Глава 5

Въпрос 5: Мономни наредби в полиномиален пръстен на няколко променливи - определение, свойства, примери.

Определение 5.1. *Нека M е множеството на мономите на $x_1, \ldots, x_n$. Всяко подмножество на Декартовото произведение $M \times M$ се нарича релация в M.*
Наредба $>$ в M е релация, изпълняваща условията:
(i) ако $x^\alpha > x^\beta$, то не е вярно $x^\beta > x^\alpha$;
(ii) ако $x^\alpha > x^\beta$ и $x^\beta > x^\gamma$, то $x^\alpha > x^\gamma$.

Определение 5.2. *Наредбата $>$ на мономи на $x_1, \ldots, x_n$ е линейна, ако за всеки два монома x^α и x^β е изпълнено точно едно от условията*

$$x^\alpha > x^\beta, \quad x^\alpha = x^\beta \quad \text{или} \quad x^\beta > x^\alpha.$$

За $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ и $x^\gamma = x_1^{\gamma_1} \ldots x_n^{\gamma_n}$ да положим $x^{\alpha+\gamma} = x_1^{\alpha_1+\gamma_1} \ldots x_n^{\alpha_n+\gamma_n}$.

Определение 5.3. *Наредбата $>$ на мономи на $x_1, \ldots, x_n$ е съгласувана с произведението, ако за произволни $x^\alpha > x^\beta$ и x^γ следва, че $x^{\alpha+\gamma} > x^{\beta+\gamma}$.*

Определение 5.4. *Наредбата $>$ на мономи на $x_1, \ldots, x_n$ се нарича артинова, ако всяко непразно множество от мономи на $x_1, \ldots, x_n$ има минимален елемент.*

Лема 5.5. *Наредбата $>$ на мономи на $x_1, \ldots, x_n$ е артинова тогава и само тогава, когато всяка строго намаляваща редица*

$$x^{\alpha(1)} > x^{\alpha(2)} > \ldots$$

прекъсва след краен брой стъпки.

Доказателство: Достатъчно е да установим, че $>$ не е добра наредба тогава и само тогава, когато съществува безкрайна строго намаляваща редица $x^{\alpha(1)} > x^{\alpha(2)} > \ldots$ от мономи на $x_1, \ldots, x_n$.
Ако наредбата $>$ не е артинова, то съществува непразно множество S от мономи на $x_1, \ldots, x_n$, което няма минимален елемент. Избираме произволен моном $x^{\alpha(1)} \in S$. Съгласно направеното предположение съществува $x^{\alpha(2)} \in S$, $x^{\alpha(1)} > x^{\alpha(2)}$. Доколкото $x^{\alpha(2)}$ не е минимален елемент на S, съществува $x^{\alpha(3)} \in S$, $x^{\alpha(2)} > x^{\alpha(3)}$. Продължавайки по този начин, за всяко естествено n и $x^{\alpha(n)} \in S$ намираме $x^{\alpha(n+1)} \in S$, $x^{\alpha(n)} > x^{\alpha(n+1)}$ и построяваме безкрайна строго намаляваща редица от мономи.
Обратно, всяка безкрайна строго намаляваща редица от мономи е непразно множество без минимален елемент, Q.E.D.

Определение 5.6. *Мономна наредба в $k[x_1, \ldots, x_n]$ е артинова линейна наредба на мономи на $x_1, \ldots, x_n$, която е съгласувана с произведението.*

Лема 5.7. *Нека k е поле, а $>$ е мономна наредба в $k[x_1, \ldots, x_n]$. Тогава*

$$x^\alpha \geq x^0 = x_1^0 \ldots x_n^0 = 1 \in k$$

за всички мономи $a^{\alpha} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ *на* $x_1, \dots, x_n$.

Доказателство: Да допуснем противното. Тогава съществува моном $x^{\alpha} < x^0$. Умножавайки почленно с $x^{n\alpha}$ за произволни естествени N, получаваме безкрайната строго намаляваща редица

$$x^0 > x^{\alpha} > x^{2\alpha} > \dots > x^{n\alpha} > x^{(n+1)\alpha} > \dots$$

от мономи на $x_1, \dots, x_n$. Това противоречи на факта, че $>$ е артинова наредба и доказва лемата, Q.E.D.

