Първо домашно, Алгебра I

специалност Компютърни Науки, I курс, II поток

Задача 1. *Пресметнете числото:*

$$\frac{(\sqrt{3}+5i)^n}{(4+2\sqrt{3}i)^n},$$

където n *е равно на факултетния Ви номер.*

Решение. *(1 т.)*

$$z = \frac{(\sqrt{3}+5i)^n}{(4+2\sqrt{3}i)^n} = \left(\frac{\sqrt{3}+5i}{4+2\sqrt{3}i}\right)^n = \left(\frac{(\sqrt{3}+5i)(4-2\sqrt{3}i)}{(4+2\sqrt{3}i)(4-2\sqrt{3}i)}\right)^n =$$
$$= \left(\frac{14\sqrt{3}+14i}{28}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n = \left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n = \cos n\frac{\pi}{6} + i\sin n\frac{\pi}{6}$$

Тъй като $\sin$ *и* $\cos$ *са с период* 2π *и* $2\pi : \frac{\pi}{6} = 12$, *взимаме остатъка на факутетният номер по модул 12, т.е нека* $n = 12k + r,\ k, r \in \mathbb{N}$. *Тогава аргумента на* $\arg z = r\ \frac{\pi}{6}$, *а модулът му е* $|z| = 1$. *Окончателно получаваме:*

- $r = 0 \Rightarrow z = \cos 0 + i\sin 0 = 1$
- $r = 1 \Rightarrow z = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$
- $r = 2 \Rightarrow z = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $r = 3 \Rightarrow z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$
- $r = 4 \Rightarrow z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $r = 5 \Rightarrow z = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$
- $r = 6 \Rightarrow z = \cos\pi + i\sin\pi = -1$
- $r = 7 \Rightarrow z = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$
- $r = 8 \Rightarrow z = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

- $r = 9 \Rightarrow z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$
- $r = 10 \Rightarrow z = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $r = 11 \Rightarrow z = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$

Задача 2. *Нека $\overline{abcde}$ е факултетният Ви номер (a е първата цифра, b е втората и т.н.).*

(а) *Намерете базис на $\mathbb{R}^3$ от вектори, чиито координати се състоят от цифрите на факултетния Ви номер, без повторения (векторът (a, b, c) е допустим, но векторът (a, a, b) - не).*

(б) *Проверете дали следните 5 вектора са линейно независими:*

$$\begin{aligned} a_1 &= (a, b, c, d, e) \\ a_2 &= (c, d, e, a, b) \\ a_3 &= (e, a, b, c, d) \\ a_4 &= (b, c, d, e, a) \\ a_5 &= (d, e, a, b, c) \end{aligned}$$

Решение. (а) *(0.25 т.) Нека разгледаме векторите (a, b, c), (c, a, b), (b, c, a) и да пресметнем детерминантата:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac) =$$

$$= \frac{1}{2}(a+b+c)((a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2)$$

$a + b + c = 0$, тогава и само тогава, когато $a = b = c = 0$, но $a \neq 0$, тъй като е първата цифра от факултетния номер. Тогава $a + b + c \neq 0$. $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$, но факултетният номер започва или с 80, или с 81, следователно $a \neq b$. От тук детерминантата е ненулева и трите вектора са линейно независими и съответно образуват базис на $\mathbb{R}^3$.

(б) *(0.75 т.) Условието е еквивалентно на това да проверим дали следната детерминанта е ненулева:*

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ c & d & e & a & b \\ e & a & b & c & d \\ b & c & d & e & a \\ d & e & a & b & c \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ e & a & b & c & d \\ d & e & a & b & c \\ c & d & e & a & b \\ b & c & d & e & a \end{vmatrix} = (-1)^3 \Delta_5$$

Δ_5 е циркулантната матрица от ред 5. Знаем, че $\Delta_5 = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)f(\varepsilon_3)f(\varepsilon_4)f(\varepsilon_5)$, където $f(x) = ex^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a$ и ε_i е i-тия корен на единицата. Тогава $\Delta_5 = 0 \Leftrightarrow \ a = b = c = d = e$. Последното знаем, че не е вярно и следователно $\Delta_5 \neq 0 \neq (-1)^3\Delta_5$. Окончателно 5-те вектора са линейно независими.

