & +9x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (0,9,5,8,0) \\ b = & (0,5,0,8,9) \\ c = & (0,0,8,5,9) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{8}{3}, \frac{391}{168}, -\frac{29}{21}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, 0, \frac{3}{8}, -2\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 0 & 9 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 8 & 5 & 9 \\ 1 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{391}{168} & -\frac{29}{21} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{8} & -2 \end{vmatrix} = -\frac{3027}{8}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 0 \\ 9 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 0 \\ 9 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 0 \\ 9 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 & 0 & 9 \\ -3 & -5 & 8 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -8 & 9 & -4 \\ 9 & -3 & 0 & -1 & -5 \\ -1 & -5 & 9 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -5 & 0 & 9 \\ -3 & -2 & 13 & -8 & 0 \\ -5 & 13 & -16 & 17 & -13 \\ 9 & -12 & 3 & -1 & -4 \\ -1 & -4 & 14 & -12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 5 & 4 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 6 & -10 & 0 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & 2 & 2 \\ -2 & 4-x & 1 \\ 6 & -10 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 6 & -10 & -3 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, 2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80951	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Ивайло Валериев Хартарски**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} x_1 & -9x_2 & -5x_3 & -8x_4 & -3x_5 & =0 \\ -8x_1 & +5x_2 & +5x_3 & +x_4 & -9x_5 & =0 \\ -5x_1 & -9x_2 & -x_3 & -5x_4 & +8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (1,9,5,8,0) \\ b = & (8,0,9,1,5) \\ c = & (0,5,8,1,9) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{1044}{505}, -\frac{613}{505}, \frac{63}{505}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{53}{505}, -\frac{604}{505}, \frac{184}{505}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 5 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 9 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & \frac{1044}{505} & -\frac{613}{505} & \frac{63}{505} \\ 0 & 1 & -\frac{53}{505} & -\frac{604}{505} & \frac{184}{505} \end{vmatrix} = \frac{1233408}{505}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 1 \\ 9 & 5 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 1 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 1 \\ 9 & 5 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 1 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 1 \\ 9 & 5 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 1 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 & 0 & 9 \\ -3 & -4 & 7 & 0 & 0 \\ -4 & 7 & -8 & 9 & -4 \\ 8 & -3 & 1 & -1 & -5 \\ -1 & -5 & 8 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -4 & -1 & 9 \\ -3 & -1 & 11 & -7 & 0 \\ -4 & 11 & -15 & 17 & -13 \\ 8 & -11 & 4 & -2 & -4 \\ -1 & -4 & 13 & -11 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1),\ a_2 = (-1, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 6 \\ -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & -2 & 6 \\ -2 & 1-x & 3 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, 1, \frac{2}{3}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80956	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Йордан Драгомиров Михайлов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -6x_1 & +9x_2 & -5x_3 & +8x_4 & -2x_5 & =0 \\ 5x_1 & +9x_2 & -6x_3 & +4x_4 & -8x_5 & =0 \\ 9x_1 & -8x_2 & +3x_3 & +5x_4 & -6x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (6,9,5,8,0) \\ b = & (9,5,6,0,8) \\ c = & (5,0,6,9,8) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{205}{238}, \frac{72}{119}, \frac{107}{68}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{467}{238}, \frac{2}{119}, -\frac{23}{68}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 5 & 8 & 0 \\ 9 & 5 & 6 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 6 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & -\frac{205}{238} & \frac{72}{119} & \frac{107}{68} \\ 0 & 1 & \frac{467}{238} & \frac{2}{119} & -\frac{23}{68} \end{vmatrix} = -\frac{431449}{476}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 6 \\ 9 & 5 & 6 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 6 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 6 \\ 9 & 5 & 6 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 6 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 6 \\ 9 & 5 & 6 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 6 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 0 & 9 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -8 & 9 & -4 \\ 3 & -3 & 6 & -1 & -5 \\ -1 & -5 & 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 & -6 & 9 \\ -3 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -10 & 17 & -13 \\ 3 & -6 & 9 & -7 & -4 \\ -1 & -4 & 8 & -6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 11 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 2 \\ 7 & 8 & 6 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 11 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{2}{5}, -\frac{2}{5}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 7 \\ 1 & -4 & 7 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & -6 & 7 \\ 1 & -x-4 & 7 \\ 1 & -2 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 1 & -6 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80957	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Гален Пламенов Георгиев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -7x_1 & +9x_2 & +5x_3 & -8x_4 & +2x_5 & =0 \\ 8x_1 & +9x_2 & -7x_3 & -3x_4 & +5x_5 & =0 \\ x_1 & -7x_2 & -5x_3 & -8x_4 & +9x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (7,9,5,8,0) \\ b = & (5,8,9,7,0) \\ c = & (0,7,5,9,8) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{323}{157}, \frac{135}{157}, \frac{282}{157}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{859}{157}, \frac{1110}{157}, \frac{1586}{157}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 8 & 9 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & 5 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & \frac{323}{157} & \frac{135}{157} & \frac{282}{157} \\ 0 & 1 & \frac{859}{157} & \frac{1110}{157} & \frac{1586}{157} \end{vmatrix} = \frac{283090}{157}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 7 \\ 9 & 5 & 7 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 7 \\ 9 & 5 & 7 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 7 \\ 9 & 5 & 7 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 0 & 9 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -8 & 9 & -4 \\ 2 & -3 & 7 & -1 & -5 \\ -1 & -5 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 & -7 & 9 \\ -3 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -9 & 17 & -13 \\ 2 & -5 & 10 & -8 & -4 \\ -1 & -4 & 7 & -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 9 & 12 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 9 & 12 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-3, 0, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & -1 & 3 \\ -2 & -x-1 & 5 \\ 2 & -3 & 5-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 2, 2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80958	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Бетина Емилова Иванова**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 8x_1 & +9x_2 & +5x_3 & +8x_4 & -2x_5 & =0 \\ -8x_1 & -2x_2 & +8x_3 & +5x_4 & +9x_5 & =0 \\ 9x_1 & -5x_2 & +5x_3 & +8x_4 & -8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (8,9,5,8,0) \\ b = & (8,9,8,0,5) \\ c = & (5,8,8,9,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{271}{117}, -\frac{563}{234}, \frac{1}{6}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{757}{117}, -\frac{673}{117}, -\frac{7}{3}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 8 & 9 & 5 & 8 & 0 \\ 8 & 9 & 8 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{271}{117} & -\frac{563}{234} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{757}{117} & -\frac{673}{117} & -\frac{7}{3} \end{vmatrix} = \frac{403769}{117}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 8 \\ 9 & 5 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 8 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 8 \\ 9 & 5 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 8 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 5 & 8 \\ 9 & 5 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 9 & 5 \\ 5 & 8 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 5 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 8 & 0 & 9 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -8 & 9 & -4 \\ 1 & -3 & 8 & -1 & -5 \\ -1 & -5 & 1 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 3 & -8 & 9 \\ -3 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -8 & 17 & -13 \\ 1 & -4 & 11 & -9 & -4 \\ -1 & -4 & 6 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 5 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (3, -5, 0, 1),\ a_2 = (3, -5, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 7 \\ -4 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-2 & -1 & 7 \\ -4 & 1-x & 7 \\ 0 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ -4 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80964	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Пламен Живков Начев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -4x_1 & +9x_2 & -6x_3 & +8x_4 & +6x_5 & =0 \\ 6x_1 & -x_2 & +4x_3 & -8x_4 & -9x_5 & =0 \\ 8x_1 & -9x_2 & -4x_3 & -6x_4 & -x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (4,9,6,8,0) \\ b = & (4,8,0,6,9) \\ c = & (8,4,9,0,6) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{44}{65}, \frac{11}{13}, \frac{14}{65}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{17}{26}, -\frac{30}{13}, \frac{29}{13}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 6 & 8 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 6 & 9 \\ 8 & 4 & 9 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & \frac{44}{65} & \frac{11}{13} & \frac{14}{65} \\ 0 & 1 & \frac{17}{26} & -\frac{30}{13} & \frac{29}{13} \end{vmatrix} = -\frac{1902}{13}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 6 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 9 & 6 \\ 6 & 4 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 6 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 9 & 6 \\ 6 & 4 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 6 & 4 \\ 9 & 6 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 9 & 6 \\ 6 & 4 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 0 & 9 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -8 & 9 & -3 \\ 5 & -2 & 4 & -1 & -6 \\ -1 & -6 & 5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & -4 & 9 \\ -2 & 0 & 6 & -4 & 0 \\ -2 & 6 & -12 & 17 & -12 \\ 5 & -7 & 6 & -5 & -5 \\ -1 & -5 & 11 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 3 \\ 8 & 10 & 8 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, 0, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{2}{7}, -\frac{4}{7}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 0 & 2 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{1}{2}, 1\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80965	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Кристин Илиева Александрова**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -5x_1 & -9x_2 & -6x_3 & -8x_4 & -4x_5 & =0 \\ 5x_1 & -5x_2 & +6x_3 & +9x_4 & -8x_5 & =0 \\ -5x_1 & +8x_2 & -6x_3 & -x_4 & -9x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (5,9,6,8,0) \\ b = & (5,6,8,0,9) \\ c = & (9,5,6,0,8) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{5}{6}, 0, 0\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{647}{158}, -\frac{274}{79}, -\frac{115}{79}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 5 & 9 & 6 & 8 & 0 \\ 5 & 6 & 8 & 0 & 9 \\ 9 & 5 & 6 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -\frac{5}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{647}{158} & -\frac{274}{79} & -\frac{115}{79} \end{vmatrix} = \frac{328628}{237}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 6 & 5 \\ 9 & 6 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 9 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 & 0 & 9 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -8 & 9 & -3 \\ 4 & -2 & 5 & -1 & -6 \\ -1 & -6 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 & -5 & 9 \\ -2 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & -11 & 17 & -12 \\ 4 & -6 & 7 & -6 & -5 \\ -1 & -5 & 10 & -6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 8 & 8 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{8}{5}, \frac{1}{5}, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & 2 & 0 \\ 0 & 2-x & -1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 1, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80966	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Николай Георгиев Ватев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 6x_1 & -9x_2 & +6x_3 & +8x_4 & -2x_5 & =0 \\ 9x_1 & +8x_2 & -2x_3 & +6x_4 & -6x_5 & =0 \\ -4x_1 & +6x_2 & -6x_3 & +9x_4 & +8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (6,9,6,8,0) \\ b = & (6,8,0,6,9) \\ c = & (6,8,9,6,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{9}{496}, -\frac{119}{248}, \frac{509}{496}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{895}{496}, -\frac{15}{248}, \frac{333}{496}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 6 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 6 & 9 \\ 6 & 8 & 9 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{9}{496} & -\frac{119}{248} & \frac{509}{496} \\ 0 & 1 & \frac{895}{496} & -\frac{15}{248} & \frac{333}{496} \end{vmatrix} = \frac{18459}{124}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 6 & 6 \\ 9 & 6 & 6 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 6 & 6 \\ 9 & 6 & 6 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 6 & 6 \\ 9 & 6 & 6 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 0 & 9 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 9 & -3 \\ 3 & -2 & 6 & -1 & -6 \\ -1 & -6 & 3 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & -6 & 9 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -10 & 17 & -12 \\ 3 & -5 & 8 & -7 & -5 \\ -1 & -5 & 9 & -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 12 & 12 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 12 & 12 & 8 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, 1, 0, 0),\ a_2 = (-\frac{2}{3}, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 2-x & -8 & 4 \\ 0 & -x-2 & 2 \\ 1 & -3 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 0 & -8 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80967	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Никола Ясенов Божинов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 7x_1 & -9x_2 & -6x_3 & -8x_4 & -2x_5 & =0 \\ 6x_1 & +8x_2 & -6x_3 & +7x_4 & -9x_5 & =0 \\ 7x_1 & -8x_2 & -5x_3 & +9x_4 & -6x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (7,9,6,8,0) \\ b = & (7,8,9,6,0) \\ c = & (0,7,8,9,6) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{479}{268}, -\frac{75}{268}, -\frac{199}{268}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{1567}{268}, \frac{463}{268}, \frac{1643}{268}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 6 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 6 \\ 1 & 0 & \frac{479}{268} & -\frac{75}{268} & -\frac{199}{268} \\ 0 & 1 & -\frac{1567}{268} & \frac{463}{268} & \frac{1643}{268} \end{vmatrix} = -\frac{229769}{268}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 6 & 7 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 9 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 6 & 7 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 9 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 6 & 7 \\ 9 & 6 & 7 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 9 & 6 \\ 6 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 6 & 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 7 & 0 & 9 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -8 & 9 & -3 \\ 2 & -2 & 7 & -1 & -6 \\ -1 & -6 & 2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 1 & -7 & 9 \\ -2 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -9 & 17 & -12 \\ 2 & -4 & 9 & -8 & -5 \\ -1 & -5 & 8 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 8 & 13 & 9 & 12 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 10 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 8 & 13 & 9 & 12 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 10 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (5, -4, 0, 1),\ a_2 = (7, -5, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -13 \\ -4 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-6 & 9 & -13 \\ -4 & 5-x & -5 \\ 0 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -8 & 9 & -13 \\ -4 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, -2, -2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80972	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Кристиян Миленов Митов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} -2x_1 & -9x_2 & -7x_3 & +8x_4 & +6x_5 & =0 \\ -7x_1 & +9x_2 & -2x_3 & -3x_4 & +8x_5 & =0 \\ -8x_1 & -2x_2 & +7x_3 & -x_4 & -9x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (2,9,7,8,0) \\ b = & (8,2,0,9,7) \\ c = & (0,7,8,9,2) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{1188}{197}, \frac{575}{197}, \frac{685}{197}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{115}{197}, \frac{241}{197}, -\frac{160}{197}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 2 & 9 & 7 & 8 & 0 \\ 8 & 2 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 7 & 8 & 9 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{1188}{197} & \frac{575}{197} & \frac{685}{197} \\ 0 & 1 & -\frac{115}{197} & \frac{241}{197} & -\frac{160}{197} \end{vmatrix} = -\frac{218095}{197}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 7 & 2 \\ 9 & 7 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 9 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 7 & 2 \\ 9 & 7 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 9 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 7 & 2 \\ 9 & 7 & 2 & 8 & 0 \\ 2 & 8 & 0 & 9 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & 0 & 9 \\ -1 & -5 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & -8 & 9 & -2 \\ 7 & -1 & 2 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 & -2 & 9 \\ -1 & -4 & 11 & -6 & 0 \\ -5 & 11 & -14 & 17 & -11 \\ 7 & -8 & 3 & -3 & -6 \\ -1 & -6 & 14 & -8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 8 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 8 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{2}{3}, 0, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{4}{3}, 1, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -13 \\ -4 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-6 & 9 & -13 \\ -4 & 5-x & -5 \\ 0 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -8 & 9 & -13 \\ -4 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, -2, -2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80973	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Павел Василев Василев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} -3x_1 & +9x_2 & +7x_3 & +8x_4 & -3x_5 & =0 \\ -9x_1 & +7x_2 & +8x_3 & +6x_4 & +3x_5 & =0 \\ -6x_1 & +7x_2 & -3x_3 & +9x_4 & +8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (3,9,7,8,0) \\ b = & (7,8,3,9,0) \\ c = & (0,8,7,9,3) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{72}{101}, \frac{66}{707}, \frac{645}{707}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{22}{101}, -\frac{643}{707}, \frac{47}{707}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 7 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 8 & 7 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & \frac{72}{101} & \frac{66}{707} & \frac{645}{707} \\ 0 & 1 & -\frac{22}{101} & -\frac{643}{707} & \frac{47}{707} \end{vmatrix} = \frac{387334}{707}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 7 & 3 \\ 9 & 7 & 3 & 8 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 9 & 7 \\ 7 & 3 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 7 & 3 \\ 9 & 7 & 3 & 8 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 9 & 7 \\ 7 & 3 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 7 & 3 \\ 9 & 7 & 3 & 8 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 9 & 7 \\ 7 & 3 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 0 & 9 \\ -1 & -4 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -8 & 9 & -2 \\ 6 & -1 & 3 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 & -3 & 9 \\ -1 & -3 & 9 & -5 & 0 \\ -4 & 9 & -13 & 17 & -11 \\ 6 & -7 & 4 & -4 & -6 \\ -1 & -6 & 13 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 3 \\ 9 & 8 & 15 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 3 \\ 9 & 8 & 15 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, 0, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-2 & 1 & 0 \\ -2 & 2-x & 0 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([0, 0, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80974	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Ива Пламенова Григорова**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 4x_1 & +9x_2 & -7x_3 & +8x_4 & +6x_5 & =0 \\ 8x_1 & +5x_2 & +4x_3 & +7x_4 & +9x_5 & =0 \\ -4x_1 & +8x_2 & -2x_3 & -9x_4 & +7x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (4,9,7,8,0) \\ b = & (8,4,7,0,9) \\ c = & (7,9,8,0,4) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{16}{47}, -\frac{138}{235}, -\frac{66}{235}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{86}{141}, \frac{97}{1410}, -\frac{1241}{1410}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 4 & 9 & 7 & 8 & 0 \\ 8 & 4 & 7 & 0 & 9 \\ 7 & 9 & 8 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -\frac{16}{47} & -\frac{138}{235} & -\frac{66}{235} \\ 0 & 1 & \frac{86}{141} & \frac{97}{1410} & -\frac{1241}{1410} \end{vmatrix} = -\frac{308029}{1410}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 7 & 4 \\ 9 & 7 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 7 & 4 \\ 9 & 7 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 7 & 4 \\ 9 & 7 & 4 & 8 & 0 \\ 4 & 8 & 0 & 9 & 7 \\ 7 & 4 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 4 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 0 & 9 \\ -1 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -8 & 9 & -2 \\ 5 & -1 & 4 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 & -4 & 9 \\ -1 & -2 & 7 & -4 & 0 \\ -3 & 7 & -12 & 17 & -11 \\ 5 & -6 & 5 & -5 & -6 \\ -1 & -6 & 12 & -6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 10 & 9 & 12 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 10 & 9 & 12 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 8 & 6 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ 0 & 2-x & -1 \\ 2 & 0 & -x-2 \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80975	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Елеонора Красимирова Димова**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 5x_1 & -9x_2 & +7x_3 & -8x_4 & -2x_5 & =0 \\ -8x_1 & +7x_2 & +9x_3 & +6x_4 & +5x_5 & =0 \\ x_1 & -8x_2 & -9x_3 & -7x_4 & -5x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (5,9,7,8,0) \\ b = & (9,5,0,8,7) \\ c = & (0,7,5,8,9) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{205}{53}, -7, \frac{899}{53}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{3}{53}, -1, -\frac{16}{53}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 5 & 9 & 7 & 8 & 0 \\ 9 & 5 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 7 & 5 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & -\frac{205}{53} & -7 & \frac{899}{53} \\ 0 & 1 & \frac{3}{53} & -1 & -\frac{16}{53} \end{vmatrix} = \frac{498750}{53}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 7 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 9 & 7 \\ 7 & 5 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 7 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 9 & 7 \\ 7 & 5 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 7 & 5 \\ 9 & 7 & 5 & 8 & 0 \\ 5 & 8 & 0 & 9 & 7 \\ 7 & 5 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 7 & 5 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 5 & 0 & 9 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & -8 & 9 & -2 \\ 4 & -1 & 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -2 & -5 & 9 \\ -1 & -1 & 5 & -3 & 0 \\ -2 & 5 & -11 & 17 & -11 \\ 4 & -5 & 6 & -6 & -6 \\ -1 & -6 & 11 & -5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 9 & 12 & 9 & 15 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 12 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 9 & 12 & 9 & 15 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 12 & 9 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-7, 4, 0, 1),\ a_2 = (-5, 3, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 18 & 4 \\ -7 & 12 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-11 & 18 & 4 \\ -7 & 12-x & 2 \\ 0 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -14 & 18 & 4 \\ -7 & 9 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 1, -1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80980	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Кристиян Руменов Пейчев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} 2x_1 & +9x_2 & +8x_3 & -8x_4 & -4x_5 & =0 \\ 8x_1 & +3x_2 & +8x_3 & -9x_4 & -2x_5 & =0 \\ 9x_1 & -x_2 & -8x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (0,9,8,8,0) \\ b = & (9,8,0,8,0) \\ c = & (9,8,0,8,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{45}{4}, \frac{52}{5}, \frac{11}{5}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{25}{8}, -\frac{14}{5}, \frac{8}{5}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\left| \begin{array}{rrrrr} 0 & 9 & 8 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{45}{4} & \frac{52}{5} & \frac{11}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{25}{8} & -\frac{14}{5} & \frac{8}{5} \end{array} \right| = 0$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & -8 & 8 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & -8 & 9 & -1 \\ 9 & 0 & 0 & -1 & -8 \\ -1 & -8 & 9 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 & 0 & 9 \\ 0 & -8 & 16 & -8 & 0 \\ -8 & 16 & -16 & 17 & -10 \\ 9 & -9 & 0 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 17 & -9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 13 & 13 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 10 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 13 & 13 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 10 & 10 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 0, 1),\ a_2 = (0, -1, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \\ 5 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & 1 & 1 \\ -4 & 4-x & 1 \\ 5 & -3 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ 5 & -3 & -3 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([0, 1, -1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80981	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Теодор Райчов Кирилов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} -x_1 & -9x_2 & +8x_3 & -8x_4 & +6x_5 & =0 \\ 9x_1 & +x_2 & -3x_3 & -8x_4 & -8x_5 & =0 \\ -x_1 & +8x_2 & +8x_3 & -9x_4 & +x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (1,9,8,8,0) \\ b = & (8,1,8,0,9) \\ c = & (9,0,8,1,8) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{223}{197}, \frac{345}{394}, -\frac{69}{394}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{785}{197}, -\frac{877}{394}, \frac{1515}{394}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 1 & 8 & 0 & 9 \\ 9 & 0 & 8 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & \frac{223}{197} & \frac{345}{394} & -\frac{69}{394} \\ 0 & 1 & -\frac{785}{197} & -\frac{877}{394} & \frac{1515}{394} \end{vmatrix} = -\frac{24703}{197}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 1 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 1 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 1 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -7 & 7 & 0 & 0 \\ -7 & 7 & -8 & 9 & -1 \\ 8 & 0 & 1 & -1 & -8 \\ -1 & -8 & 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -7 & -1 & 9 \\ 0 & -7 & 14 & -7 & 0 \\ -7 & 14 & -15 & 17 & -10 \\ 8 & -8 & 1 & -2 & -7 \\ -1 & -7 & 16 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 11 & 10 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 11 & 10 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-7, 2, 0, 1),\ a_2 = (3, -2, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -6 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-3 & 1 & 1 \\ -6 & 3-x & 1 \\ -2 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 2, 2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80983	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Цветелина Николаева Костадинова**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 3x_1 & +9x_2 & -8x_3 & +8x_4 & -3x_5 & =0 \\ -8x_1 & +3x_2 & +6x_3 & -9x_4 & +8x_5 & =0 \\ -8x_1 & +2x_2 & -8x_3 & +9x_4 & +3x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (3,9,8,8,0) \\ b = & (9,3,0,8,8) \\ c = & (8,0,3,9,8) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{37}{38}, \frac{23}{19}, \frac{31}{19}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{97}{19}, \frac{79}{19}, \frac{9}{19}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 3 & 9 & 8 & 8 & 0 \\ 9 & 3 & 0 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 3 & 9 & 8 \\ 1 & 0 & \frac{37}{38} & \frac{23}{19} & \frac{31}{19} \\ 0 & 1 & \frac{97}{19} & \frac{79}{19} & \frac{9}{19} \end{vmatrix} = \frac{5976}{19}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 3 \\ 9 & 8 & 3 & 8 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 3 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 3 \\ 9 & 8 & 3 & 8 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 3 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 3 \\ 9 & 8 & 3 & 8 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 3 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ -5 & 5 & -8 & 9 & -1 \\ 6 & 0 & 3 & -1 & -8 \\ -1 & -8 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -5 & -3 & 9 \\ 0 & -5 & 10 & -5 & 0 \\ -5 & 10 & -13 & 17 & -10 \\ 6 & -6 & 3 & -4 & -7 \\ -1 & -7 & 14 & -6 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 10 & 13 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 10 & 13 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, 1, 0, 0),\ a_2 = (-2, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 11 \\ 4 & -11 & 19 \\ 3 & -7 & 12 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 2-x & -7 & 11 \\ 4 & -x-11 & 19 \\ 3 & -7 & 12-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -1 & -7 & 11 \\ 4 & -14 & 19 \\ 3 & -7 & 9 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 3, 2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80988	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Константин Георгиев Узунов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} 8x_1 & -9x_2 & +8x_3 & -8x_4 & +4x_5 & =0 \\ 6x_1 & +8x_2 & +8x_3 & +8x_4 & -9x_5 & =0 \\ 8x_1 & -8x_2 & -8x_3 & -9x_4 & +5x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (8,9,8,8,0) \\ b = & (0,8,9,8,8) \\ c = & (8,8,0,8,9) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{2}{77}, \frac{190}{77}, \frac{222}{77}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{81}{616}, -\frac{68}{77}, \frac{17}{77}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 8 & 9 & 8 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 8 & 9 \\ 1 & 0 & \frac{2}{77} & \frac{190}{77} & \frac{222}{77} \\ 0 & 1 & \frac{81}{616} & -\frac{68}{77} & \frac{17}{77} \end{vmatrix} = -\frac{105909}{77}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 8 \\ 9 & 8 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 8 \\ 9 & 8 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 8 \\ 9 & 8 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 9 & -1 \\ 1 & 0 & 8 & -1 & -8 \\ -1 & -8 & 1 & 0 & 8 \\ cr & & & & \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & -8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 17 & -10 \\ 1 & -1 & 8 & -9 & -7 \\ -1 & -7 & 9 & -1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 15 & 6 & 9 & 15 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 15 & 6 & 9 & 15 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 8 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, 0, 0, 1),\ a_2 = (1, -4, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 14 & -20 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-8 & 14 & -20 \\ 1 & -x & 2 \\ 4 & -6 & 10-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -10 & 14 & -20 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, 0, -\frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80989	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Любомир Пламенов Иванов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 9x_1 & -9x_2 & -8x_3 & -8x_4 & +3x_5 & =0 \\ 8x_1 & +8x_2 & +9x_3 & +5x_4 & +9x_5 & =0 \\ 9x_1 & +8x_2 & -8x_3 & +5x_4 & -9x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (9,9,8,8,0) \\ b = & (9,8,9,8,0) \\ c = & (8,9,9,0,8) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{683}{301}, -\frac{580}{301}, -\frac{1885}{903}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{114}{301}, -\frac{493}{301}, -\frac{323}{903}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 9 & 9 & 8 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 9 & 8 & 0 \\ 8 & 9 & 9 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & \frac{683}{301} & -\frac{580}{301} & -\frac{1885}{903} \\ 0 & 1 & \frac{114}{301} & -\frac{493}{301} & -\frac{323}{903} \end{vmatrix} = -\frac{313766}{903}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 9 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 9 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 9 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 9 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 9 & 8 & 0 \\ 9 & 8 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 9 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 8 & 9 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 9 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -8 & 9 & -1 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & -8 \\ -1 & -8 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 1 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -7 & 17 & -10 \\ 0 & 0 & 9 & -10 & -7 \\ -1 & -7 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 12 & 7 & 12 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 9 & 5 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 1 \\ 12 & 7 & 12 & 6 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 9 & 5 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{5}{3}, 2, 0, 1),\ a_2 = (-1, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 & -1 \\ 2 & -x & -1 \\ 3 & -1 & -x-2 \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80990	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Стефан Илчев Илев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -6x_1 & +9x_2 & +9x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ -x_1 & -9x_2 & -9x_3 & -8x_4 & +2x_5 & =0 \\ -9x_1 & -4x_2 & -6x_3 & -9x_4 & +8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (0,9,9,8,0) \\ b = & (0,8,0,9,9) \\ c = & (9,9,0,8,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{293}{861}, -\frac{65}{287}, \frac{323}{287}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{877}{861}, -\frac{18}{287}, -\frac{96}{287}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 0 & 9 & 9 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{293}{861} & -\frac{65}{287} & \frac{323}{287} \\ 0 & 1 & -\frac{877}{861} & -\frac{18}{287} & -\frac{96}{287} \end{vmatrix} = -\frac{15996}{7}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 0 \\ 9 & 9 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 0 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & -9 & 8 & 0 & 0 \\ -9 & 8 & -8 & 9 & 0 \\ 9 & 1 & 0 & -1 & -9 \\ -1 & -9 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -9 & 0 & 9 \\ 1 & -10 & 17 & -8 & 0 \\ -9 & 17 & -16 & 17 & -9 \\ 9 & -8 & -1 & -1 & -8 \\ -1 & -8 & 18 & -8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 8 & 6 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 9 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 8 & 6 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, 0, 0, 1),\ a_2 = (3, -6, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 & -4 \\ -1 & 1-x & 2 \\ 3 & -1 & -x-3 \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, 0, \frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80991	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Атанас Валериев Даков**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} -x_1 & -9x_2 & +9x_3 & +8x_4 & +4x_5 & =0 \\ 9x_1 & +x_2 & +8x_3 & -9x_4 & -5x_5 & =0 \\ 9x_1 & -8x_2 & -x_3 & -2x_4 & -9x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (1,9,9,8,0) \\ b = & (9,9,1,0,8) \\ c = & (0,9,8,9,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{67}{165}, \frac{1}{15}, \frac{34}{33}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{181}{385}, \frac{6}{5}, -\frac{93}{77}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 1 & 9 & 9 & 8 & 0 \\ 9 & 9 & 1 & 0 & 8 \\ 0 & 9 & 8 & 9 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{67}{165} & \frac{1}{15} & \frac{34}{33} \\ 0 & 1 & \frac{181}{385} & \frac{6}{5} & -\frac{93}{77} \end{vmatrix} = -\frac{21936}{77}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 1 \\ 9 & 9 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 1 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 1 \\ 9 & 9 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 1 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 1 \\ 9 & 9 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 1 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & -8 & 7 & 0 & 0 \\ -8 & 7 & -8 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 1 & -1 & -9 \\ -1 & -9 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -8 & -1 & 9 \\ 1 & -9 & 15 & -7 & 0 \\ -8 & 15 & -15 & 17 & -9 \\ 8 & -7 & 0 & -2 & -8 \\ -1 & -8 & 17 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 12 & 12 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 & 1 \\ 9 & 9 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 12 & 12 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, 0, 1, 1),\ a_2 = (-1, 1, 0, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -13 \\ -4 & 5 & -5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-6 & 9 & -13 \\ -4 & 5-x & -5 \\ 0 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -8 & 9 & -13 \\ -4 & 3 & -5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, -2, -2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80996	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Александър Методиев Александров**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 6x_1 & -9x_2 & -9x_3 & -8x_4 & +5x_5 & =0 \\ -8x_1 & +9x_2 & -2x_3 & -9x_4 & +6x_5 & =0 \\ 9x_1 & +6x_2 & -2x_3 & +8x_4 & -9x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (6,9,9,8,0) \\ b = & (6,9,0,9,8) \\ c = & (0,9,8,6,9) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{427}{227}, -\frac{512}{227}, -\frac{323}{227}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{603}{227}, \frac{1353}{227}, \frac{1488}{227}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 & 9 & 8 & 0 \\ 6 & 9 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 9 & 8 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & \frac{427}{227} & -\frac{512}{227} & -\frac{323}{227} \\ 0 & 1 & -\frac{603}{227} & \frac{1353}{227} & \frac{1488}{227} \end{vmatrix} = -\frac{1501421}{227}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 6 \\ 9 & 9 & 6 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 6 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 6 \\ 9 & 9 & 6 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 6 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 6 \\ 9 & 9 & 6 & 8 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 6 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 6 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & -8 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 6 & -1 & -9 \\ -1 & -9 & 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -3 & -6 & 9 \\ 1 & -4 & 5 & -2 & 0 \\ -3 & 5 & -10 & 17 & -9 \\ 3 & -2 & 5 & -7 & -8 \\ -1 & -8 & 12 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 15 & 6 & 15 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 12 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 9 & 15 & 6 & 15 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 12 & 5 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (0, -1, 0, 1),\ a_2 = (1, -1, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 8-x & -6 & -1 \\ 5 & -x-3 & -1 \\ 4 & -2 & -x-2 \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 5 & -6 & -1 \\ 5 & -6 & -1 \\ 4 & -2 & -5 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80997	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Николай Здравков Бързанов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 7x_1 & +9x_2 & +9x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ -7x_1 & -9x_2 & +8x_3 & +x_4 & -9x_5 & =0 \\ 8x_1 & +6x_2 & +9x_3 & -9x_4 & +7x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (7,9,9,8,0) \\ b = & (7,9,9,8,0) \\ c = & (8,9,9,7,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{757}{1681}, -\frac{879}{1681}, -\frac{2078}{1681}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{669}{1681}, -\frac{1443}{1681}, -\frac{2436}{1681}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 7 & 9 & 9 & 8 & 0 \\ 7 & 9 & 9 & 8 & 0 \\ 8 & 9 & 9 & 7 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{757}{1681} & -\frac{879}{1681} & -\frac{2078}{1681} \\ 0 & 1 & -\frac{669}{1681} & -\frac{1443}{1681} & -\frac{2436}{1681} \end{vmatrix} = 0$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 7 \\ 9 & 9 & 7 & 8 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 7 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 7 & 0 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -8 & 9 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & -1 & -9 \\ -1 & -9 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -2 & -7 & 9 \\ 1 & -3 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & -9 & 17 & -9 \\ 2 & -1 & 6 & -8 & -8 \\ -1 & -8 & 11 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 9 & 9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 7 & 5 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 9 & 9 & 6 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (1, 0, -4, 1),\ a_2 = (-1, 1, 0, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 11 & -5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-7 & 11 & -5 \\ -4 & 6-x & -2 \\ 2 & -5 & 4-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -10 & 11 & -5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, -2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	80998	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Кристиан Мирославов Митов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -8x_1 & +9x_2 & -9x_3 & -8x_4 & +2x_5 & =0 \\ 8x_1 & +9x_2 & +9x_3 & +8x_4 & -4x_5 & =0 \\ 8x_1 & -9x_2 & +2x_3 & -8x_4 & -9x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (8,9,9,8,0) \\ b = & (9,9,8,0,8) \\ c = & (9,9,8,0,8) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{16}{11}, \frac{7}{11}, 0\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{117}{11}, -\frac{189}{22}, 9\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 8 & 9 & 9 & 8 & 0 \\ 9 & 9 & 8 & 0 & 8 \\ 9 & 9 & 8 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -\frac{16}{11} & \frac{7}{11} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{117}{11} & -\frac{189}{22} & 9 \end{vmatrix} = 0$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 9 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 8 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 9 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 8 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 0 & 9 & 9 & 8 \\ 9 & 9 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 9 & 9 \\ 9 & 8 & 8 & 0 & 9 \\ 8 & 9 & 8 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 8 & 0 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -8 & 9 & 0 \\ 1 & 1 & 8 & -1 & -9 \\ -1 & -9 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -1 & -8 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -8 & 17 & -9 \\ 1 & 0 & 7 & -9 & -8 \\ -1 & -8 & 10 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 12 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 12 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 8 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (0, -1, 0, 1),\ a_2 = (0, -\frac{3}{2}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 10 & -14 \\ 2 & -2 & 5 \\ 4 & -6 & 10 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-6 & 10 & -14 \\ 2 & -x-2 & 5 \\ 4 & -6 & 10-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -8 & 10 & -14 \\ 2 & -4 & 5 \\ 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, -2, -2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81000	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Димитър Панайотов Ценков**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} 6x_1 & +5x_2 & -6x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ 6x_1 & -5x_2 & -x_3 & +2x_4 & +8x_5 & =0 \\ 2x_1 & -4x_2 & +x_3 & +8x_4 & -3x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (0,0,0,8,1) \\ b = & (8,0,0,0,1) \\ c = & (8,0,0,0,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{96}{235}, -\frac{121}{235}, -\frac{134}{235}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{347}{235}, \frac{133}{235}, \frac{157}{235}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{96}{235} & -\frac{121}{235} & -\frac{134}{235} \\ 0 & 1 & \frac{347}{235} & \frac{133}{235} & \frac{157}{235} \end{vmatrix} = 0$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -7 & -1 & 0 \\ 0 & -8 & -1 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & -8 & -1 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 0 & 1 & -1 \\ -8 & 8 & 8 & -8 & 0 \\ 0 & 8 & -15 & 6 & 1 \\ 0 & -8 & 7 & 9 & -7 \\ 8 & -7 & -1 & -8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 6 & 9 & 15 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 18 & 6 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 18 & 6 & 9 & 15 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 18 & 6 & 9 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{1}{3}, 0, -1, 1),\ a_2 = (-\frac{1}{3}, 1, 0, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-2 & 1 & 0 \\ -2 & 2-x & 0 \\ 1 & -3 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([0, 0, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81004	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Мария Тихомирова Дулева**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} 4x_1 & -6x_2 & +x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ 4x_1 & +x_2 & +4x_3 & +x_4 & +8x_5 & =0 \\ 4x_1 & -4x_2 & +3x_3 & -x_4 & -8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (4,0,0,8,1) \\ b = & (0,0,4,8,1) \\ c = & (4,0,0,8,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{8}{7}, -\frac{12}{35}, \frac{4}{35}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{3}{7}, \frac{293}{455}, -\frac{191}{455}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{8}{7} & -\frac{12}{35} & \frac{4}{35} \\ 0 & 1 & \frac{3}{7} & \frac{293}{455} & -\frac{191}{455} \end{vmatrix} = 0$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ -8 & 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -7 & -1 & 0 \\ -4 & -8 & 3 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & -4 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 & -3 & -1 \\ -8 & 12 & 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & -11 & 6 & 1 \\ -4 & -4 & 11 & 5 & -7 \\ 8 & -7 & -5 & -4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 15 & 15 & 7 & 12 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 15 & 15 & 8 & 13 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 15 & 15 & 7 & 12 \\ 3 & 3 & 2 & 3 \\ 15 & 15 & 8 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{1}{3}, 0, -1, 1),\ a_2 = (-1, 1, 0, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -5 \\ -2 & 4 & -1 \\ 6 & -10 & 6 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-7 & 12 & -5 \\ -2 & 4-x & -1 \\ 6 & -10 & 6-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -10 & 12 & -5 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & -10 & 3 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, -2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81005	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Виктория Георгиева Терзиева**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -5x_1 & -4x_2 & -4x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ 2x_1 & -x_2 & -5x_3 & +8x_4 & -5x_5 & =0 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & +5x_4 & -8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (5,0,0,8,1) \\ b = & (0,1,0,8,5) \\ c = & (1,8,0,0,5) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{109}{483}, -\frac{262}{483}, -\frac{39}{161}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{61}{161}, -\frac{58}{161}, -\frac{64}{161}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 5 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -\frac{109}{483} & -\frac{262}{483} & -\frac{39}{161} \\ 0 & 1 & -\frac{61}{161} & -\frac{58}{161} & -\frac{64}{161} \end{vmatrix} = \frac{25016}{161}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & -1 & 0 \\ -5 & -8 & 4 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & -5 & -8 & 4 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 5 & -4 & -1 \\ -8 & 13 & -2 & -3 & 0 \\ 5 & -2 & -10 & 6 & 1 \\ -5 & -3 & 12 & 4 & -7 \\ 8 & -7 & -6 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 3 \\ 7 & 7 & 9 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 1 \\ 7 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (1, 0, -\frac{4}{3}, 1),\ a_2 = (-1, 1, 0, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-3 & 2 & 2 \\ -3 & 3-x & 1 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 1, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81006	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Ивайло Митков Стоилов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -6x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +8x_4 & +x_5 & =0 \\ x_1 & +x_2 & +6x_3 & +8x_4 & -3x_5 & =0 \\ 8x_1 & +x_2 & +4x_3 & +6x_4 & -2x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (6,0,0,8,1) \\ b = & (1,0,8,6,0) \\ c = & (0,8,6,0,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{123}{4}, -11, \frac{65}{2}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 8 & 6 & 0 \\ 0 & 8 & 6 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{123}{4} & -11 & \frac{65}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -5998$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 6 & 1 & 0 \\ -8 & 6 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & -7 & -1 & 0 \\ -6 & -8 & 5 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & -6 & -8 & 5 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 6 & -5 & -1 \\ -8 & 14 & -4 & -2 & 0 \\ 6 & -4 & -9 & 6 & 1 \\ -6 & -2 & 13 & 3 & -7 \\ 8 & -7 & -7 & -2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 9 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 9 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ 7 & 9 & 3 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (2, -\frac{7}{3}, 0, 1),\ a_2 = (0, -\frac{1}{3}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-2 & 1 & 0 \\ -2 & 2-x & 0 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([0, 0, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81007	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Асен Димитров Вълчев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 7x_1 & +x_2 & +4x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ -8x_1 & -x_2 & +4x_3 & +4x_4 & +7x_5 & =0 \\ -2x_1 & +4x_2 & +8x_3 & +7x_4 & -x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (7,0,0,8,1) \\ b = & (7,0,0,1,8) \\ c = & (0,0,8,1,7) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{81}{232}, \frac{47}{58}, \frac{51}{58}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{73}{174}, -\frac{1}{29}, \frac{35}{87}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & -\frac{81}{232} & \frac{47}{58} & \frac{51}{58} \\ 0 & 1 & -\frac{73}{174} & -\frac{1}{29} & \frac{35}{87} \end{vmatrix} = -\frac{8561}{29}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ -8 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & -7 & -1 & 0 \\ -7 & -8 & 6 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & -7 & -8 & 6 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 7 & -6 & -1 \\ -8 & 15 & -6 & -1 & 0 \\ 7 & -6 & -8 & 6 & 1 \\ -7 & -1 & 14 & 2 & -7 \\ 8 & -7 & -8 & -1 & 14 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 12 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 12 & 10 & 9 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, \frac{1}{2}, 0, 1),\ a_2 = (-2, \frac{3}{2}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 7 \\ -6 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-5 & 2 & 7 \\ -6 & 3-x & 7 \\ -2 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 7 \\ -6 & 2 & 7 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81008	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Диана Антонова Генева**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} 8x_1 & -2x_2 & +5x_3 & -8x_4 & -x_5 & =0 \\ -x_1 & +8x_2 & +6x_3 & -8x_4 & -4x_5 & =0 \\ -x_1 & +8x_2 & -5x_3 & +x_4 & +8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (8,0,0,8,1) \\ b = & (0,1,8,0,8) \\ c = & (0,1,8,8,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{27}{2}, -\frac{13}{2}, -\frac{15}{2}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{136}{7}, \frac{32}{3}, \frac{206}{21}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 8 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{27}{2} & -\frac{13}{2} & -\frac{15}{2} \\ 0 & 1 & \frac{136}{7} & \frac{32}{3} & \frac{206}{21} \end{vmatrix} = -\frac{1984}{7}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ -8 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & -7 & -1 & 0 \\ -8 & -8 & 7 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & -8 & -8 & 7 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 8 & -7 & -1 \\ -8 & 16 & -8 & 0 & 0 \\ 8 & -8 & -7 & 6 & 1 \\ -8 & 0 & 15 & 1 & -7 \\ 8 & -7 & -9 & 0 & 15 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 12 & 7 & 12 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 9 & 5 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 7 & 12 & 7 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (0, -1, 0, 1),\ a_2 = (-1, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 & 4 \\ -4 & 6 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-5 & 6 & 4 \\ -4 & 6-x & 2 \\ 2 & -5 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -8 & 6 & 4 \\ -4 & 3 & 2 \\ 2 & -5 & -1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, 2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81013	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Ралица Георгиева Великова**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrr} -3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +8x_4 & +x_5 & =0 \\ x_1 & +3x_2 & +8x_3 & +4x_4 & -x_5 & =0 \\ -8x_1 & +x_2 & +3x_3 & +x_4 & +4x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (3,0,1,8,1) \\ b = & (1,8,1,0,3) \\ c = & (0,8,3,1,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{14}{267}, \frac{34}{267}, \frac{515}{267}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{71}{267}, -\frac{58}{267}, \frac{1}{267}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{14}{267} & \frac{34}{267} & \frac{515}{267} \\ 0 & 1 & -\frac{71}{267} & -\frac{58}{267} & \frac{1}{267} \end{vmatrix} = \frac{1432}{89}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ -7 & 2 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -7 & -1 & 1 \\ -3 & -7 & 2 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & -3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 2 & -2 & -1 \\ -7 & 9 & 3 & -5 & 0 \\ 2 & 3 & -12 & 6 & 2 \\ -3 & -4 & 9 & 6 & -8 \\ 8 & -8 & -3 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 6 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 7 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (0, -1, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-2 & 2 & 0 \\ -1 & 2-x & 0 \\ 1 & 0 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([0, 0, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81014	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Явор Жулиенов Станков**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -4x_1 & +4x_2 & +x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ -4x_1 & +8x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 & =0 \\ 4x_1 & -8x_2 & +x_3 & +x_4 & -x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (4,0,1,8,1) \\ b = & (1,4,8,1,0) \\ c = & (1,0,1,8,4) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = (1,0,0,0,4)$, $v_2 = \left(0,1,0,-\frac{4}{7},-\frac{60}{7}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a,b,c,v_1,v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{7} & -\frac{60}{7} \end{vmatrix} = -\frac{6375}{7}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ -7 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -7 & -1 & 1 \\ -4 & -7 & 3 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & -4 & -7 & 3 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 3 & -3 & -1 \\ -7 & 10 & 1 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -11 & 6 & 2 \\ -4 & -3 & 10 & 5 & -8 \\ 8 & -8 & -4 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 12 & 5 & 7 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 5 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 12 & 5 & 7 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 5 & 7 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (0, -3, 0, 1),\ a_2 = (-1, 1, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ -7 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-4 & 1 & 7 \\ -7 & 4-x & 7 \\ 0 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -7 & 1 & 7 \\ -7 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81016	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Станислав Веселинов Величков**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 6x_1 & -5x_2 & -x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & +6x_4 & +8x_5 & =0 \\ x_1 & +6x_2 & -8x_3 & -x_4 & +6x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (6,0,1,8,1) \\ b = & (1,6,1,8,0) \\ c = & (8,6,1,1,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{241}{469}, \frac{339}{469}, -\frac{49}{67}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{687}{469}, -\frac{330}{469}, \frac{56}{67}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 1 & 8 & 0 \\ 8 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{241}{469} & \frac{339}{469} & -\frac{49}{67} \\ 0 & 1 & \frac{687}{469} & -\frac{330}{469} & \frac{56}{67} \end{vmatrix} = \frac{24072}{67}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 & 1 & 0 \\ -7 & 5 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -7 & -1 & 1 \\ -6 & -7 & 5 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & -6 & -7 & 5 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 5 & -5 & -1 \\ -7 & 12 & -3 & -2 & 0 \\ 5 & -3 & -9 & 6 & 2 \\ -6 & -1 & 12 & 3 & -8 \\ 8 & -8 & -6 & -1 & 12 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 12 & 5 & 12 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 9 & 18 & 9 & 18 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 12 & 5 & 12 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \\ 9 & 18 & 9 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (0, -1, 0, 1),\ a_2 = (1, -1, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 & -4 \\ -1 & 1-x & 2 \\ 3 & -1 & -x-3 \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, 0, \frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81017	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Димитър Георгиев Димитров**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -7x_1 & +6x_2 & +x_3 & +8x_4 & +x_5 & =0 \\ -7x_1 & +x_2 & +x_3 & +4x_4 & +8x_5 & =0 \\ 8x_1 & -x_2 & -x_3 & -7x_4 & +x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (7,0,1,8,1) \\ b = & (8,1,1,0,7) \\ c = & (1,7,0,8,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, 11, -\frac{7}{15}, -\frac{4}{15}\right)$, $v_2 = (0, 1, 19, -3, -1)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & 7 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 11 & -\frac{7}{15} & -\frac{4}{15} \\ 0 & 1 & 19 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{28604}{5}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 7 & 1 & 0 \\ -7 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & -7 & -1 & 1 \\ -7 & -7 & 6 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & -7 & -7 & 6 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -7 & 6 & -6 & -1 \\ -7 & 13 & -5 & -1 & 0 \\ 6 & -5 & -8 & 6 & 2 \\ -7 & 0 & 13 & 2 & -8 \\ 8 & -8 & -7 & 0 & 13 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, 0, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 12 \\ 1 & -5 & 9 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 2-x & -8 & 12 \\ 1 & -x-5 & 9 \\ 1 & -3 & 5-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 0 & -8 & 12 \\ 1 & -7 & 9 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, 1, \frac{2}{3}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81022	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Петър Стефанов Баев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -2x_1 & +6x_2 & -2x_3 & -8x_4 & -x_5 & =0 \\ -x_1 & -2x_2 & -8x_3 & +5x_4 & +2x_5 & =0 \\ 8x_1 & -2x_2 & -3x_3 & +x_4 & -2x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (2,0,2,8,1) \\ b = & (2,0,8,2,1) \\ c = & (2,1,8,0,2) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{47}{193}, -\frac{139}{193}, \frac{632}{193}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{16}{193}, \frac{158}{193}, -\frac{138}{193}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 8 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & \frac{47}{193} & -\frac{139}{193} & \frac{632}{193} \\ 0 & 1 & \frac{16}{193} & \frac{158}{193} & -\frac{138}{193} \end{vmatrix} = -\frac{3108}{193}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ -6 & 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & -1 & 2 \\ -2 & -6 & 1 & 8 & -1 \\ 8 & -1 & -2 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 0 & -1 & -1 \\ -6 & 6 & 6 & -6 & 0 \\ 0 & 6 & -13 & 6 & 3 \\ -2 & -4 & 7 & 7 & -9 \\ 8 & -9 & -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 13 & 13 & 13 & 12 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 3 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 13 & 13 & 13 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, 1, 0, 0),\ a_2 = (-1, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 2-x & -4 & 2 \\ 0 & -x-2 & 2 \\ 1 & -2 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{1}{2}, 1\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81023	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Николай Юлиянов Николов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 3x_1 & +6x_2 & -2x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ -8x_1 & -3x_2 & -3x_3 & -2x_4 & -x_5 & =0 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +4x_4 & +8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (3,0,2,8,1) \\ b = & (1,8,3,0,2) \\ c = & (8,1,3,0,2) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{56}{19}, \frac{37}{38}, -\frac{21}{19}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{123}{95}, \frac{18}{19}, -\frac{96}{95}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 3 & 0 & 2 \\ 8 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -\frac{56}{19} & \frac{37}{38} & -\frac{21}{19} \\ 0 & 1 & -\frac{123}{95} & \frac{18}{19} & -\frac{96}{95} \end{vmatrix} = \frac{18571}{19}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ -6 & 1 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & -7 & -1 & 2 \\ -3 & -6 & 2 & 8 & -1 \\ 8 & -1 & -3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 1 & -2 & -1 \\ -6 & 7 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & -12 & 6 & 3 \\ -3 & -3 & 8 & 6 & -9 \\ 8 & -9 & -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, 0, 0, 1),\ a_2 = (\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -4 & 4 & 5 \\ 5 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 4-x & -2 & -3 \\ -4 & 4-x & 5 \\ 5 & -3 & -x-5 \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & 5 \\ 5 & -3 & -8 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, -1, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81024	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Иван Иванов Минев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 4x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +8x_4 & +x_5 & =0 \\ -x_1 & +4x_2 & +2x_3 & -8x_4 & -2x_5 & =0 \\ -3x_1 & -8x_2 & -x_3 & +4x_4 & +2x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (4,0,2,8,1) \\ b = & (8,2,1,0,4) \\ c = & (4,8,1,2,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{1}{8}, -\frac{31}{32}, \frac{7}{2}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{1}{4}, -\frac{17}{16}, 6\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 & 8 & 1 \\ 8 & 2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 8 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{8} & -\frac{31}{32} & \frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{17}{16} & 6 \end{vmatrix} = -\frac{2461}{4}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -7 & -1 & 2 \\ -4 & -6 & 3 & 8 & -1 \\ 8 & -1 & -4 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 2 & -3 & -1 \\ -6 & 8 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & -11 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 9 & 5 & -9 \\ 8 & -9 & -3 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 6 & 4 & 12 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 4 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 8 & 6 & 4 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 7-x & -5 & -1 \\ 4 & -x-2 & -1 \\ 6 & -4 & -x-2 \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 4 & -5 & -1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 6 & -4 & -5 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81025	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Валентин Пламенов Димитров**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -5x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +8x_4 & +x_5 & =0 \\ -5x_1 & +8x_2 & -2x_3 & -x_4 & -3x_5 & =0 \\ x_1 & +5x_2 & -2x_3 & +x_4 & +8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (5,0,2,8,1) \\ b = & (5,8,1,2,0) \\ c = & (2,1,0,5,8) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{317}{182}, \frac{24}{91}, -\frac{54}{91}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{629}{182}, \frac{54}{91}, \frac{15}{91}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 2 & 8 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 8 \\ 1 & 0 & -\frac{317}{182} & \frac{24}{91} & -\frac{54}{91} \\ 0 & 1 & \frac{629}{182} & \frac{54}{91} & \frac{15}{91} \end{vmatrix} = \frac{62745}{182}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 2 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ -6 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -7 & -1 & 2 \\ -5 & -6 & 4 & 8 & -1 \\ 8 & -1 & -5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -6 & 3 & -4 & -1 \\ -6 & 9 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & -10 & 6 & 3 \\ -5 & -1 & 10 & 4 & -9 \\ 8 & -9 & -4 & -1 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 12 & 15 & 7 & 10 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 12 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 12 & 15 & 7 & 10 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 12 & 5 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (0, -\frac{2}{3}, 0, 1),\ a_2 = (-1, \frac{1}{3}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 15 & -7 \\ -6 & 10 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-9 & 15 & -7 \\ -6 & 10-x & -4 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -11 & 15 & -7 \\ -6 & 8 & -4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81030	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Радослав Георгиев Георгиев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V : \left| \begin{array}{llllll} -2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & +8x_4 & +x_5 & =0 \\ -8x_1 & -x_2 & +3x_3 & -2x_4 & +4x_5 & =0 \\ -6x_1 & -8x_2 & +3x_3 & -6x_4 & +x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (0,0,3,8,1) \\ b = & (1,3,0,0,8) \\ c = & (3,0,1,8,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{68}{3}, -10, 14\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -32, -\frac{29}{2}, 17\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{68}{3} & -10 & 14 \\ 0 & 1 & -32 & -\frac{29}{2} & 17 \end{vmatrix} = \frac{53897}{6}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & 8 & 0 & 0 \\ -3 & 8 & -7 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -1 & 8 & -2 \\ 8 & -2 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 2 & 11 & -8 & 0 \\ -3 & 11 & -15 & 6 & 4 \\ 0 & -5 & 4 & 9 & -10 \\ 8 & -10 & 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 10 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 7 & 10 & 7 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (0, -1, 0, 1),\ a_2 = (-1, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x & -2 & 4 \\ -2 & -x-1 & 5 \\ 0 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ -2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 1, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81031	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Гюлджан Ибраим Купен**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ -x_1 & +x_2 & -4x_3 & +3x_4 & +8x_5 & =0 \\ -3x_1 & +x_2 & -8x_3 & -x_4 & +3x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (1,0,3,8,1) \\ b = & (8,1,1,3,0) \\ c = & (8,1,3,0,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{13}{33}, -\frac{1}{33}, -\frac{2}{33}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{26}{165}, -\frac{31}{165}, \frac{4}{165}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{13}{33} & -\frac{1}{33} & -\frac{2}{33} \\ 0 & 1 & \frac{26}{165} & -\frac{31}{165} & \frac{4}{165} \end{vmatrix} = -\frac{1558}{55}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 7 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & -7 & -1 & 3 \\ -1 & -5 & 0 & 8 & -2 \\ 8 & -2 & -1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -2 & 0 & -1 \\ -5 & 3 & 9 & -7 & 0 \\ -2 & 9 & -14 & 6 & 4 \\ -1 & -4 & 5 & 8 & -10 \\ 8 & -10 & 1 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 8 & 15 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 9 & 18 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 8 & 15 & 11 & 12 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 9 & 18 & 12 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (1, -\frac{4}{3}, 0, 1),\ a_2 = (-2, \frac{1}{3}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-2 & 1 & -1 \\ -2 & 1-x & 1 \\ 0 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([0, 1, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81032	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Андрей Петров Русев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} 2x_1 & +5x_2 & +3x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ 8x_1 & +2x_2 & +x_3 & -x_4 & +3x_5 & =0 \\ 3x_1 & +8x_2 & +x_3 & +2x_4 & +3x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (2,0,3,8,1) \\ b = & (0,8,3,1,2) \\ c = & (2,8,1,3,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{157}{30}, \frac{5}{3}, -\frac{11}{30}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{29}{10}, -2, -\frac{23}{10}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 8 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{157}{30} & \frac{5}{3} & -\frac{11}{30} \\ 0 & 1 & \frac{29}{10} & -2 & -\frac{23}{10} \end{vmatrix} = \frac{8402}{15}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ -5 & -1 & 6 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -7 & -1 & 3 \\ -2 & -5 & 1 & 8 & -2 \\ 8 & -2 & -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -5 & -1 & -1 & -1 \\ -5 & 4 & 7 & -6 & 0 \\ -1 & 7 & -13 & 6 & 4 \\ -2 & -3 & 6 & 7 & -10 \\ 8 & -10 & 0 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 10 & 5 & 10 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 11 & 7 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 2 \\ 10 & 5 & 10 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 11 & 7 & 11 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}, 0, 1),\ a_2 = (-1, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 8 & 4 \\ -4 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-6 & 8 & 4 \\ -4 & 6-x & 2 \\ 0 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -8 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, 2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81033	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Михаил Лазаров Петрушев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -3x_1 & +5x_2 & -3x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ 6x_1 & +8x_2 & -3x_3 & -x_4 & +3x_5 & =0 \\ -2x_1 & +8x_2 & +3x_3 & -x_4 & -3x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (3,0,3,8,1) \\ b = & (0,3,3,1,8) \\ c = & (1,3,0,8,3) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{61}{6}, 2, -\frac{23}{2}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{59}{2}, 8, -\frac{59}{2}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 8 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 0 & 8 & 3 \\ 1 & 0 & -\frac{61}{6} & 2 & -\frac{23}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{59}{2} & 8 & -\frac{59}{2} \end{vmatrix} = \frac{2229}{2}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -7 & -1 & 3 \\ -3 & -5 & 2 & 8 & -2 \\ 8 & -2 & -3 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 0 & -2 & -1 \\ -5 & 5 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -12 & 6 & 4 \\ -3 & -2 & 7 & 6 & -10 \\ 8 & -10 & -1 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 8 & 13 & 7 & 15 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 3 \\ 5 & 8 & 4 & 9 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 8 & 13 & 7 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (3, -3, 0, 1),\ a_2 = (4, -3, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 5 \\ 5 & -3 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 4-x & -4 & 5 \\ 5 & -x-3 & 4 \\ 4 & -2 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 \\ 5 & -6 & 4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{3}{2}, 1\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81039	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Мария Стефанова Манчева**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 9x_1 & +3x_2 & -3x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ 9x_1 & +x_2 & -6x_3 & -3x_4 & -8x_5 & =0 \\ -6x_1 & +8x_2 & +9x_3 & +3x_4 & +x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (9,0,3,8,1) \\ b = & (1,3,8,9,0) \\ c = & (1,3,9,0,8) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{41}{50}, -\frac{18}{25}, \frac{39}{50}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{121}{150}, -\frac{14}{25}, \frac{47}{50}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 3 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 8 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 9 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & \frac{41}{50} & -\frac{18}{25} & \frac{39}{50} \\ 0 & 1 & -\frac{121}{150} & -\frac{14}{25} & \frac{47}{50} \end{vmatrix} = -\frac{41649}{50}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 9 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 9 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 9 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 9 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & -7 & -1 & 3 \\ -9 & -5 & 8 & 8 & -2 \\ 8 & -2 & -9 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -5 & 6 & -8 & -1 \\ -5 & 11 & -7 & 1 & 0 \\ 6 & -7 & -6 & 6 & 4 \\ -9 & 4 & 13 & 0 & -10 \\ 8 & -10 & -7 & 4 & 13 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 7 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 11 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1),\ a_2 = (-2, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 2-x & -5 & 2 \\ -2 & -x & 4 \\ 1 & -2 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, 0, \frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81040	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Пламен Малинов Каращранов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} 2x_1 & +3x_2 & -4x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ 4x_1 & +x_2 & -2x_3 & -x_4 & -8x_5 & =0 \\ 5x_1 & -8x_2 & +x_3 & -4x_4 & +x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (0,0,4,8,1) \\ b = & (4,8,1,0,0) \\ c = & (8,1,0,4,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{275}{189}, \frac{202}{189}, \frac{46}{63}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{205}{63}, -\frac{83}{63}, -\frac{11}{21}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{275}{189} & \frac{202}{189} & \frac{46}{63} \\ 0 & 1 & \frac{205}{63} & -\frac{83}{63} & -\frac{11}{21} \end{vmatrix} = -\frac{52877}{63}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 8 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -7 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & -1 & 8 & -3 \\ 8 & -3 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -4 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 12 & -8 & 0 \\ -4 & 12 & -15 & 6 & 5 \\ 0 & -4 & 3 & 9 & -11 \\ 8 & -11 & 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 9 & 5 & 7 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 \\ 9 & 5 & 7 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 9 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{2}{3}, 0, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 2 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 2 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 1, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81041	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Николина Йорданова Ванчева**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V : \left| \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & -4x_2 & +4x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ -x_1 & +4x_2 & +8x_3 & -2x_4 & -x_5 & =0 \\ 8x_1 & -x_2 & +4x_3 & +x_4 & -x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (1,0,4,8,1) \\ b = & (0,8,1,4,1) \\ c = & (4,0,1,8,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{45}{14}, \frac{9}{7}, \frac{155}{7}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{13}{14}, \frac{3}{7}, -\frac{30}{7}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{45}{14} & \frac{9}{7} & \frac{155}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{30}{7} \end{vmatrix} = \frac{9630}{7}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & 7 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & -7 & -1 & 4 \\ -1 & -4 & 0 & 8 & -3 \\ 8 & -3 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 10 & -7 & 0 \\ -3 & 10 & -14 & 6 & 5 \\ -1 & -3 & 4 & 8 & -11 \\ 8 & -11 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 12 & 10 & 10 & 9 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 8 & 6 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 12 & 10 & 10 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-2, \frac{3}{2}, 0, 1),\ a_2 = (0, -1, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-5 & 10 & -8 \\ 1 & -x & 1 \\ 5 & -8 & 8-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -8 & 10 & -8 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, -1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81042	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Николай Светлинов Божанов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V : \left| \begin{array}{rrrrrl} -2x_1 & -3x_2 & +4x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ -2x_1 & -8x_2 & +2x_3 & -4x_4 & +x_5 & =0 \\ 8x_1 & +2x_2 & +x_3 & +x_4 & +4x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (2,0,4,8,1) \\ b = & (1,2,4,0,8) \\ c = & (8,0,4,2,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{32}{3}, -\frac{16}{3}, 2\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{221}{6}, -\frac{103}{6}, 13\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{32}{3} & -\frac{16}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{221}{6} & -\frac{103}{6} & 13 \end{vmatrix} = -2266$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -7 & -1 & 4 \\ -2 & -4 & 1 & 8 & -3 \\ 8 & -3 & -2 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -4 & -2 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 8 & -6 & 0 \\ -2 & 8 & -13 & 6 & 5 \\ -2 & -2 & 5 & 7 & -11 \\ 8 & -11 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-2, 1, 0, 0),\ a_2 = (-1, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 16 & -12 \\ -7 & 11 & -7 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-10 & 16 & -12 \\ -7 & 11-x & -7 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -12 & 16 & -12 \\ -7 & 9 & -7 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, -1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81047	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Димитър Атанасов Лазаров**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 7x_1 & -3x_2 & -4x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ -x_1 & +5x_2 & -4x_3 & +8x_4 & +7x_5 & =0 \\ 7x_1 & -8x_2 & +x_3 & +3x_4 & +4x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (7,0,4,8,1) \\ b = & (4,1,7,8,0) \\ c = & (0,1,7,8,4) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}, 1\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{9}{2}, \frac{5}{2}, -1\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 8 & 4 \\ 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{9}{2} & \frac{5}{2} & -1 \end{vmatrix} = 72$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -7 & -1 & 4 \\ -7 & -4 & 6 & 8 & -3 \\ 8 & -3 & -7 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 3 & -6 & -1 \\ -4 & 7 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & -8 & 6 & 5 \\ -7 & 3 & 10 & 2 & -11 \\ 8 & -11 & -4 & 3 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 11 & 10 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ 11 & 10 & 8 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (0, -1, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 16 & 4 \\ -6 & 10 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-10 & 16 & 4 \\ -6 & 10-x & 2 \\ -1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -12 & 16 & 4 \\ -6 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 1, -1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81048	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Радослав Боянов Комитов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrr} 8x_1 & +6x_2 & +4x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ -3x_1 & +x_2 & -8x_3 & -8x_4 & +4x_5 & =0 \\ x_1 & +8x_2 & -4x_3 & +4x_4 & +8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (8,0,4,8,1) \\ b = & (8,1,4,0,8) \\ c = & (8,1,8,4,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{217}{192}, \frac{21}{64}, -\frac{41}{48}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{151}{192}, \frac{11}{64}, -\frac{71}{48}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & 0 & 8 \\ 8 & 1 & 8 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{217}{192} & \frac{21}{64} & -\frac{41}{48} \\ 0 & 1 & -\frac{151}{192} & \frac{11}{64} & -\frac{71}{48} \end{vmatrix} = \frac{10885}{12}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -7 & -1 & 4 \\ -8 & -4 & 7 & 8 & -3 \\ 8 & -3 & -8 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 4 & -7 & -1 \\ -4 & 8 & -4 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -7 & 6 & 5 \\ -8 & 4 & 11 & 1 & -11 \\ 8 & -11 & -5 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-4, 0, 1, 1),\ a_2 = (-1, 1, 0, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -14 & 4 \\ 1 & -4 & 2 \\ 3 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 5-x & -14 & 4 \\ 1 & -x-4 & 2 \\ 3 & -7 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 2 & -14 & 4 \\ 1 & -7 & 2 \\ 3 & -7 & -1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81049	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Ваня Янева Гушева**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -9x_1 & -4x_2 & -4x_3 & -8x_4 & -x_5 & =0 \\ -6x_1 & +9x_2 & -8x_3 & +x_4 & -4x_5 & =0 \\ x_1 & -4x_2 & +8x_3 & -5x_4 & -9x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (9,0,4,8,1) \\ b = & (1,4,0,9,8) \\ c = & (8,4,1,0,9) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{174}{229}, -\frac{166}{229}, -\frac{37}{229}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{619}{916}, -\frac{211}{229}, \frac{153}{229}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 4 & 8 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 9 & 8 \\ 8 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & -\frac{174}{229} & -\frac{166}{229} & -\frac{37}{229} \\ 0 & 1 & \frac{619}{916} & -\frac{211}{229} & \frac{153}{229} \end{vmatrix} = \frac{210212}{229}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 9 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 9 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 9 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 9 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & -1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & -7 & -1 & 4 \\ -9 & -4 & 8 & 8 & -3 \\ 8 & -3 & -9 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -4 & 5 & -8 & -1 \\ -4 & 9 & -6 & 1 & 0 \\ 5 & -6 & -6 & 6 & 5 \\ -9 & 5 & 12 & 0 & -11 \\ 8 & -11 & -6 & 5 & 12 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 12 & 12 & 15 & 18 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 12 & 12 & 15 & 18 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & 8 & 9 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (0, -\frac{3}{2}, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 5-x & -3 & -4 \\ -1 & 1-x & 2 \\ 3 & -1 & -x-3 \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -6 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, 0, \frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81050	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Ангел Павлов Ангелов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} 4x_1 & -3x_2 & -5x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ 8x_1 & +6x_2 & -5x_3 & +6x_4 & -x_5 & =0 \\ 5x_1 & +x_2 & +8x_3 & +x_4 & +6x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (0,0,5,8,1) \\ b = & (0,0,1,5,8) \\ c = & (1,8,5,0,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{275}{207}, -\frac{133}{207}, -\frac{517}{207}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{185}{414}, -\frac{152}{207}, -\frac{265}{414}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 