Глава 18

Въпрос 18: Операции върху полиномиални идеали и операции върху афинни многообразия. Съответствие между прости идеали и неприводими многообразия.

Определение 18.1. *Ако I и J са идеали в комутативен пръстен с единица R, то тяхната сума се определя като множеството*

$$I + J := \{a + b \,|\, a \in I,\, b \in J\}$$

на сумите на елемент от I с елемент от J.

Лема 18.2. *Ако I и J са идеали в комутативен пръстен с единица R, то:*
(i) $I + J$ е идеал в R;
(ii) $I + J$ е минималният идеал в R, съдържащ I и J;
(iii) ако $I = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle$ и $J = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ се пораждат от свои крайни подмножества, то

$$I + J = \langle a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \rangle$$

се поражда от обединението на тези подмножества.

Доказателство: (i) Ако $a_1 + b_1, a_2 + b_2 \in I + J$ с $a_i \in I$, $b_j \in J$, то $(a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)$ с $a_1 - a_2 \in I$ и $b_1 - b_2 \in J$. Освен това, за произволен елемент $r \in R$ е изпълнено $r(a_1 + b_1) = ra_1 + rb_1 \in I + J$ с $ra_1 \in I$ и $rb_1 \in J$. Следователно $I + J$ е идеал в R.
(ii) Ако $H \triangleleft R$ е идеал в R, съдържащ I и J, то H съдържа всички елементи от вида $a + b$ с $a \in I$ и $b \in J$. С други думи, $I + J \subseteq H$. Доколкото нулевият елемент 0_R на R принадлежи както на I, така и на J, от $a + 0_R \in I + J$ за всяко $a \in I$ и $0_R + b \in I + J$ за всяко $b \in J$ следва, че $I + J$ съдържа I и J. По този начин, $I + J$ се оказва минималният идеал в R, съдържащ I и J.
(iii) Ако

$$I = \langle a_1, \ldots, a_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i r_i \,|\, r_i \in R,\, \forall 1 \leq i \leq m \right\}$$

и

$$J = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{n} b_j s_j \,|\, s_j \in R,\, \forall 1 \leq j \leq n \right\},$$

то

$$I + J = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i r_i + \sum_{j=1}^{n} b_j s_j \,|\, r_i, s_j \in R,\, \forall 1 \leq i \leq m,\, \forall 1 \leq j \leq n \right\} =$$

$$\langle a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n \rangle,$$

Q.E.D.
Следващата лема показва връзката между сумата на полиномиални идеали и сечението на съответните им многообразия.

Лема 18.3. *Ако I и J са идеали в пръстена $k[x_1,\dots,x_n]$ на полиномите на $x_1,\dots,x_n$ с коефициенти от поле k, то афинните многообразия на $I, J, I+J$ са свързани с равенството*

$$V(I+J)=V(I)\cap V(J).$$

Доказателство: Ако $a=(a_1,\dots,a_n)\in V(I+J)\subseteq k^n$, то $(f+g)(a)=f(a)+g(a)=0$ за произволни $f\in I$ и $g\in J$. В частност, $0=(f+0)(a)=f(a)+0=f(a)$ за $\forall f\in I$, така че $a\in V(I)$. Аналогично, $0=(0+g)(a)=0+g(a)=g(a)$ за $\forall g\in J$, откъдето $a\in V(J)$. Това доказва, че $V(I+J)\subseteq V(I)\cap V(J)$.
Обратно, ако $a\in V(I)\cap V(J)$, то $f(a)=0$ за $\forall f\in I$ и $g(a)=0$ за $\forall g\in J$. Следователно $(f+g)(a)=f(a)+g(a)=0+0=0$ и $a\in V(I+J)$. По този начин, $V(I)\cap V(J)\subseteq V(I+J)$, откъдето и $V(I+J)=V(I)\cap V(J)$, Q.E.D.
Във Въпрос 2 видяхме, че ако $X_1=V(f_1,\dots,f_s)\subseteq k^n$ и $X_2=V(g_1,\dots,g_t)\subseteq k^n$, то обединението

$$X_1\cup X_2=V(f_ig_j\,|\,1\le i\le s,\,1\le j\le t)\subseteq k^n,$$

е афинно многообразие чиито уравнения са всевъзможните произведения f_ig_j на уравнение f_i на X_1 с уравнение g_j на X_2. Следващата лема установява, че обединението на афинни многообразия съответства на сечението на техните идеали.