Лема-Определение 5.8. *Ще казваме, че мономът* x^{α} *е лексикографски по-голям от* x^{β}, *ако съществува* $1 \leq k \leq n$, *така че*

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, a_{k-1} = \beta_{k-1}, \alpha_k > \beta_k.$$

(При $k = 1$ *горното условие се свежда до* $\alpha_1 > \beta_1$.*) Така въведената релация е мономна наредба, която се нарича лексикографска наредба и се бележи с* $x^{\alpha} >_{\text{lex}} x^{\beta}$.

Доказателство: За да твърдим, че така определената релация е наредба на мономите на $x_1, \dots, x_n$, да предположим, че $x^{\alpha} >_{\text{lex}} x^{\beta}$. По определение това означава, че $\alpha_k > \beta_k$ за минималното естествено $1 \leq i \leq n$, за което $\alpha_i \neq \beta_i$. Това изключва предположението $x^{\beta} >_{\text{lex}} x^{\alpha}$, което се свежда до $\beta_l > \alpha_l$ за минималното естествено $1 \leq i \leq n$ с $\beta_i \neq \alpha_i$. По-нататък, ако $x^{\alpha} >_{\text{lex}} x^{\beta}$ и $x^{\beta} >_{\text{lex}} x^{\gamma}$, то съществуват $1 \leq k, l \leq n$, така че $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \alpha_k > \beta_k$ и $\beta_1 = \gamma_1, \dots, \beta_{l-1} = \gamma_{l-1}, \beta_l > \gamma_l$. За $k < l$ оттук следва $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1, \dots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1} = \gamma_{k-1}, \alpha_k > \beta_k = \gamma_k$, което означава, че $x^{\alpha} >_{\text{lex}} x^{\gamma}$. При $k = l$ имаме $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1, \dots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1} = \gamma_{k-1}, \alpha_k > \beta_k > \gamma_k$, което отново води до $x^{\alpha} >_{\text{lex}} x^{\gamma}$. Аналогично, ако $k > l$, то $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1, \dots, \alpha_{l-1} = \beta_{l-1} = \gamma_{l-1}, \alpha_l = \beta_l > \gamma_l$ отново дава $x^{\alpha} >_{\text{lex}} x^{\gamma}$. Следователно релацията $>_{\text{lex}}$ е наредба.
Още повече, за произволни два различни монома x^{α} и x^{β} на $x_1, \dots, x_n$ съществува $1 \leq i \leq n$ с $\alpha_i \neq \beta_i$. Ако k е минималното естествено число с това свойство, то $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}$. При $\alpha_k > \beta_k$ имаме $x^{\alpha} >_{\text{lex}} x^{\beta}$, а от $\alpha_k < \beta_k$ следва, че $x^{\beta} >_{\text{lex}} x^{\alpha}$. Следователно $>_{\text{lex}}$ е линейна наредба на мономите на $x_1, \dots, x_n$.
Съгласно Лема 5.5, достатъчно е да докажем, че всяка строго намаляваща редица

$$x^{\alpha(1)} >_{\text{lex}} x^{\alpha(2)} >_{\text{lex}} \dots$$

от мономи на $x_1, \dots, x_n$ се стабилизира след краен брой стъпки, за да твърдим, че лексикографската наредба $>_{\text{lex}}$ е артинова. Наистина, степенните показатели на x_1 в мономите $\{x^{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ образуват нерастяща редица от неотрицателни цели числа, която се стабилизира след краен брой стъпки. С други думи, съществува естествено ν_1, така че $\alpha(\nu_1)_1 = \alpha(k)_1$ за $\forall k \geq \nu_1$. По същият начин, степенните показатели на x_2 в мономите $\{x^{\alpha(k)}\}_{k=\nu_1}^{\infty}$ образуват нерастяща редица от неотрицателни цели числа, която се стабилизира след краен брой стъпки, $\alpha(k)_2 = \alpha(\nu_2)_2$ за $\forall k \geq \nu_2 \geq \nu_1$. Продължавайки по този начин получаваме, че $\alpha(k)_n = \alpha(\nu_n)_n$ за $\forall k \geq \nu_n$ или $\{x^{\alpha(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ се стабилизира след краен брой стъпки. Следователно наредбата $>_{\text{lex}}$ е артинова.
Накрая, за произволни мономи $x^{\alpha} >_{\text{lex}} x^{\beta}$ и x^{γ} на $x_1, \dots, x_n$ следва, че $x^{\alpha+\gamma} >_{\text{lex}} x^{\beta+\gamma}$. По-точно, ако $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{k-1} = \beta_{k-1}, \alpha_k > \beta_k$ за някое $1 \leq k \leq n$, то $\alpha_1 + \gamma_1 = \beta_1 + \gamma_1, \dots, \alpha_{k-1} + \gamma_{k-1} = \beta_{k-1} + \gamma_{k-1}, \alpha_k + \gamma_k > \beta_k + \gamma_k$, така че $x^{\alpha+\gamma} >_{\text{lex}} x^{\beta+\gamma}$. По този начин, лексикографската наредба $>_{\text{lex}}$ на мономи на $x_1, \dots, x_n$ е съгласувана с произведението и представлява мономна наредба, Q.E.D.