1 & 8 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{275}{207} & -\frac{133}{207} & -\frac{517}{207} \\ 0 & 1 & \frac{185}{414} & -\frac{152}{207} & -\frac{265}{414} \end{vmatrix} = -\frac{24622}{207}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -5 & 8 & 0 & 0 \\ -5 & 8 & -7 & -1 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 8 & -4 \\ 8 & -4 & 0 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -5 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 13 & -8 & 0 \\ -5 & 13 & -15 & 6 & 6 \\ 0 & -3 & 2 & 9 & -12 \\ 8 & -12 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (0, -2, 0, 1),\ a_2 = (-1, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & -1 \\ 1 & 1-x & -1 \\ 4 & -2 & -x-2 \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81053	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Мартин Йорданов Минчев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -3x_1 & -4x_2 & -5x_3 & -8x_4 & -x_5 & =0 \\ 8x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -5x_4 & -x_5 & =0 \\ 8x_1 & +5x_2 & +x_3 & +3x_4 & -3x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (3,0,5,8,1) \\ b = & (5,0,3,1,8) \\ c = & (0,8,5,1,3) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -41, \frac{71}{3}, \frac{38}{3}\right)$, $v_2 = (0, 1, -23, 13, 7)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 0 & 3 & 1 & 8 \\ 0 & 8 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -41 & \frac{71}{3} & \frac{38}{3} \\ 0 & 1 & -23 & 13 & 7 \end{vmatrix} = \frac{8978}{3}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & -7 & -1 & 5 \\ -3 & -3 & 2 & 8 & -4 \\ 8 & -4 & -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -2 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 7 & -5 & 0 \\ -2 & 7 & -12 & 6 & 6 \\ -3 & 0 & 5 & 6 & -12 \\ 8 & -12 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 13 & 11 & 12 & 8 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 6 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 13 & 11 & 12 & 8 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 6 & 11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -8 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 2-x & -8 & 4 \\ 0 & -x-2 & 2 \\ 1 & -3 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 0 & -8 & 4 \\ 0 & -4 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81054	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Людмил Добромиров Делчев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -4x_1 & -6x_2 & -5x_3 & -8x_4 & -x_5 & =0 \\ 4x_1 & -5x_2 & +x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ -4x_1 & -x_2 & +8x_3 & +3x_4 & -5x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (4,0,5,8,1) \\ b = & (0,1,8,4,5) \\ c = & (1,4,0,8,5) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{64}{89}, \frac{16}{89}, -\frac{164}{89}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{9}{356}, -\frac{247}{356}, -\frac{205}{356}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 0 & 8 & 5 \\ 1 & 0 & -\frac{64}{89} & \frac{16}{89} & -\frac{164}{89} \\ 0 & 1 & \frac{9}{356} & -\frac{247}{356} & -\frac{205}{356} \end{vmatrix} = \frac{17751}{356}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 5 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -7 & -1 & 5 \\ -4 & -3 & 3 & 8 & -4 \\ 8 & -4 & -4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -1 & -3 & -1 \\ -3 & 2 & 5 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & -11 & 6 & 6 \\ -4 & 1 & 6 & 5 & -12 \\ 8 & -12 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 11 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 12 & 13 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 9 & 11 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \\ 12 & 13 & 11 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{1}{5}, -\frac{1}{5}, 0, 1),\ a_2 = (\frac{3}{5}, -\frac{7}{5}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 1-x & 1 & -1 \\ 0 & 2-x & -1 \\ 2 & 0 & -x-2 \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81055	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Мила Ангелова Тошева**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 5x_1 & +4x_2 & +5x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ -8x_1 & -5x_2 & +4x_3 & +5x_4 & -x_5 & =0 \\ -3x_1 & -8x_2 & +x_3 & -5x_4 & +5x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (5,0,5,8,1) \\ b = & (0,5,1,5,8) \\ c = & (0,8,5,1,5) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{7}{9}, \frac{4}{3}, \frac{16}{9}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{119}{243}, \frac{92}{81}, \frac{641}{243}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 8 & 5 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & \frac{7}{9} & \frac{4}{3} & \frac{16}{9} \\ 0 & 1 & \frac{119}{243} & \frac{92}{81} & \frac{641}{243} \end{vmatrix} = -\frac{13873}{81}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -1 & 5 \\ -5 & -3 & 4 & 8 & -4 \\ 8 & -4 & -5 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 0 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -10 & 6 & 6 \\ -5 & 2 & 7 & 4 & -12 \\ 8 & -12 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 12 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 10 & 8 & 12 & 6 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 0, 1),\ a_2 = (-2, 1, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -7 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-4 & 2 & 0 \\ -7 & 4-x & 0 \\ -1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -6 & 2 & 0 \\ -7 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([0, 0, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81056	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Светлин Трифонов Василев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} 6x_1 & +6x_2 & +5x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ 5x_1 & +6x_2 & -5x_3 & -x_4 & +8x_5 & =0 \\ 6x_1 & +x_2 & +5x_3 & +2x_4 & -8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (6,0,5,8,1) \\ b = & (6,8,1,0,5) \\ c = & (8,1,0,5,6) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{128}{7}, -11, \frac{66}{7}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{387}{35}, -7, \frac{37}{7}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 8 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & \frac{128}{7} & -11 & \frac{66}{7} \\ 0 & 1 & \frac{387}{35} & -7 & \frac{37}{7} \end{vmatrix} = \frac{16592}{5}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 6 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -7 & -1 & 5 \\ -6 & -3 & 5 & 8 & -4 \\ 8 & -4 & -6 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 & -5 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -9 & 6 & 6 \\ -6 & 3 & 8 & 3 & -12 \\ 8 & -12 & -2 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 9 & 18 & 15 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 6 & 12 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 1 \\ 9 & 18 & 15 & 9 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 6 & 12 & 10 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (1, -1, 0, 1),\ a_2 = (-1, -\frac{1}{3}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-2 & 0 & 4 \\ -2 & 2-x & 2 \\ 0 & -1 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81057	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Стефан Николаев Николов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -7x_1 & -2x_2 & -5x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ 7x_1 & +x_2 & -5x_3 & +6x_4 & +8x_5 & =0 \\ 7x_1 & -5x_2 & +8x_3 & -5x_4 & +x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (7,0,5,8,1) \\ b = & (8,0,1,7,5) \\ c = & (0,5,8,7,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{113}{115}, -\frac{47}{115}, -\frac{136}{115}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{261}{805}, -\frac{326}{805}, \frac{307}{805}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 8 & 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 5 & 8 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{113}{115} & -\frac{47}{115} & -\frac{136}{115} \\ 0 & 1 & \frac{261}{805} & -\frac{326}{805} & \frac{307}{805} \end{vmatrix} = -\frac{70443}{161}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 5 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 7 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -7 & -1 & 5 \\ -7 & -3 & 6 & 8 & -4 \\ 8 & -4 & -7 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 2 & -6 & -1 \\ -3 & 5 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -8 & 6 & 6 \\ -7 & 4 & 9 & 2 & -12 \\ 8 & -12 & -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 10 & 7 & 5 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 9 & 6 & 18 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 10 & 7 & 5 & 15 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 9 & 6 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{3}{2}, 0, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{1}{2}, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -11 & 19 & -28 \\ -7 & 11 & -14 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-11 & 19 & -28 \\ -7 & 11-x & -14 \\ 0 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -14 & 19 & -28 \\ -7 & 8 & -14 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, 0, -\frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81058	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Александър Спасов Попов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -8x_1 & -3x_2 & +5x_3 & -8x_4 & +x_5 & =0 \\ x_1 & +2x_2 & +8x_3 & +5x_4 & +8x_5 & =0 \\ -5x_1 & +6x_2 & +8x_3 & -x_4 & -8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (8,0,5,8,1) \\ b = & (1,0,5,8,8) \\ c = & (8,8,0,5,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{67}{154}, -\frac{57}{77}, -\frac{15}{154}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{4}{11}, -\frac{6}{11}, \frac{5}{11}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 5 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 8 & 8 \\ 8 & 8 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{67}{154} & -\frac{57}{77} & -\frac{15}{154} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{11} & -\frac{6}{11} & \frac{5}{11} \end{vmatrix} = -\frac{287}{11}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 5 & 8 \\ 0 & 5 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 5 \\ 5 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 5 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -7 & -1 & 5 \\ -8 & -3 & 7 & 8 & -4 \\ 8 & -4 & -8 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -3 & 3 & -7 & -1 \\ -3 & 6 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & -7 & 6 & 6 \\ -8 & 5 & 10 & 1 & -12 \\ 8 & -12 & -4 & 5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 12 & 8 & 4 & 10 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 12 & 8 & 4 & 10 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{1}{3}, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 11 & -5 \\ -4 & 6 & -2 \\ 2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-7 & 11 & -5 \\ -4 & 6-x & -2 \\ 2 & -5 & 4-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -10 & 11 & -5 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, -2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81063	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Евгени Сотиров Батев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 3x_1 & -x_2 & +6x_3 & -8x_4 & -x_5 & =0 \\ 3x_1 & +8x_2 & +6x_3 & +x_4 & -3x_5 & =0 \\ x_1 & +3x_2 & +8x_3 & +6x_4 & +x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (3,0,6,8,1) \\ b = & (3,8,1,0,6) \\ c = & (8,1,6,0,3) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{44}{163}, \frac{18}{163}, \frac{81}{163}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{36}{163}, -\frac{89}{163}, \frac{333}{163}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 6 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 8 & 1 & 6 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -\frac{44}{163} & \frac{18}{163} & \frac{81}{163} \\ 0 & 1 & -\frac{36}{163} & -\frac{89}{163} & \frac{333}{163} \end{vmatrix} = -\frac{125630}{163}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 6 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & -7 & -1 & 6 \\ -3 & -2 & 2 & 8 & -5 \\ 8 & -5 & -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 8 & -5 & 0 \\ -3 & 8 & -12 & 6 & 7 \\ -3 & 1 & 4 & 6 & -13 \\ 8 & -13 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 12 & 15 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 7 & 10 & 12 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (0, -\frac{3}{2}, 0, 1),\ a_2 = (-1, -\frac{1}{2}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 7-x & -10 & -3 \\ 1 & -x-3 & 1 \\ 3 & -4 & -x-1 \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 4 & -10 & -3 \\ 1 & -6 & 1 \\ 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81064	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Любослав Красимиров Кънев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 4x_1 & -3x_2 & -6x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ x_1 & +4x_2 & +8x_3 & -6x_4 & -3x_5 & =0 \\ -x_1 & +6x_2 & +3x_3 & -8x_4 & -4x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (4,0,6,8,1) \\ b = & (4,1,0,6,8) \\ c = & (4,1,0,8,6) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{7}{23}, -\frac{29}{46}, \frac{18}{23}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{2}{23}, \frac{117}{230}, \frac{63}{115}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 6 & 8 \\ 4 & 1 & 0 & 8 & 6 \\ 1 & 0 & -\frac{7}{23} & -\frac{29}{46} & \frac{18}{23} \\ 0 & 1 & \frac{2}{23} & \frac{117}{230} & \frac{63}{115} \end{vmatrix} = -\frac{18294}{115}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 6 & 4 \\ 0 & 6 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -7 & -1 & 6 \\ -4 & -2 & 3 & 8 & -5 \\ 8 & -5 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 6 & -4 & 0 \\ -2 & 6 & -11 & 6 & 7 \\ -4 & 2 & 5 & 5 & -13 \\ 8 & -13 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 15 & 12 & 15 & 15 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 \\ 15 & 12 & 15 & 15 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & 8 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (1, -\frac{5}{2}, 0, 1),\ a_2 = (-1, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 11 & -16 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-7 & 11 & -16 \\ -2 & 1-x & 1 \\ 2 & -5 & 9-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -10 & 11 & -16 \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, -2, -2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81065	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Стефан Георгиев Петров**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -5x_1 & -3x_2 & +6x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ x_1 & -6x_2 & -x_3 & -8x_4 & +5x_5 & =0 \\ x_1 & +6x_2 & -5x_3 & +8x_4 & -2x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (5,0,6,8,1) \\ b = & (1,0,6,5,8) \\ c = & (8,5,0,1,6) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{20}{39}, \frac{89}{312}, \frac{14}{39}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{9}{13}, \frac{3}{104}, \frac{18}{13}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 6 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 6 & 5 & 8 \\ 8 & 5 & 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & \frac{20}{39} & \frac{89}{312} & \frac{14}{39} \\ 0 & 1 & \frac{9}{13} & \frac{3}{104} & \frac{18}{13} \end{vmatrix} = -\frac{90235}{312}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 8 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 5 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -7 & -1 & 6 \\ -5 & -2 & 4 & 8 & -5 \\ 8 & -5 & -5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & 4 & -10 & 6 & 7 \\ -5 & 3 & 6 & 4 & -13 \\ 8 & -13 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 12 & 12 & 10 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 12 & 12 & 10 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 9 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (2, -2, 0, 1),\ a_2 = (0, -1, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-2 & 2 & -2 \\ 1 & -x & 2 \\ 2 & -2 & 4-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([0, 1, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81066	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Александра Крумова Цветкова**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -6x_1 & +x_2 & -6x_3 & +8x_4 & +x_5 & =0 \\ -x_1 & -3x_2 & -6x_3 & -6x_4 & -8x_5 & =0 \\ 6x_1 & -8x_2 & +2x_3 & -x_4 & -6x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (6,0,6,8,1) \\ b = & (6,1,6,8,0) \\ c = & (1,8,6,6,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{563}{566}, -\frac{23}{283}, \frac{193}{283}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{351}{566}, \frac{139}{283}, -\frac{342}{283}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 1 & 6 & 8 & 0 \\ 1 & 8 & 6 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{563}{566} & -\frac{23}{283} & \frac{193}{283} \\ 0 & 1 & \frac{351}{566} & \frac{139}{283} & -\frac{342}{283} \end{vmatrix} = -\frac{1771}{283}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 6 & 8 & 1 \\ 6 & 8 & 1 & 0 & 6 \\ 6 & 6 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 6 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 6 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -7 & -1 & 6 \\ -6 & -2 & 5 & 8 & -5 \\ 8 & -5 & -6 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & -5 & -1 \\ -2 & 2 