Лема 18.4. *Ако $X\subseteq k^n$ и $Y\subseteq k^n$ са афинни многообразия, то идеалите на $X, Y, X\cup Y$ са свързани с равенството*

$$I(X\cup Y)=I(X)\cap I(Y).$$

Доказателство: Условието $f\in I(X\cup Y)$ е еквивалентно на $f|_{X\cup Y}\equiv 0$. Оттук следва, че $f|_X\equiv 0$ и $f|_Y\equiv 0$, така че $f\in I(X)$ и, съответно, $f\in I(Y)$. По този начин получаваме, че $I(X\cup Y)\subseteq I(X)\cap I(Y)$.
Обратно, ако $f\in I(X)capI(Y)$, то $f|_X\equiv 0$ и $f|_Y\equiv 0$ са достатъчни за $f|_{X\cup Y}\equiv 0$ и водят до $f\in I(X\cup Y)$. Следователно $I(X)\cap I(Y)\subseteq I(X\cup Y)$, а оттам и $I(X\cup Y)=I(X)\cap I(Y)$, Q.E.D.

Определение 18.5. *Ако I и J са идеали в комутативния пръстен с единица R, то тяхното произведение се определя като множеството*

$$IJ=\left\{\sum_{i=1}^{k}a_ib_i\,|\,a_i\in I,\,b_i\in J\right\}$$

от крайните суми на произведения на елементи от I с елементи от J.

Лема 18.6. *(i) Ако I и J са идеали в комутативния пръстен с единица R, то тяхното произведение IJ е идеал в R.*
(ii) Ако $I=\langle a_1,\dots,a_m\rangle$ и $J=\langle b_1,\dots,b_n\rangle$ са крайнопородени идеали в комутативен пръстен с единица R, то произведението

$$IJ=\langle a_ib_j\,|\,1\le i\le m,\,1\le j\le n\rangle$$

се поражда от всевъзможните произведения на пораждащ на I с пораждащ на J.

Доказателство: (i) Ако $a_i,a_i'\in I$ и $b_j,b_j'\in J$, то $\left(\sum\limits_{i=1}^{k}a_ib_i\right)\left(\sum\limits_{j=1}^{l}a_j'b_j'\right)=$
$\sum a_ib_i+\sum\limits_{j=1}^{l}(-a_j'b_j')=\sum\limits_{i=1}^{k}a_ib_i\sum\limits_{j=1}^{l}(-a_j')b_j'\in IJ$, доколкото $I\lhd R$. По-нататък, за $\forall r\in R$ имаме $r\left(\sum\limits_{i=1}^{k}a_ib_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{k}r(a_ib_i)=\sum\limits_{i=1}^{k}(ra_i)b_i\in IJ$, вземайки предвид, че $ra_i\in I$. Следователно IJ е идеал в R.

(ii) Ако

$$I = \langle a_1, \dots a_m \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{m} a_i r_i \,|\, r_i \in R, \, \forall 1 \leq i \leq m \right\}$$

и

$$J = \langle b_1, \dots, b_n \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{n} b_j s_j \,|\, s_j \in R, \, \forall 1 \leq j \leq n \right\},$$

то IJ е множеството на елементите на R от вида

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{m} r_{ij} a_j \right) \left(\sum_{l=1}^{n} s_{il} b_l \right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{k} r_{ij} s_{il} \right) a_j b_l = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \rho_{jl} a_j b_l$$

с произволни $r_{ij}, s_{il} \in R$ и $\rho_{jl} := \sum\limits_{i=1}^{k} r_{ij} s_{il} \in R$. Това множество съвпада с идеала на R, породен от $a_j b_l$ за всички $1 \leq j \leq m$, $1 \leq l \leq n$, т.е. $IJ = \langle a_i b_j \,|\, 1 \leq j \leq m, \, 1 \leq j \leq n \rangle$, Q.E.D.

Следващата лема установява, че произведението на полиномиални идеали отговаря на обединението на съответните им афинни многообразия.

Лема 18.7. *Ако I и J са идеали в $k[x_1, \dots, x_n]$, то афинното многообразие на тяхното произведение е обединение на техните афинни многообразия,*

$$V(IJ) = V(I) \cup V(J).$$

Доказателство: Ако допуснем, че точката $a \in V(IJ)$ и $a \notin V(I)$, то съществува полином $f \in I$ със стойност $f(a) \neq 0$. Но за всички $g \in J$ имаме $fg \in IJ$, така че $0 = (fg)(a) = f(a)g(a)$. Следователно $g(a) = 0$ за $\forall g \in J$ и $a \in V(J)$. Това доказва, че $V(IJ) \subseteq V(I) \cup V(J)$.