По определение, $x_1 >_{\mathrm{lex}} x_2 >_{\mathrm{lex}} \ldots >_{\mathrm{lex}} x_n$. Ако наредим буквите от азбуката $\text{а} > \text{б} > \ldots > \text{ю} > \text{я}$, то наредбата на думите в речник е лексикографска. Например,

$$\text{алгебра} > \text{алгоритъм},$$

доколкото първите три букви "алг" на тези думи съвпадат, а четвъртите букви са в неравенство $\text{е} > \text{о}$.
Ето и някои други мономни наредби:

Лема-Определение 5.9. *Ще казваме, че мономът x^α е градуирано лексикографски по-голям от x^β и ще записваме $x^\alpha >_{\mathrm{grlex}} x^\beta$, ако*

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i > \sum_{i=1}^n \beta_i = |\beta| \quad \text{или} \quad |\alpha| = |\beta| \text{ и } x^\alpha >_{\mathrm{lex}} x^\beta.$$

Така въведената релация е мономна наредба, наречена градуирано лексикографска наредба.

Доказателство: Да допуснем, че $x^\alpha >_{\mathrm{grlex}} x^\beta$ и $x^\beta >_{\mathrm{grlex}} x^\alpha$. Тогава от $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i \geq \sum_{i=1}^n \beta_i = |\beta|$ и $|\beta| \geq |\alpha|$ следва $|\alpha| = |\beta|$, така че $x^\alpha >_{\mathrm{lex}} x^\beta$ и $x^\beta >_{\mathrm{lex}} x^\alpha$. Последното е невъзможно съгласно Лема-Определение 5.8. Ако $x^\alpha >_{\mathrm{grlex}} x^\beta$ и $x^\beta >_{\mathrm{grlex}} x^\gamma$, то за $|\alpha| > |\beta| \geq |\gamma|$ или $|\alpha| \geq |\beta| > |\gamma|$ е ясно, че $x^\alpha >_{\mathrm{grlex}} x^\gamma$. В противен случай е в сила $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$, откъдето $x^\alpha >_{\mathrm{lex}} x^\beta$ и $x^\beta >_{\mathrm{lex}} x^\gamma$, така че $x^\alpha >_{\mathrm{lex}} x^\gamma$ съгласно Лема-Определение 5.8. По определението на $>_{\mathrm{grlex}}$ имаме $x^\alpha >_{\mathrm{grlex}} x^\gamma$. Следователно $>_{\mathrm{grlex}}$ е наредба.
Наредбата $>_{\mathrm{grlex}}$ е линейна, защото за произволни мономи x^α и x^β на $x_1, \ldots, x_n$ е изпълнено точно едно от равенствата $|\alpha| > |\beta|$, $|\alpha| = |\beta|$ или $|\alpha| < |\beta|$. Ако $|\alpha| > |\beta|$, то $x^\alpha >_{\mathrm{grlex}} x^\beta$. За $|\alpha| = |\beta|$ и $x^\alpha \neq x^\beta$ нека k е минималното естествено число от 1 до n със свойството $\alpha_k \neq \beta_k$. При $\alpha_k > \beta_k$ следва $x^\alpha >_{\mathrm{lex}} x^\beta$, откъдето $x^\alpha >_{\mathrm{grlex}} x^\beta$, а за $\alpha_k < \beta_k$ имаме $x^\beta >_{\mathrm{lex}} x^\alpha$, а оттам и $x^\beta >_{\mathrm{grlex}} x^\alpha$. Накрая, от $|\alpha| < |\beta|$ следва, че $x^\beta >_{\mathrm{grlex}} x^\alpha$.