Задача 3. *Решете системата линейни уравнения, където $\overline{abcde}$ е факултетният Ви номер (a е първата цифра, b е втората и т.н.).*

$$\left|\begin{array}{l} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 + ex_5 = a \\ bx_1 + cx_2 + dx_3 + ex_4 + ax_5 = b \\ cx_1 + dx_2 + ex_3 + ax_4 + bx_5 = c \\ dx_1 + ex_2 + ax_3 + bx_4 + cx_5 = d \\ ex_1 + ax_2 + bx_3 + cx_4 + dx_5 = e \end{array}\right.$$

Решение. *(1 т.) Използвайки предната задача знаем, че детерминантата на матрицата на системата (Δ) е ненулева. От друга страна забелязваме, че:*

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ c & d & e & a & b \\ e & a & b & c & d \\ b & c & d & e & a \\ d & e & a & b & c \end{vmatrix} = \Delta \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & a & c & d & e \\ c & c & e & a & b \\ e & e & b & c & d \\ b & b & d & e & a \\ d & d & a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a & b & a & d & e \\ c & d & c & a & b \\ e & a & e & c & d \\ b & c & b & e & a \\ d & e & d & b & c \end{vmatrix} = 0 \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & a & e \\ c & d & e & c & b \\ e & a & b & e & d \\ b & c & d & b & a \\ d & e & a & d & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & b & c & d & a \\ c & d & e & a & c \\ e & a & b & c & e \\ b & c & d & e & b \\ d & e & a & b & d \end{vmatrix} = 0$$

От където използвайки формулите на Крамер получаваме, че систе-

мата има единствено решение задаващо се с формулите:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{\Delta} = 0$$
$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{0}{\Delta} = 0, \quad x_4 = \frac{\Delta_4}{\Delta} = \frac{0}{\Delta} = 0$$
$$x_5 = \frac{\Delta_5}{\Delta} = \frac{0}{\Delta} = 0$$

Окончателно системата има единствено решение $(1, 0, 0, 0, 0)$.

Задача 4. *Проверете дали следните множества са линейни подпространства:*

(а) $M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Q}^2 | nx + \left[\frac{n}{2}\right] y = 0\}$

(б) $M_2 = \{F(x) \in \mathbb{R}[x] | deg(F(x)) < 4, F(n) = 0\}$

където n *е факултетният Ви номер, а* $[x]$ *е най-голямото цяло число, ненадминаващо* x.

Решение. **(а)** *(0.5 т.) Очевидно* $\mathbb{M}_1 \in \mathbb{Q}^2$. *От друга страна* $\mathbb{Q}^2$ *е линейно пространство, следователно е достатъчно да докажем, че* $\mathbb{M}_1$ *е затворено относно събиране на вектори и умножение със скалар.*

1. *Нека* $a_1, a_2 \in \mathbb{M}_1$ *и* $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$.

$$\Rightarrow a_1 + a_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$\Rightarrow n(x_1 + x_2) + \left[\frac{n}{2}\right](y_1 + y_2) = nx_1 + nx_2 + \left[\frac{n}{2}\right] y_1 + \left[\frac{n}{2}\right] y_2 =$$
$$= nx_1 + \left[\frac{n}{2}\right] y_1 + nx_2 + \left[\frac{n}{2}\right] y_2 = 0 + 0 = 0$$
$$\Rightarrow a_1 + a_2 \in \mathbb{M}_1$$

2. *Нека* $a_1 \in \mathbb{M}_1$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ *и* $a_1 = (x_1, y_1)$

$$\Rightarrow \lambda a_1 = \lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$
$$\Rightarrow n(\lambda x_1) + \left[\frac{n}{2}\right](\lambda y_1) = \lambda n x_1 + \lambda \left[\frac{n}{2}\right] y_1 = \lambda(nx_1 + \left[\frac{n}{2}\right] y_1) = \lambda 0 = 0$$
$$\Rightarrow \lambda a_1 \in \mathbb{M}_1$$

Следователно $\mathbb{M}_1$ *е линейно пространство.*

(б) *(0.5 т.) Проверяваме, дали* $\mathbb{M}_2$ *е затворено относно събиране на вектори и умножение със скалар.*

1. *Нека* $f(x), g(x) \; \in \mathbb{M}_2$ *и* $f(x) + g(x) = h(x)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \; \deg h(x) = \max(f(x), g(x)) < 4 \\
&\quad\; h(n) = f(n) + g(n) = 0 + 0 = 0 \\
&\Rightarrow h(x) \in \mathbb{M}_1
\end{aligned}$$

2. *Нека* $f(x) \in \mathbb{M}_2$, $\lambda \in \mathbb{Q}$ *и* $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \lambda f(x) = \lambda a_3x^3 + \lambda a_2x^2 + \lambda a_1x + \lambda a_0 \\
&\Rightarrow \; \deg(\lambda f(x)) = \deg(f(x)) < 4, при \lambda \neq 0, ако \lambda = 0 \Rightarrow deg(\lambda f(x)) = 0 < 4 \\
&\quad\; \lambda f(n) = \lambda 0 = 0 \\
&\Rightarrow \lambda f(x) \in \mathbb{M}_1
\end{aligned}$$

Следователно $\mathbb{M}_2$ *е линейно пространство.*