Обратно, ако $a \in V(I)$, то $f(a) = 0$ за $\forall f \in I$. В резултат, всеки полином $\sum\limits_{i=1}^{k} f_i g_i \in IJ$ с $f_i \in I$ и $g_i \in J$ има стойност $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} f_i g_i \right)(a) = \sum f_i(a) g_i(a) = \sum\limits_{i=1}^{k} 0 g_i(a) = 0$ в точката a. Оттук $a \in V(IJ)$ или $V(I) \subseteq V(IJ)$. Аналогично се установява, че $V(J) \subseteq V(IJ)$, откъдето $V(I) \cup V(J) \subseteq V(IJ)$. Това доказва, че $V(IJ) = V(I) \cup V(J)$, Q.E.D.

За пълнота ще напомним следната

Лема 18.8. *Ако I и J са идеали в комутативен пръстен с единица R, то теоретико-множественото сечение $I \cap J$ е идеал в R.*

Доказателство: Ако $a, b \in I \cap J$, то $a, b \in I$ и $a, b \in J$. Доколкото I и J са идеали в R, оттук следва, че $a - b \in I$ и $a - b \in J$. С други думи, $a - b \in I \cap J$ и $(I \cap J, +)$ е подгрупа на $(R, +)$. За произволни $a \in I \cap J$ и $r \in R$ от $a \in I \triangleleft R$ следва $ra \in I$. Аналогично, от $a \in J \triangleleft R$ получаваме $ra \in J$ и стигаме до извода, че $ra \in I \cap J$. Следователно $I \cap J$ издържа умножения с $r \in R$ и е идеал в R, Q.E.D.

Следващата лема свързва радикала на $I \cap J \triangleleft R$ с радикалите на $I \triangleleft R$ и $J \triangleleft R$.

Лема 18.9. *Ако I и J са идеали в комутативен пръстен с единица R, то радикалът на тяхното сечение*

$$r(I \cap J) = r(I) \cap r(J)$$

съвпада със сечението на радикалите на I и J.

Доказателство: Ако $r_o \in r(I \cap J)$, то съществува $m \in \mathbb{N}$, така че $r_o^m \in I \cap J$. В резултат $r_o^m \in I$ и $r_o^m \in J$, откъдето $r_o \in r(I)$ и $r_o \in r(J)$. Това установява включването $r(I \cap J) \subseteq r(I) \cap r(J)$.

Обратно, ако $r_o \in r(I) \cap r(J)$, то съществуват $m, n \in \mathbb{N}$, така че $r_o^m \in I$ и $r_o^n \in J$. По този начин, за $M := \max(m, n)$ следва, че $r_o^M = r_o^m r_o^{M-m} \in I \lhd R$ и $r_o^M = r_o^n r_o^{M-n} \in J \lhd R$. С други думи, $r_o^M \in I \cap J$, откъдето $r_o \in r(I \cap J)$. Това доказва включването $r(I) \cap r(J) \subseteq r(I \cap J)$, а оттам и съвпадението $r(I \cap J) = r(I) \cap r(J)$, Q.E.D.

Следващата лема установява съответствието между сечението на идеали и обединението на техните афинни многообразия.

Лема 18.10. *Ако I и J са идеали в пръстена $k[x_1, \dots, x_n]$ на полиномите на $x_1, \dots, x_n$ с коефициенти от поле k, то афинното многообразие на тяхното сечение*

$$V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$$

съвпада с обединението на афинните многообразия на I и J.

Доказателство: Да допуснем, че $V(I \cap J)$ не се съдържа в обединението $V(I) \cup V(J)$. Тогава съществува точка $a \in V(I \cap J)$, която не принадлежи нито на $V(I)$, нито на $V(J)$. По-точно, съществуват полиноми $f \in I$ и $g \in J$ с $f(a) \neq 0$ и $g(a) \neq 0$. В резултат, $fg \in I \cap J$ има стойност $(fg)(a) = f(a)g(a) \neq 0$ в $a \in V(IcapJ)$, което е противоречие. Следователно $V(I \cap J) \subseteq V(I) \cup V(J)$.

Обратно, ако $a \in V(I)$, то $a \in V(I \cap J)$ съгласно $I \cap J \subseteq I$. Аналогично, от $a \in V(J)$ следва $a \in V(I \cap J)$ благодарение на $I \cap J \subseteq J$. По този начин $V(I) \cup V(J) \subseteq V(I \cap J)$, откъдето $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$, Q.E.D.