Твърдим, че линейната наредба $>_{\mathrm{grlex}}$ е артинова. Съгласно Лема 5.5, достатъчно е да докажем, че всяка строго намаляваща редица $x^{\alpha(1)} >_{\mathrm{grlex}} x^{\alpha(2)} >_{\mathrm{grlex}} \ldots$ прекъсва след краен брой стъпки. Наистина, $|\alpha(1)|$ са неотрицателни цели числа, така че редицата $\{|\alpha(n)|\}_{n=1}^\infty$ се стабилизира след краен брой стъпки. Ако $|\alpha(n)| = |\alpha(N)|$ за някакво естествено число $N \in \mathbb{N}$, то неравенствата $x^{\alpha(N)} >_{\mathrm{grlex}} x^{\alpha(N+1)} >_{\mathrm{grlex}} \ldots$ са еквивалентни на $x^{\alpha(N)} >_{\mathrm{lex}} x^{\alpha(N+1)} >_{\mathrm{lex}} \ldots$. Съгласно Лема-Определение 5.8 съществува естествено число $M \geq N$, така че $x^{\alpha(M)} = x^{\alpha(M+1)} = \ldots$. По този начин, редицата $x^{\alpha(1)} >_{\mathrm{grlex}} x^{\alpha(2)} >_{\mathrm{grlex}} \cdots$ прекъсва след краен брой стъпки и $>_{\mathrm{grlex}}$ е артинова линейна наредба.
Накрая, ако $x^\alpha >_{\mathrm{grlex}} x^\beta$, то за произволен моном x^γ на $x_1, \ldots, x_n$ твърдим, че $x^{\alpha+\gamma} >_{\mathrm{grlex}} x^{\beta+\gamma}$. По-точно, ако $|\alpha| > |\beta|$, то $|\alpha+\gamma| = |\alpha| + |\gamma| > |\beta| + |\gamma| = |\beta+\gamma|$, така че $x^{\alpha+\gamma} >_{\mathrm{grlex}} x^{\beta+\gamma}$. За $|\alpha| = |\beta|$ и $x^\alpha >_{\mathrm{lex}} x^\beta$ следва, че $|\alpha+\gamma| = |\alpha| + |\gamma| = |\beta| + |\gamma| = |\beta+\gamma|$ и $x^{\alpha+\gamma} >_{\mathrm{lex}} x^{\beta+\gamma}$, откъдето $x^{\alpha+\gamma} >_{\mathrm{grlex}} x^{\beta+\gamma}$. Следователно наредбата $>_{\mathrm{grlex}}$ е съгласувана с произведението и представлява мономна наредба, Q.E.D.
Лесно се вижда, че $x_1 >_{\mathrm{grlex}} x_2 >_{\mathrm{grlex}} \ldots >_{\mathrm{grlex}} x_n$.

Лема-Определение 5.10. *Нека $x^\alpha >_{\mathrm{grevlex}} x^\beta$ за $|\alpha| > |\beta|$ или $|\alpha| = |\beta|$ и $\alpha_k < \beta_k, \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n$ за някое естествено $1 \leq k \leq n$. Тогава $>_{\mathrm{grevlex}}$ е мономна наредба, наречена обратно градуирано лексикографска наредба.*

Доказателство: Ако $x^\alpha >_{\mathrm{grevlex}} x^\beta$ и $x^\beta >_{\mathrm{grevlex}} x^\alpha$, то $|\alpha| \geq |\beta|$ и $|\beta| \geq |\alpha|$ водят до $|\alpha| = |\beta|$. В резултат, $\alpha_k < \beta_k, \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n$ противоречи на $x^\beta >_{\mathrm{grevlex}} x^\alpha$. За $x^\alpha >_{\mathrm{grevlex}} x^\beta$, $x^\beta >_{\mathrm{grevlex}} x^\gamma$ с $|\alpha| > |\beta| \geq |\gamma|$ или $|\alpha| \geq |\beta| > |\gamma|$ е ясно, че $x^\alpha >_{\mathrm{grevlex}} x^\gamma$. При $|\alpha| = |\beta| = |\gamma|$ имаме $\alpha_k < \beta_k, \alpha_{k+1} =$