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 6 & 7 \\ -6 & 4 & 7 & 3 & -13 \\ 8 & -13 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 13 & 10 & 15 & 12 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & 12 & 11 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 13 & 10 & 15 & 12 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 8 & 12 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (1, -\frac{5}{2}, 0, 1),\ a_2 = (0, -\frac{3}{2}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 7 \\ -2 & -1 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x & -3 & 7 \\ -2 & -x-1 & 7 \\ 0 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 7 \\ -2 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81071	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Явор Венциславов Големанов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} x_1 & -3x_2 & +7x_3 & -8x_4 & -x_5 & =0 \\ x_1 & +7x_2 & -6x_3 & -x_4 & +8x_5 & =0 \\ -x_1 & +8x_2 & -7x_3 & -x_4 & +x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (1,0,7,8,1) \\ b = & (8,1,0,1,7) \\ c = & (0,7,1,8,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{9}{50}, 0, -\frac{13}{50}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{239}{225}, \frac{5}{9}, -\frac{2}{225}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 7 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{9}{50} & 0 & -\frac{13}{50} \\ 0 & 1 & \frac{239}{225} & \frac{5}{9} & -\frac{2}{225} \end{vmatrix} = -\frac{18262}{25}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -6 & 7 & 0 & 0 \\ -6 & 7 & -7 & -1 & 7 \\ -1 & -1 & 0 & 8 & -6 \\ 8 & -6 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -6 & 0 & -1 \\ -1 & -5 & 13 & -7 & 0 \\ -6 & 13 & -14 & 6 & 8 \\ -1 & 0 & 1 & 8 & -14 \\ 8 & -14 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 7 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 3 \\ 7 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{5}{4}, -\frac{1}{4}, 0, 1),\ a_2 = (-\frac{7}{4}, \frac{1}{4}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-x & 0 \\ 4 & -2 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([0, 0, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81072	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Йордан Руменов Русев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 2x_1 & -5x_2 & -7x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ -x_1 & -5x_2 & +8x_3 & -2x_4 & -7x_5 & =0 \\ -3x_1 & +2x_2 & -x_3 & -8x_4 & -7x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (2,0,7,8,1) \\ b = & (8,7,0,1,2) \\ c = & (7,0,2,1,8) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{13}{432}, -\frac{83}{288}, -\frac{41}{432}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{113}{432}, \frac{223}{288}, -\frac{275}{432}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 8 & 1 \\ 8 & 7 & 0 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & -\frac{13}{432} & -\frac{83}{288} & -\frac{41}{432} \\ 0 & 1 & \frac{113}{432} & \frac{223}{288} & -\frac{275}{432} \end{vmatrix} = -\frac{2711}{96}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & 6 & 0 & 0 \\ -5 & 6 & -7 & -1 & 7 \\ -2 & -1 & 1 & 8 & -6 \\ 8 & -6 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 11 & -6 & 0 \\ -5 & 11 & -13 & 6 & 8 \\ -2 & 1 & 2 & 7 & -14 \\ 8 & -14 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 18 & 15 & 15 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 18 & 15 & 15 & 6 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 18 & 15 & 15 & 6 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 18 & 15 & 15 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{1}{3}, 0, 0, 1),\ a_2 = (0, -1, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 7 \\ -2 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-1 & -2 & 7 \\ -2 & -x-1 & 7 \\ -1 & 0 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 7 \\ -2 & -2 & 7 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81073	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Мартин Илиев Касапов**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -3x_1 & -2x_2 & +7x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ -8x_1 & -7x_2 & -x_3 & +6x_4 & +3x_5 & =0 \\ 7x_1 & -8x_2 & -3x_3 & -x_4 & -4x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (3,0,7,8,1) \\ b = & (1,3,0,7,8) \\ c = & (0,7,8,3,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{1}{30}, \frac{49}{90}, \frac{143}{90}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{143}{90}, \frac{403}{270}, -\frac{319}{270}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 7 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 7 & 8 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{1}{30} & \frac{49}{90} & \frac{143}{90} \\ 0 & 1 & -\frac{143}{90} & \frac{403}{270} & -\frac{319}{270} \end{vmatrix} = \frac{498437}{270}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 8 & 1 \\ 3 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 3 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 5 & 0 & 0 \\ -4 & 5 & -7 & -1 & 7 \\ -3 & -1 & 2 & 8 & -6 \\ 8 & -6 & -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -4 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 9 & -5 & 0 \\ -4 & 9 & -12 & 6 & 8 \\ -3 & 2 & 3 & 6 & -14 \\ 8 & -14 & 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 11 & 11 & 12 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 9 & 12 & 8 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 \\ 11 & 11 & 12 & 8 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 9 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (0, 0, -\frac{2}{3}, 1),\ a_2 = (-1, 1, 0, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 1-x & -1 & 1 \\ -1 & 1-x & 1 \\ 2 & 0 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 2\,x^2 + 2\,x - 4.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 2$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 2$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81074	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Катя Пламенова Христовска**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -4x_1 & -6x_2 & -7x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ -4x_1 & -x_2 & -2x_3 & -7x_4 & +8x_5 & =0 \\ 6x_1 & -4x_2 & -8x_3 & +7x_4 & +x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (4,0,7,8,1) \\ b = & (4,1,7,8,0) \\ c = & (8,0,7,4,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{218}{5}, -\frac{656}{15}, -\frac{146}{3}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -11, -\frac{31}{3}, -\frac{35}{3}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 8 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 7 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{218}{5} & -\frac{656}{15} & -\frac{146}{3} \\ 0 & 1 & -11 & -\frac{31}{3} & -\frac{35}{3} \end{vmatrix} = -\frac{9884}{5}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 7 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 7 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 4 \\ 0 & 7 & 4 & 8 & 1 \\ 4 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & -7 & -1 & 7 \\ -4 & -1 & 3 & 8 & -6 \\ 8 & -6 & -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -3 & -3 & -1 \\ -1 & -2 & 7 & -4 & 0 \\ -3 & 7 & -11 & 6 & 8 \\ -4 & 3 & 4 & 5 & -14 \\ 8 & -14 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 12 & 12 & 12 & 11 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 12 & 12 & 12 & 11 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-1, 1, 0, 0),\ a_2 = (-1, 0, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 10 & -8 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-5 & 10 & -8 \\ 1 & -x & 1 \\ 5 & -8 & 8-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -8 & 10 & -8 \\ 1 & -3 & 1 \\ 5 & -8 & 5 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, -1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81079	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Димитър Христов Бакърджиев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 9x_1 & +4x_2 & +7x_3 & +8x_4 & +x_5 & =0 \\ -9x_1 & -7x_2 & +8x_3 & +2x_4 & -x_5 & =0 \\ -8x_1 & +x_2 & -9x_3 & -x_4 & -7x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (9,0,7,8,1) \\ b = & (1,9,8,7,0) \\ c = & (1,8,7,0,9) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{22}{17}, -\frac{33}{17}, -\frac{43}{17}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{91}{85}, -\frac{111}{85}, -\frac{89}{85}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 9 & 0 & 7 & 8 & 1 \\ 1 & 9 & 8 & 7 & 0 \\ 1 & 8 & 7 & 0 & 9 \\ 1 & 0 & \frac{22}{17} & -\frac{33}{17} & -\frac{43}{17} \\ 0 & 1 & \frac{91}{85} & -\frac{111}{85} & -\frac{89}{85} \end{vmatrix} = -\frac{1152}{17}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 7 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 9 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 7 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 9 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 7 & 9 \\ 0 & 7 & 9 & 8 & 1 \\ 9 & 8 & 1 & 0 & 7 \\ 7 & 9 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 7 & 9 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -7 & -1 & 7 \\ -9 & -1 & 8 & 8 & -6 \\ 8 & -6 & -9 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 & -8 & -1 \\ -1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -6 & 6 & 8 \\ -9 & 8 & 9 & 0 & -14 \\ 8 & -14 & -3 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 12 & 18 & 6 & 15 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 12 & 18 & 6 & 15 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 12 & 18 & 6 & 15 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 12 & 18 & 6 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 1),\ a_2 = (0, -\frac{1}{3}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 1-x & -4 & 3 \\ 1 & -x-2 & 2 \\ 4 & -6 & 4-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 1, 2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81080	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Яна Василева Козарова**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -4x_1 & -x_2 & +8x_3 & -8x_4 & -x_5 & =0 \\ 8x_1 & -5x_2 & -2x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ -x_1 & -8x_2 & +5x_3 & -8x_4 & -2x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (0,0,8,8,1) \\ b = & (8,0,8,0,1) \\ c = & (1,8,0,8,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{1}{6}, -\frac{31}{48}, \frac{5}{2}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, -5\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 0 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 0 & 8 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{31}{48} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -5 \end{vmatrix} = \frac{964}{3}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & -7 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & 8 & -7 \\ 8 & -7 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -8 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 16 & -8 & 0 \\ -8 & 16 & -15 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & -1 & 9 & -15 \\ 8 & -15 & 7 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 15 & 12 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 6 & 15 & 12 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-7, 0, 2, 1),\ a_2 = (-1, 1, 0, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & -3 \\ -2 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-5 & 8 & -3 \\ -2 & 4-x & -1 \\ 2 & -2 & 2-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -6 & 8 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, -2])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81081	7	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Габриела Иванова Лухова**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -x_1 & +6x_2 & -8x_3 & -8x_4 & -x_5 & =0 \\ x_1 & -x_2 & -x_3 & -8x_4 & +8x_5 & =0 \\ -6x_1 & -8x_2 & +x_3 & -x_4 & -8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (1,0,8,8,1) \\ b = & (0,1,8,8,1) \\ c = & (1,8,8,1,0) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{33}{65}, -\frac{5}{9}, -\frac{361}{585}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{119}{65}, -1, -\frac{42}{65}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 8 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 8 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{33}{65} & -\frac{5}{9} & -\frac{361}{585} \\ 0 & 1 & \frac{119}{65} & -1 & -\frac{42}{65} \end{vmatrix} = \frac{12793}{195}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 1 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 0 & 0 \\ -7 & 7 & -7 & -1 & 8 \\ -1 & 0 & 0 & 8 & -7 \\ 8 & -7 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -7 & 0 & -1 \\ 0 & -7 & 14 & -7 & 0 \\ -7 & 14 & -14 & 6 & 9 \\ -1 & 1 & 0 & 8 & -15 \\ 8 & -15 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & 7 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 12 & 10 & 11 & 9 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 \\ 7 & 6 & 7 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 1 \\ 12 & 10 & 11 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (-2, \frac{3}{2}, 0, 1),\ a_2 = (2, -\frac{7}{2}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 6 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-3 & 6 & -4 \\ 1 & -x & 1 \\ 3 & -4 & 4-x \end{vmatrix} = -x^3 + x^2 + 2\,x - 2.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 1$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 1$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -4 & 6 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, -1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81082	8	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Мартин Владимиров Петков**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} -2x_1 & -x_2 & -8x_3 & -8x_4 & -x_5 & =0 \\ x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +8x_4 & +8x_5 & =0 \\ x_1 & -2x_2 & +8x_3 & -8x_4 & +5x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (2,0,8,8,1) \\ b = & (2,0,1,8,8) \\ c = & (8,0,2,8,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, -\frac{27}{172}, -\frac{57}{688}, -\frac{7}{86}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, -\frac{17}{172}, -\frac{55}{688}, \frac{37}{86}\right)$. Така получаваме, че $U+V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 8 & 8 \\ 8 & 0 & 2 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{27}{172} & -\frac{57}{688} & -\frac{7}{86} \\ 0 & 1 & -\frac{17}{172} & -\frac{55}{688} & \frac{37}{86} \end{vmatrix} = -\frac{101199}{344}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 2 \\ 0 & 8 & 2 & 8 & 1 \\ 2 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 2 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & 6 & 0 & 0 \\ -6 & 6 & -7 & -1 & 8 \\ -2 & 0 & 1 & 8 & -7 \\ 8 & -7 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -6 & -1 & -1 \\ 0 & -6 & 12 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & -13 & 6 & 9 \\ -2 & 2 & 1 & 7 & -15 \\ 8 & -15 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 9 & 9 & 18 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 11 & 8 & 8 & 15 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 12 & 9 & 9 & 18 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 11 & 8 & 8 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (3, -6, 0, 1),\ a_2 = (0, -1, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-2 & 2 & 0 \\ -1 & 2-x & 0 \\ 3 & -4 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([0, 0, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81087	5	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Лилия Тихомирова Цветкова**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{llllll} 7x_1 & -6x_2 & +8x_3 & +8x_4 & +x_5 & =0 \\ 7x_1 & -2x_2 & -8x_3 & +x_4 & +8x_5 & =0 \\ 7x_1 & +8x_2 & -4x_3 & +x_4 & -8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (7,0,8,8,1) \\ b = & (8,0,8,7,1) \\ c = & (8,7,8,0,1) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{196}{225}, -\frac{133}{75}, \frac{49}{225}\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{47}{90}, \frac{2}{15}, \frac{34}{45}\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 0 & 8 & 7 & 1 \\ 8 & 7 & 8 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \frac{196}{225} & -\frac{133}{75} & \frac{49}{225} \\ 0 & 1 & \frac{47}{90} & \frac{2}{15} & \frac{34}{45} \end{vmatrix} = -\frac{42287}{450}$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 8 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 8 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & 8 & 7 & 8 & 1 \\ 7 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 7 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -7 & -1 & 8 \\ -7 & 0 & 6 & 8 & -7 \\ 8 & -7 & -7 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -1 & -6 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -8 & 6 & 9 \\ -7 & 7 & 6 & 2 & -15 \\ 8 & -15 & 0 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 9 & 18 & 15 & 15 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 15 & 12 & 13 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 & 2 \\ 9 & 18 & 15 & 15 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 7 & 15 & 12 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (1, -\frac{4}{3}, 0, 1),\ a_2 = (-1, -\frac{1}{3}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 7 \\ -7 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} -x-4 & 1 & 7 \\ -7 & 4-x & 7 \\ 0 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} -7 & 1 & 7 \\ -7 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l([1, 0, 1])$.