Следващата ни цел е да разширим сечението $I \cap J$ на полиномиални идеали $I, J \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ до полиномиален идеал $H \lhd k[t, x_1, \dots, x_n]$, така че произволни пораждащи на I и J предоставят пораждащи на H в явен вид. Още повече, $I \cap J$ се оказва елиминационен идеал на H, така че произволен базис на Грьобнер G на H относно лексикографската наредба $>_{\text{lex}}$ в $k[t, x_1, \dots, x_n]$ предоставя базис на Грьобнер $G' = G \cap k[x_1, \dots, x_n]$ на $I \cap J$ относно лексикографската наредба $>_{\text{lex}}$ в $k[x_1, \dots, x_n]$.

Ще започнем с изучаване на разширенията на идеали от разглеждания вид.

Лема 18.11. *Нека I е идеал в $k[x_1, \dots, x_n]$ $f(t) \in k[t]$, а $f(t)I$ е идеалът в $k[t, x_1, \dots, x_n]$, породен от $f(t)h(x)$ за произволни $h(x) = h(x_1, \dots, x_n) \in I$.*

(i) Полиномът $h(t, x) \in f(t)I$ има специализация $h(\lambda, x) \in I$ за всички $\lambda \in k$. Още повече, ако $f(\lambda) = 0$, то $h(\lambda, x) \equiv 0 \in k[x_1, \dots, x_n]$.

(ii) Ако

$$I = \langle g_1(x), \dots, g_r(x) \rangle$$

се поражда от полиномите $g_1, \dots, g_r \in I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$, то

$$f(t)I = \langle f(t)g_1(x), \dots, f(t)g_r(x) \rangle$$

се поражда от полиномите $f(t)g_1(x), \dots, f(t)g_r(x) \in k[t, x_1, \dots, x_n]$.

Доказателство: (i) По определение, елементите на $f(t)I$ имат вида $h(t, x) = \sum_{i=1}^{l} f(t)h_i(x)G_i(t, x)$ за произволни полиноми $h_i(x) \in I$ и $G_i(t, x) \in k[t, x_1, \dots, x_n]$. Следователно

$$h(\lambda, x) = f(\lambda) \left(\sum_{i=1}^{l} h_i(x)G_i(\lambda, x) \right) \in I,$$

съгласно $G_i(\lambda, x) \in k[\lambda, x_1, \dots, x_n] = k[x_1, \dots, x_n]$ и $h_i(x) \in I \lhd k[x_1, \dots, x_n]$. В частност, $h(\lambda, x) \equiv 0 \in k[x_1, \dots, x_n]$ за $f(\lambda) = 0$.

(ii) Идеалът $f(t)I$ съдържа полиномите $f(t)g_i(x)$ за всички пораждащи $g_i(x)$ на I. Следователно $\langle f(t)g_1(x), \ldots, f(t)g_r(x) \rangle \subseteq f(t)I$. Обратно, всеки елемент на $f(t)I$ има вида $h(t,x) = \sum\limits_{i=1}^{l} f(t)h_i(x)G_i(t,x)$ за подходящи $h_i(x) \in I \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ и $G_i(t,x) \in k[t, x_1, \ldots, x_n]$. Изразявайки $h_i(x) = \sum\limits_{j=1}^{r} A_{ij}(x)g_j(x)$ чрез подходящи полиноми $A_{ij}(x) \in k[x_1, \ldots, x_n]$, получаваме

$$h(t,x) = \sum_{i=1}^{l} f(t)G_i(t,x) \left(\sum_{j=1}^{r} A_{ij}(x)g_j(x) \right) = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{l} G_i(t,x)A_{ij}(x) \right) f(t)g_j(x)$$

след размяна на реда на сумиранията. Означаваме $B_j(t,x) := \sum\limits_{i=1}^{l} G_i(t,x)A_{ij}(x) \in k[t, x_1, \ldots, x_n]$ и стигаме до извода, че

$$h(t,x) = \sum_{j=1}^{r} B_j(t,x)f(t)g_j(x) \in \langle f(t)g_1(x), \ldots, f(t)g_r(x) \rangle.$$

По този начин, $f(t)I \subseteq \langle f(t)g_(x), \ldots, f(t)g_r(x) \rangle$, откъдето и $f(t)I = \langle f(t)g_1(x), \ldots, f(t)g_r(x) \rangle$, Q.E.D.