$\beta_{k+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n$ и $\beta_l < \gamma_l, \beta_{l+1} = \gamma_{l+1}, \ldots, \beta_n = \gamma_n$ за подходящи естествени $1 \leq k, l \leq n$. Ако $k < l$, то $\alpha_l = \beta_l < \gamma_l, \alpha_{l+1} = \beta_{l+1} = \gamma_{l+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n = \gamma_n$ дават $x^\alpha >_{\mathrm{grevlex}} x^\gamma$. За $k = l$ имаме $\alpha_k < \beta_k < \gamma_k, \alpha_{k+1} = \beta_{k+1} = \gamma_{k+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n = \gamma_n$, откъдето $x^\alpha >_{\mathrm{grevlex}} x^\gamma$. Накрая, за $k > l$ е в сила $\alpha_k < \beta_k = \gamma_k, \alpha_{k+1} = \beta_{k+1} = \gamma_{k+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n = \gamma_n$, така че отново $x^\alpha >_{\mathrm{grevlex}} x^\gamma$. Следователно $>_{\mathrm{grevlex}}$ е наредба.

Наредбата $>_{\mathrm{grevlex}}$ е линейна, защото за всеки два различни монома x^α и x^β на $x_1, \ldots, x_n$ е в сила $|\alpha| > |\beta|$, $|\beta| > |\alpha|$ или $|\alpha| = |\beta|$ и съществува $1 \leq k \leq n$, така че $\alpha_k \neq \beta_k, \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Ако $|\alpha| > |\beta|$, то $x^\alpha >_{\mathrm{grevlex}} x^\beta$. От $|\alpha| < |\beta|$ следва, че $x^\beta >_{\mathrm{grevlex}} x^\alpha$. При $|\alpha| = |\beta|$ и $\alpha_k < \beta_k, \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n$ имаме $x^\alpha >_{\mathrm{grevlex}} x^\beta$, а за $|\alpha| = |\beta|$ и $\alpha_k > \beta_k, \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n$ получаваме, че $x^\beta >_{\mathrm{grevlex}} x^\alpha$.

Твърдим, че линейната наредба $>_{\mathrm{grevlex}}$ е артинова. За целта трябва да покажем, че всяка строго намаляваща редица от мономи $x^{\alpha(1)} >_{\mathrm{grevlex}} x^{\alpha(2)} >_{\mathrm{grevlex}} \ldots$ се стабилизира след краен брой стъпки. Наистина, нерастящата редица $\{|\alpha(n)|\}_{n=1}^\infty$ от неотрицателни цели числа се стабилизира след краен брой стъпки. Нека $M \in \mathbb{N}$ е такова естествено число, че $|\alpha(M)| = |\alpha(M+1)| = \ldots$. Степенните показатели на x_n в мономите $x^{\alpha(M)} >_{\mathrm{grevlex}} x^{\alpha(M+1)} >_{\mathrm{grevlex}} \ldots$ образуват ненамаляваща редица от цели числа, принадлежащи на интервала $[0, |\alpha(M)|]$. Следователно съществува максимален елемент на тази ненамаляваща редица. С други думи, съществува естествено число $\nu_n \geq M$, така че $\alpha(k)_n < \alpha(\nu_n)_n$ за $\forall M \leq k \leq \nu_n - 1$ и $\alpha(k)_n = \alpha(\nu_n)_n$ за $\forall k \geq \nu_n$. Аналогично, съществува естествено число $\nu_{n-1} \geq \nu_n$, така че $\alpha(k)_{n-1} < \alpha(\nu_{n-1})_{n-1}$ за $\forall \nu_n \leq k \leq \nu_{n-1} - 1$ и $\alpha(k)_{n-1} = \alpha(\nu_{n-1})_{n-1}$ за $\forall k \geq \nu_{n-1}$. Продължавайки по същия начин получаваме $\alpha(k)_1 < \alpha(\nu_1)_1$ за $\forall \nu_2 \leq k \leq \nu_1 - 1$ и $\alpha(k)_1 = \alpha(\nu_1)_1$ за $\forall k \geq \nu_1$. В резултат, разглежданата строго намаляваща редица $x^{\alpha(1)} >_{\mathrm{grevlex}} x^{\alpha(2)} >_{\mathrm{grevlex}} \ldots$ се стабилизира за $k \geq \nu_1$ и $>_{\mathrm{grevlex}}$ се оказва артинова наредба.