вариант	ф. номер	група	поток	курс	специалност
	81088	6	II	I	**Компютърни Науки**
Име:	**Даниел Емилов Манчев**				

Второ Домашно по Алгебра I
спец. Компютърни Науки
07.01.14

Задача 1. Да се намерят базисите на сумата и сечението на U и V, където:

$$V: \left| \begin{array}{rrrrrl} 8x_1 & +2x_2 & -8x_3 & +8x_4 & -x_5 & =0 \\ x_1 & -8x_2 & -8x_3 & +8x_4 & -2x_5 & =0 \\ 8x_1 & -8x_2 & -4x_3 & +x_4 & -8x_5 & =0 \end{array} \right.$$

и U е линейната обвивка на векторите:

$$\left| \begin{array}{ll} a = & (8,0,8,8,1) \\ b = & (8,1,8,8,0) \\ c = & (8,1,0,8,8) \end{array} \right.$$

Решение. *(1 точка)*

След решаване на V, получаваме, че $\dim(V) = 2$ и $V = l(v_1, v_2)$, където $v_1 = \left(1, 0, \frac{497}{24}, \frac{113}{6}, -7\right)$, $v_2 = \left(0, 1, \frac{47}{2}, 22, -10\right)$. Така получаваме, че $U + V = l(a, b, c, v_1, v_2)$. Пресмятаме така получената детерминанта:

$$\begin{vmatrix} 8 & 0 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 1 & 8 & 8 & 0 \\ 8 & 1 & 0 & 8 & 8 \\ 1 & 0 & \frac{497}{24} & \frac{113}{6} & -7 \\ 0 & 1 & \frac{47}{2} & 22 & -10 \end{vmatrix} = 1168$$

Следователно векторите са линейно независими (в частност a, b, c са линейно независими и $dim(U) = 3$) и съответно базис на $U + V$. От теоремата за размерностите на сума и сечение имаме, че $dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V) = dim(U + V) \Leftrightarrow 3 + 2 - dim(U \cap V) = 5 \Leftrightarrow dim(U \cap V) = 0$. Следователно $U \cap V$ е съставено единствено от нулевия вектор и няма базис.

Задача 2. Да се реши матричното уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .X. \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Решение. *(1 точка)* Полагаме $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X.B = Y$. Тогава

първоначалното уравнение придобива вида $AY = \begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. От където $Y = A^{-1}.\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 8 & 8 & 8 & 1 \\ 8 & 8 & 1 & 0 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 8 & 8 & 8 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & 8 \\ -8 & 0 & 7 & 8 & -7 \\ 8 & -7 & -8 & 0 & 7 \\ cr & & & & \end{pmatrix}$$

$X.B = Y \Rightarrow X = Y.B^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 6 & 9 \\ -8 & 8 & 7 & 1 & -15 \\ 8 & -15 & -1 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Нека $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^4)$, който спрямо даден базис има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

намерете базиси на $Ker\varphi$ и $Im\varphi$.

Решение. *(1 точка)* $Ker\varphi$ съвпада с множеството от решенията на системата

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

Решаваме системата и получаваме, че $Ker\varphi = l(a_1, a_2)$, където $a_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{7}{6}, 0, 1),\ a_2 = (0, -\frac{1}{3}, 1, 0)$. Тъй като $Im\varphi = l(\varphi(e_1), \varphi(e_2), \varphi(e_3), \varphi(e_4))$, а стълбовете на A са точно координатите на образите на базисните вектори и $rankA = 2$. То които и два стълба да изберем на A, те ще са базис на $Im\varphi$.

Задача 4. Да се намерят 1-мерните φ-инвариантните подпространства на $\mathbb{Q}^3$, ако линейният оператор $\varphi \in Hom(\mathbb{Q}^3)$ има матрица A:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -10 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

спрямо даден базис.

Решение. *(1 точка)* Нека U е φ-инвариантно подпространство на $\mathbb{Q}^3$. По дефиниция $\varphi(v) \in U$ за всяко $v \in U$ и тъй като U е 1-мерно, то $U = l(v)$, за някой вектор $v \in U$. Тоест $\varphi(v) = \lambda v$ за всяко $v \in U$. Следователно 1-мерните φ-инвариантни подпространства на $\mathbb{Q}^3$ са множествата от собствените вектори на φ.

$$f_\varphi(x) = det(A - xE) = \begin{vmatrix} 7-x & -10 & -3 \\ 1 & -x-3 & 1 \\ 3 & -4 & -x-1 \end{vmatrix} = -x^3 + 3\,x^2 + 2\,x - 6.$$

Следователно $\lambda_1 = \sqrt{2},\ \lambda_2 = -\sqrt{2},\ \lambda_3 = 3$, но $\lambda_1, \lambda_2 \notin \mathbb{Q}$. При $\lambda = 3$ решаваме хомогенната система $\begin{pmatrix} 4 & -10 & -3 \\ 1 & -6 & 1 \\ 3 & -4 & -4 \end{pmatrix}.X = 0$ и получаваме φ-инвариантното под пространство $U = l(\left[1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right])$.