Твърдение 18.12. *АкоI и J са идеали в $k[x_1, \ldots, x_n]$, то*

$$I \cap J = [tI + (1-t)J] \cap k[x_1, \ldots, x_n]$$

е първият елиминационен идеал на

$$tI + (1-t)J \triangleleft k[t, x_1, \ldots, x_n].$$

В частност, ако $I = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ и $J = \langle g_1, \ldots, g_r \rangle$, то

$$tI + (1-t)J = \langle tf_1(x), \ldots, tf_r(x), (1-t)g_1(x), \ldots, (1-t)g_s(x) \rangle.$$

Още повече, ако G е базис на Грьобнер на $tI + (1-t)J$ относно лексикографската наредба $>_{\mathrm{lex}}$ в $k[t, x_1, \ldots, x_n]$, то $G' := G \cap k[x_1, \ldots, x_n]$ е базис на Грьобнер на $I \cap J$ относно лексикографската наредба $>_{\mathrm{lex}}$ в $k[x_1, \ldots, x_n]$.

Доказателство: Ако $f(x) \in I \cap J$, то $f(x) = tf(x) + (1-t)f(x) \in tI + (1-t)J$ води до включването $I \cap J \subseteq [tI + (1-t)J] \cap k[x_1, \ldots, x_n]$. Обратно, нека $f(x) = g(t,x) + h(t,x)$ за $g(t,x) \in tI$ и $h(t,x) \in (1-t)J$. Тогава съществуват $g_1(x), \ldots, g_r(x) \in I$ и $h_1(x), \ldots, h_s(x) \in J$, така че

$$g(t,x) = \sum_{i=1}^{r} tg_i(x)A_i(t,x), \quad h(t,x) = \sum_{j=1}^{s} (1-t)h_j(x)B_j(t,x)$$

за подходящи полиноми $A_i(t,x), B_j(t,x) \in k[t, x_1, \ldots, x_n]$. В резултат,

$$f(x) = t\left(\sum g_(x)A_i(t,x) \right) + (1-t)\left(\sum h_j(x)B_j(t,x) \right).$$

Замествайки $t = 0$ получаваме $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{s} h_j(x)B_j(0,x) \in J$. Аналогично, за $t = 1 \in k$ имаме $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{r} g_i(x)A_i(1,x) \in I$. Следователно $f(x) \in I \cap J$ и $[tI + (1-t)J] \cap k[x_1, \ldots, x_n] \subseteq I \cap J$. Това дава $I \cap J = [tI + (1-t)J] \cap k[x_1, \ldots, x_n]$, Q.E.D.

Да напомним от Въпрос 2, че ако $X = V(f_1, \ldots, f_s) \subseteq k^n$ и $Y = V(g_1, \ldots, g_t) \subseteq k^n$, то сечението $X \cap Y = V(f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t) \subseteq k^n$ е афинното многообразие, зададено с обединението на уравненията на X и Y. От Теоремата на Хилберт за нулите получаваме непосредствено следното

Следствие 18.13. *Ако k е алгебрично затворено поле а $X_1 \subseteq k^n$ и $X_2 \subseteq k^n$ са афинни многообразия над k, то идеалът на сечението на тези многообразия*

$$I(X_1 \cap X_2) = r(I(X_1) + I(X_2))$$

съвпада с радикала на сумата на идеалите на X_1 и X_2.

Доказателство: В доказателството на Следствие 17.10 установихме, че

$$VI(X_i) = X_i.$$

Следователно

$$X_1 \cap X_2 = VI(X_1) \cap VI(X_2) = V(I(X_1) + I(X_2))$$

съгласно Лема 18.3. Сега Теоремата на Хилберт за нулите ни дава

$$I(X_1 \cap X_2) = IV(I(X_1) + I(X_2)) = r(I(X_1) + I(X_2)),$$

Q.E.D.
В останалата част от въпроса ще изучим съответствието между прости идеали в полиномиалния пръстен $k[x_1, \ldots, x_n]$ и неприводими афинни многообразия в k^n. Да напомним, че идеалът $I \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ се нарича прост, ако от $fg \in I$ за $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ следва $f \in I$ или $g \in I$.

Определение 18.14. *Афинното многообразие $X \subseteq k^n$ е неприводимо, ако всяко представяне $X = X_1 \cup X_2$ като обединение на афинни подмногообразия $X_1, X_2 \subseteq X$ има $X_1 = X$ или $X_2 = X$.*

Твърдение 18.15. *Афинното многообразие $X \subseteq k^n$ е неприводимо тогава и само тогава, когато неговият идеал $I(X) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ е прост.*