За произволни $x^\alpha >_{\mathrm{grevlex}} x^\beta$ и x^γ твърдим, че $x^{\alpha+\gamma} >_{\mathrm{grevlex}} x^{\beta+\gamma}$. Наистина, ако $|\alpha| > |\beta|$, то $|\alpha + \gamma| = |\alpha| + |\gamma| > |\beta + |\gamma| = |\beta + \gamma|$ и $x^{\alpha+\gamma} >_{\mathrm{grevlex}} x^{\beta+\gamma}$. При $|\alpha| = |\beta|$ и $\alpha_k < \beta_k, \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n$ за някое естествено $1 \leq k \leq n$ следва $|\alpha + \gamma| = |\alpha| + |\gamma| = |\beta| + |\gamma| = |\beta + \gamma|$ и $\alpha_k + \gamma_k < \beta_k + \gamma_k, \alpha_{k+1} + \gamma_{k+1} = \beta_{k+1} + \gamma_{k+1}, \ldots, \alpha_n + \gamma_n = \beta_n + \gamma_n$, откъдето $x^{\alpha+\gamma} >_{\mathrm{grevlex}} x^{\beta+\gamma}$. С това проверихме, че добрата линейна наредба на мономи $>_{\mathrm{grevlex}}$ е съгласувана с произведението, така че $>_{\mathrm{grevlex}}$ е мономна наредба, Q.E.D.

Непосредствено се вижда, че $x_1 >_{\mathrm{grevlex}} x_2 >_{\mathrm{grevlex}} \ldots >_{\mathrm{grevlex}} x_n$.

Задача 5.11. *Нека*

$$f(x, y, z) = 4xy^2z + 4z^2 - 5x^3 + 7x^2z^2 \in k[x, y, z]$$

е полином с коефициенти от поле k. *Да се наредят мономите на* $f(x, y, z)$ *в намаляващ ред относно:*

(а) лексикографската наредба $>_{\mathrm{lex}}$;

(б) градуирано лексикографската наредба $>_{\mathrm{grlex}}$;

(в) обратната градуирано лексикографската наредба $>_{\mathrm{grevlex}}$.

Решение: (а) $f(x, y, z) = -5x^3 + 7x^2z^2 + 4xy^2z + 4z^2$;

(б) $f(x, y, z) = 7x^2z^2 + 4xy^2z - 5x^3 + 4z^2$;

(в) $f(x, y, z) = 4xy^2z + 7x^2z^2 - 5x^3 + 4z^2$.

Определение 5.12. *Нека* $>$ *е мономна наредба в* $k[x_1, \ldots, x_n]$, *а* $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha x^\alpha \in k[x_1, \ldots, x_n]$ *е ненулев полином на* $x_1, \ldots, x_n$ *с коефициенти от полето* k.

(i) Водещият моном на f *е*

$$LM(f) = \max(x^\alpha \mid \alpha \in A,\ a_\alpha \neq 0),$$

където максимумът на мономите с ненулеви коефициенти е изчислен относно мономната наредба $>$.
(ii) Водещият коефициент на f е $LC(f) = a_\alpha$, ако $LM(f) = x^\alpha$.
(iii) Водещият член $LT(f) = LC(f)LM(f)$.

Лема 5.13. *Нека $>$ е мономна наредба в полиномите $k[x_1, \ldots, x_n]$ на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от поле k, а f и g са нетъждествено нулеви полиноми от $k[x_1, \ldots, x_n]$. Тогава:*
(i) $LM(fg) = LM(f)LM(g)$;
(ii) ако $f + g \neq 0$, то $LM(f + g) \leq \max(LM(f), LM(g))$ с $LM(f + g) = \max(LM(f), LM(g))$ при $LM(f) \neq LM(g)$ или $LM(f) = LM(g)$, $LC(f) + LC(g) \neq 0$.