Доказателство: Ако $X \subseteq k^n$ е неприводимо и $fg \in I(X) \triangleleft kpx_1, \ldots, x_n]$, то да положим $X_1 := X \cap V(f)$ и $X_2 := X \cap V(G)$. Както знаем от Въпрос 2, сеченията X_1 и X_2 на афинни многообразия са афинни многообразия. Включването $X_1 \cup X_2 \subseteq X$ е ясно. За обратното включване $X \subseteq X_1 \cup X_2$ да отбележим, че $(fg)(a) = f(a)g(a) = 0$ във всяка точка $a \in X$. Но представянето $X = X_1 \cup X_2$ на неприводимото многообразие X изисква $X = X_1 = X \cap V(F)$ или $X = X_2 = X \cap V(G)$. Оттук $X \subseteq V(f)$ или $X \subseteq V(g)$, което се свежда до $f \in I(X)$ или $g \in I(X)$. По този начин проверихме, че идеалът $I(X)$ е прост.
Обратно, да предположим, че идеалът $I(X) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ е прост и афинното многообразие $X = X_1 \cup X_2$ е обединение на афинните си подмногообразия X_1 и X_2. Твърдим, че ако $X \neq X_1$, то $I(X) = I(X_2)$. Наистина, от $X_2 \subseteq X$ следва $I(X_2) \supseteq (X)$. Предположението $X_1 \subsetneq X$ води до строго включване $I(X) \subsetneq (X_1)$ и позволява избора на полином $f \in I(X_1) \setminus I(X)$. Сега за $\forall g \in I(X_2)$ следва, че $fg \in I(X) = I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$ съгласно Лема 18.4. Доколкото $I(X) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ е прост идеал, оттук получаваме, че $g \in I(X)$, защото сме избрали $f \notin I(X)$. С други думи, $I(X_2)$ се съдържа, а оттам и съвпада с $I(X)$. Съвпадението $I(X_2) = I(X)$ на идеалите е достатъчно за съвпадението $X_2 = X$ на подмногообразието X_2 с многообразието X. Това доказва неприводимостта на афинното многообразие X, Q.E.D.

Лема 18.16. *Всеки прост идеал I в комутативен пръстен с единица R е радикален.*

Доказателство: С индукция по $m \in \mathbb{N}$ ще установим, че ако $r^m \in I$, то $r \in I$. За $m = 1$ няма какво да се доказва. Ако всички $r \in R$ с $r^{m-1} \in I$ принадлежат на I, то от $r^m = R^{m-1} r \in I$ следва $R^{m-1} \in I$ или $r \in I$ съгласно простотата на I. И в двата случая получаваме $r \in I$, с което проверяваме, че $r(I) = I$, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 18.17. *Над алгебрично затворено поле k неприводимите многообразия $X \subseteq k^n$ са във взаимно-еднозначно съответствие с простите идеали $J \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$.*

Доказателство: Съгласно Твърдение 18.15, идеалът $I(X) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ на неприводимо многообразие $X \subseteq k^n$ е прост. Твърдим, че многообразието $V(J) \subseteq k^n$ на прост идеал $J \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ е неприводимо. Отново съгласно Твърдение 18.15, достатъчно е да докажем, че идеалът $IV(J) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ е прост. Но съгласно Теоремата на Хилберт за нулите и радикалността на простите идеали имаме

$$IV(J) = r(J) = j,$$

което доказва неприводимостта на $V(J) \subseteq k^n$. Съгласно Твърдение 17.10, идеалите на различни афинни многообразия са различни, така че, в частност, простите идеали на различни неприводими многообразия са различни. Както вече установихме, всеки прост идеал $J \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ съвпада с идеала на неприводимото многообразие $V(J) \subseteq k^n$. Това доказва взаимната еднозначност на съответствието между неприводими афинни многообразия и прости идеали $J \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ над алгебрично затворено поле k, Q.E.D.
За да установим съществуването на разлагане на афинно многообразие в обединение от краен брой неприводими подмнотообразия ни е необходимо следната

ЛЕМА 18.18. *Всяка нерастяща редица*

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \dots$$

от афинни многообразия в k^n се стабилизира след краен брой стъпки, т.е. съществува естествено число N, така че

$$X_N = X_{N+1} = \dots$$

Доказателство: Прилагайки Лема 3.11 получаваме ненамаляавщата редица

$$I(X_1) \subseteq I(X_2) \subseteq \dots \subseteq I(X_n) \subseteq I(X_{n+1}) \subseteq \dots$$

от идеали в $k[x_1, \dots, x_n]$. Сега Теорема 4 гарантира съществуването на естествено число N с

$$I(X_N) = I(X_{N+1}) = \dots.$$

В доказателството на Следствие 17.10 установихме, че $VI(X) = X$ за произволно афинно многообразие $X \subseteq k^n$ над необезателно алгебрично затворено поле k. В резултат получаваме, че

$$X_N = VI(X_N) = VI(X_{N+s}) = X_{N+s}$$

за $\forall s \in \mathbb{N}$ или $X_N = X_{N+1} = \dots$, Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 18.19. *Произволно афинно многообразие $X \subseteq k^n$ може да се представи като крайно обединение*

$$X = X_1 \cup \dots \cup X_m$$

на неприводими многообарзия $X_i \subseteq k^n$.

Доказателство: Да допуснем противното и да изберем афинно многообразие $X \subseteq k^n$, което не може да се представи като крайно обединение на неприводими многообразия. ТогаваX не е неприводимо, така че може да се представи като обединение $X = X_1 \cup X_1'$ на собствени подмногообразия $X_1 \subsetneq X$ и $X_1' \subsetneq X$. Поне едното от X_1 или X_1' не може да се представи като крайно обединение от неприводими многообразия, защото в противен случай X ще се окаже крайно обединение от неприводими многообразия. За определеност да предположим, че X_1 не е крайно обединение на неприводими многообразия. Повтаряйки горното разсъждение получаваме представяне $X_1 = X_2 \cup X_2'$ в обединение на

собствени подмногообразия X_2
$varsubsetneq X_1$ и $X_2' \subsetneq X_1$, така че X_2 не се представя като крайно обединение от неприводими многообразия. Продължавайки по същия начин получаваме безкрайна строго намаляваща редица

$$X \supsetneq X_1 \supsetneq X_2 \supsetneq \ldots \supsetneq X_n \supsetneq X_{n+1} \supsetneq \ldots$$

от афинни многообразия в k^n. Това противоречи на Лема 18.18 и доказва, че всяко афинно многообразие се разлага в крайно обединение от свои неприводими подмногообразия, Q.E.D.
За да имаме единственост на разлагането на афинно многообразие в крайно обединение на неприводими подмногообразия, трябва да се ограничим с така наречените минимални разлагания в обединение на неприводими подмногообразия.

Определение 18.20. *Разлагането $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ на афинно многообразие $X \subseteq k^n$ в крайно обединение от неприводими многообразия $X_i \subseteq k^n$ се нарича минимално, ако $X_i \not\subseteq X_j$ за всички $i \neq j$.*

Твърдение 18.21. *Всяко афинно многообразие $X \subseteq k^n$ има минимално разлагане $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ в крайно обединение от неприводими многообразия $X_i \subseteq k^n$.*
Всеки две минимални разлагания $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m = Y_1 \cup \ldots \cup Y_l$ в крайни обединения от неприводими подмногообразия $X_i \subseteq k^n$ или $Y_j \subseteq k^n$ съвпадат, т.е. $m = l$ и съществува пермутация $\sigma \in S_m$, така че $X_i = Y_{\sigma(i)}$ за всички $1 \leq i \leq m$.

Доказателство: Ако $X = X_1 \cup \ldots \cup X_s$ е произволно разлагане на афинното многообразие X в крайно обединение от неприводими многообразия X_i, то за всяка двойка индекси $1 \leq i \neq j \leq s$ с $X_i \subseteq X_j$ изпускаме X_i и отново получаваме разлагане на X в крайно обединение от неприводими многообразия. Двойките индекси $1 \leq i \neq j \leq s$ са краен брой, така че след евентуално изпускане на краен брой X_i получаваме минимално разлагане $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$, $m \leq s$ в обединение на краен брой неприводими многообразия X_j.
Нека $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ и $X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_l$ са две минимални разлагания на X в обединение от неприводими многообразия X_i или Y_j. Тогава

$$X_i = X_i \cap X = X_i \cap (Y_1 \cup \ldots \cup Y_l) = (X_i \cap Y_1) \cup \ldots \cup (X_i \cap Y_l)$$

за неприводимото многообразие X_i изисква $X_i = X_i \cap Y_{j(i)}$ за някое $1 \leq j(i) \leq l$. С други думи, $X_i \subseteq Y_{j(i)}$. Разменяйки ролите на двете разлагания, прилагаме горното разсъждение и получаваме $Y_{j(i)} \subseteq X_{k(j(i))}$ за някое $1 \leq k(j(i)) \leq m$. Сега $X_i \subseteq Y_{j(i)} \subseteq X_{k(j(i))}$ води до $X_i \subseteq X_{k(j(i))}$, откъдето $k(j(i)) = i$ съгласно минималността на $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$. Още повече, $X_i \subseteq Y_{j(i)} \subseteq X_i$ изисква $X_i = Y_{j(i)}$. Доколкото неприводимите многообразия $X_1, \ldots, X_m$ от минималното разлагане $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ са различни, оттук следва $m \leq l$. Аналогично получаваме $l \leq m$, откъдето и $m = l$. Сега различните помежду си неприводими многообразия $X_1, \ldots, X_m$ съвпадат, съответно, с различните помежду си неприводими многообразия $Y_{j(1)}, \ldots, Y_{j(m)}$, така че $(j(1), \ldots, j(m))$ е пермутация на $(1, \ldots, m)$, Q.E.D.
В светлината на съответствието между афинни многообразия над алгебрично затворено поле и радикалните полиномиални идеали получаваме следното