Доказателство: Нека $LM(f) = x^\alpha$ и $LM(g) = x^\beta$. Тогава

$$f = a_\alpha x^\alpha + \sum_{x^\alpha > x^\gamma} a_\gamma x^\gamma, \quad g = b_\beta x^\beta + \sum_{x^\beta > x^\delta} b_\delta x^\delta.$$

(i) Съгласуваността на мономната наредба $>$ с произведението ни дава право да изведем $x^{\alpha+\beta} > x^{\gamma+\beta}$ от $x^\alpha > x^\gamma$. Аналогично, $x^\beta > x^\delta$ дава $x^{\alpha+\beta} > x^{\alpha+\delta}$. Сега $x^\alpha > x^\gamma$ след умножение с x^δ води до $x^{\alpha+\delta} > x^{\gamma+\delta}$. Следователно $x^{\alpha+\beta} > x^{\gamma+\delta}$, съгласно транзитивността на наредбата $>$. Вземайки предвид, че

$$fg = a_\alpha b_\beta x^{\alpha+\beta} + \sum_{x^\beta > x^\delta} a_\alpha b_\delta x^{\alpha+\delta} + \sum_{x^\alpha > x^\gamma} a_\gamma b_\beta x^{\gamma+\beta} + \sum_{x^\alpha > x^\gamma} \sum_{x^\beta > x^\delta} a_\gamma b_\delta x^{\gamma+\delta}$$

определяме старшия моном $LM(fg) = x^\alpha x^\beta = LM(f)LM(g)$.
(ii) Нека $f+g = a_\alpha x^\alpha + b_\beta x^\beta + \sum_{x^\alpha > x^\gamma} a_\gamma x^\gamma + \sum_{x^\beta > x^\delta} b_\delta x^\delta$ е нетъждествено нулев полином. Ако $x^\alpha > x^\beta$, то $LM(f+g) = x^\alpha = \max(x^\alpha, x^\beta) = \max(LM(f), LM(g))$. Аналогично, от $x^\beta > x^\alpha$ следва, че $LM(f+g) = x^\beta = \max(LM(f), LM(g))$. Ако $x^\alpha = x^\beta$ и $LC(f)+LC(g) = a_\alpha + b_\beta \neq 0$, то $LM(f+g) = x^\alpha = \max(LM(f), LM(g))$. За $x^\alpha = x^\beta$ и $LC(f) + LC(g) = 0$ имаме $LC(f+g) < x^\alpha = \max(LM(f), LM(g))$, Q.E.D.

Задачи

Задача 5.14. *Да разгледаме полиномите*
(а) $f(x, y, z) = 2x + 3y + z + x^2 - z^2 + x^3$;
(б) $f(x, y, z) = 2x^2y^8 - 3x^5yz^4 + xyz^3 - xy^4$ с коефициенти от поле k. Да се наредят мономите на $f(x, y, z)$ в намаляващ ред относно
(i) лексикографската наредба $>_{\rm lex}$;
(ii) градуирано лексикографската наредба $>_{\rm grlex}$;
(iii) обратната градуирано лексикографска наредба $>_{\rm grevlex}$.
Да се посочи водещия моном $LM(f)$, водещия коефициент $LC(f)$ и водущия член $LT(f)$.

Задача 5.15. *Всеки от следните полиноми*

$$f(x, y, z) = 7x^2y^4z - 2xy^6 + x^2y^2,$$
$$g(x, y, z) = xy^3z + xy^2z^2 + x^2z^3,$$
$$h(x, y, z) = x^4y^5z + 2x^3y^2z - 4xy^2z^4$$

е записан в низходящ ред на мономите относно точно една от мономните наредби $>_{\rm lex}$, $>_{\rm grlex}$ или $>_{\rm grevlex}$. Да се определи коя мономна наредба е използвана за подреждане на мономите на f, g и h.

Задача 5.16. *Ще казваме, че $x^\alpha >_{\rm invlex} x^\beta$ относно обратната лексикографска наредба, ако съществува $1 \leq k \leq n$, така че $\alpha_k > \beta_k, \alpha_{k+1} = \beta_{k+1}, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Да се докаже, че $>_{\rm invlex}$ е мономна наредба.*

Задача 5.17. *Нека* $>$ *е мономна наредба в* $k[x_1, \ldots, x_n]$. *Да се докаже, че:*
(i) ако x^α *дели* x^β, *то* $x^\alpha \leq x^\beta$, *но съществуват мономи* $x^\beta \geq x^\alpha$, *за които* x^α *не дели* x^β;
(ii) x^α *е минималният елемент на множеството от мономи* $x^{\alpha+\beta}$, *където* x^β *пробягва всички мономи на* $x_1, \ldots, x_n$.