Следствие 18.22. *Ако k е алгебрично затворено поле, то всеки радикален идеал $r(J) = J \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ има единствено представяне*

$$J = P_1 \cap \ldots \cap P_m$$

като крайно сечение на прости идеали $P_i \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ *с* $P_i \not\subseteq P_j$ *за всички* $1 \leq i \neq j \leq m$.

Доказателство: Съгласно Твърдение 18.21, афинното многообразие $V(J) \subseteq k^n$ има единствено минимално разлагане

$$V(J) = X_1 \cup \ldots \cup X_m$$

в обединение от неприводими многообразия X_i. С индукция по m, Лема 18.4 дава $I(X_1 \cup \ldots \cup X_m) = I(X_1) \cap \ldots \cap I(X_m)$. За $m = 1$ няма какво да се доказва. Ако допуснем, че $I(X_1 \cup \ldots \cup X_{m-1}) = I(X_1) \cap \ldots \cap I(X_{m-1})$, то $I(X_1 \cup \ldots \cup X_{m-1} \cup X_m) = I(X_1 \cup \ldots \cup X_{m-1}) \cap I(X_m) = I(X_1) \cap \ldots \cap I(X_{m-1}) \cap I(X_m)$. Комбинирайки с Торемата на Хилберт за нулите получаваме

$$J = r(J) = IV(J) = I(X_1 \cup \ldots \cup X_m) = I(X_1) \cap \ldots \cap I(X_m).$$

Следствие 18.17 гарантира простотата на идеалите $P_i := I(X_i)$. Още повече, допускането $I(X_i) = P_i \subseteq P_j = I(X_j)$ за $1 \leq i \neq j \leq m$ води до $X_i = VI(X_i) \supseteq VI(X_j) = X_j$, което противоречи на минималността на разлагането $V(J) = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ и доказва минималността на представянето $J = P_1 \cap \ldots \cap P_m$.
Ако $J = P_1 \cap \ldots \cap P_m$ и $J = Q_1 \cap \ldots \cap Q_l$ са две минимални представяния в сечения от прости идеали, то с индукция по m получаваме, че $V(P_1 \cap \ldots \cap P_m) = V(P_1) \cup \ldots \cup V(P_m)$. Базата на индукцията за $m = 1$ е ясна. Допускането $V(P_1 \cap \ldots \cap P_{m-1}) = V(P_1) \cup \ldots \cup V(P_{m-1})$ води до $V(P_1 \cap \ldots \cap P_{m-1} \cap P_m) = V(P_1 \cap \ldots \cap P_{m-1}) \cup V(P_m) = V(P_1) \cup \ldots \cup V(P_{m-1}) \cup V(P_m)$ съгласно Лема 18.10. В резултат получаваме $V(J) = V(P_1) \cup \ldots \cup V(Pm)$ и $V(J) = V(Q_1) \cup \ldots \cup V(Q_l)$, където $V(P_j) \subseteq k^n$ и $V(Q_j) \subseteq k^n$ са неприводими съгласно Следствие 18.17. Още повече, допускането $V(P_i) \subseteq V(P_j)$ за $1 \leq i \neq j \leq m$ дава

$$P_i = r(P_i) = IV(P_i) \supseteq IV(P_j) = r(P_j) = P_j$$

след прилагане на Теоремата на Хилберт за нулите. Следователно минималните представяния $V(J) = V(P_1) \cup \ldots \cup V(P_m)$ и $V(J) = V(Q_1) \cup \ldots \cup V(Q_l)$ съвпадат. С други думи, $m = l$ и съществува пермутация $\sigma \in S_m$, така че $V(P_i) = V(Q_{\sigma(i)})$ за $\forall 1 \leq i \leq m$. Оттук Теоремата на Хилберт за нулите дава

$$P_i = r(P_i) = IV(P_i) = IV(Q_{\sigma(i)}) = r(Q_{\sigma(i)}) = Q_{\sigma(i)}$$

съгласно радикалността на простите идеали. Това доказва единствеността на минималното представяне $J = P_1 \cap \ldots \cap P_m$ на радикален идеал $J \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ като крайно сечение на прости полиномиални идеали, Q.E.D.