С О Ф И Й С К И   У Н И В Е Р С И Т Е Т

„СВ.   К Л И М Е Н Т   О Х Р И Д С К И“

Ф А К У Л Т Е Т   П О   М А Т Е М А Т И К А   И   И Н Ф О Р М А Т И К А

Асен Иванов Божилов

Екстремални задачи за малки и големи множества в графи

ДИСЕРТАЦИЯ

за получаване на образователната и научна степен „доктор“

по професионално направление 4.5 „Математика“ (Алгебра и теория на числата)

Научен ръководител

проф. дмн Недялко Ненов

СОФИЯ, 2014

Увод

Разглеждат се само крайни, неориентирани графи без кратни ребра и примки. За даден граф G с $\mathrm{V}(G)$, $\mathrm{E}(G)$ и $\mathrm{e}(G)$ означават съответно множеството на върховете, множеството на ребрата и броят на ребрата на графа G. Казваме, че $W \subset \mathrm{V}(G)$ е клика на графа G, ако всеки два върха от W са съседни. Най-големият брой върхове на G, които образуват клика се нарича кликово число на G и се бележи с $\omega(G)$. Казваме, че $W \subset \mathrm{V}(G)$ е независимо множество, ако в W няма съседни върхове. Най-големият брой върхове в G, които образуват независимо множество се нарича число на независимост на G и се бележи с $\alpha(G)$. С $\chi(G)$ означаваме хроматичното число на G, а с $\deg(v)$ означаваме степента на върха v.

Теорията на графите е възникнала като математическа дисциплина, която отразява връзките между обектите на дадена математическа структура. За неин родоначалник се смята Ойлер, поставяйки и решавайки известната задача за Кьонигсбергските мостове. Използвайки съвременна терминология, можем да кажем, че Ойлер доказва, че необходимо условие за съществуване на Ойлеров път в граф е той да е свързан и броят на върховете от нечетна степен да е точно нула или два. Оказва се, че това условие и достатъчно. Интересното тук е, че за определяне дали има такъв път е достатъчно да знаем само редицата от степени на графа. Естествено възниква въпросът дали всяка редица от неотрицателни числа може да бъде графична (т. е. да съответства на степените на върховете на някакъв граф). Отговор на този въпрос ни дава теоремата на Erdős–Gallai (вж. [14] или Теорема 5.5). Паралелно с това възникват и въпросът кои характеристики на даден граф могат да се определят от степените на върховете му или, евентуално, да се оценят. В това направление са и основните резултати на тази дисертация.

От класическата теорема на Turán (вж. [39] или Теорема 1.16) лесно следва неравенството

$$\mathrm{e}\,(G) \leq \frac{n^2(r-1)}{2r}. \tag{1}$$

С помощта на средната степен

$$\mathrm{d}_1 = \frac{1}{n}\left(\sum_{v\in V(G)} \deg(v)\right)$$

и очевидното равенство

$$2\mathrm{e}\,(G) = \sum_{v\in V(G)} \deg(v),$$

от (1) лесно се получава

$$\omega\,(G) \geq \frac{n}{n-\mathrm{d}_1}. \tag{2}$$

Това неравенство, изглежда че, се появява за първи път в дуална форма (за $\alpha\,(G)$) в работата на Erdős и Gallai в [15]. Разнообразни негови доказателства има в [2].

През 1979 г. Caro ([8]) и през 1981 г. Wei ([40, 41]) доказват следното неравенство (вж. Следствие 1.21):

$$\omega\,(G) \geq \sum_{v\in V} \frac{1}{n-\deg(v)}. \tag{3}$$

Тъй като функцията $\dfrac{1}{n-x}$ е изпъкнала, след като приложим към дясната страна на (3) неравенството на Jensen се получава неравенството (2). Поради това неравенството (3) е по-силно от неравенството (2).

Друго усилване на (2) е неравенството

$$\omega\,(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_2}, \tag{4}$$

където

$$\mathrm{d}_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum_{v \in V(G)} \deg^2(v)\right)},$$

което за първи път е формулирано от Edwards и Elphick в [11]. Доказателството им не е коректно и в тази дисертация предлагаме коректно доказателство.

Тъй като $\mathrm{d}_1 \leq \mathrm{d}_2$, неравенството (2) следва от (4). Да отбележим, че неравенствата (3) и (4) са несравними.

В [36] и [4] неравенствата (1)-(4) са усилени. За да опишем по точно тези неравенства ще са ни необходими следните дефиниции.

Определение 1 (Определение 2.1). Нека G е граф с n върха и $W \subseteq \mathrm{V}(G)$. Ще казваме, че W е *малко множество* (*δ-множество*) в графа G, ако

$$\deg(v) \leq n - |W|\,, \text{ за всяко } v \in W.$$

С $\mathrm{S}(G)$ ще бележим броя на върховете в най-голямото малко множество.

Графът G се нарича *обобщен r-хроматичен* граф, ако съществува r-разлагане

$$\mathrm{V}(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

за което множествата $V_1, V_2, \ldots, V_r$ са малки множества в G. Най-малкото цяло число r, за което G е обобщен r-хроматичен се означава с $\varphi(G)$.

В [36] Ненов доказва следното неравенство

$$\varphi(G) \leq \omega\,(G). \tag{5}$$

Също в [36] Ненов доказва, че неравенствата (1), (2) и (3) остават верни, когато заменим $\omega(G)$ с $\varphi(G)$, а заедно с Ненов в [4] доказваме, че неравенството (4) също остава вярно при тази замяна.

От неравенство (5) виждаме, че получените по този начин неравенства усилват неравенствата (1), (2), (3) и (4).

В тази дисертация изследваме подробно функцията $\varphi(G)$. Получаваме редица оценки за $\varphi(G)$, от които следват оценки за важни параметри на графа като кликовото число, хроматичното число, числото на независимост и др.. Получаваме и линеен алгоритъм за пресмятането на $\varphi(G)$ и някои негови обобщения. Дефинираме и други функции върху графите, които са аналогични на $\varphi(G)$ и които също дават възможност да се получат нови оценки за някои основни параметри на графа.

Пристъпваме към по-подробно описание на резултатите по глави.

Глава 1. В първия параграф се дефинират основни понятия и означения от теория на графите ([**24**, **43**]). Във втория параграф се разглеждат хроматични разлагания ([**1**]).

Глава 2. В първия параграф се дават необходимите дефиниции и се доказват основни свойства на малките множества и на функцията $\varphi(G)$. Следващата лема ни дава начин, по който можем да строим различни разбивания на малки множества на графа, ако винаги можем да намираме едно малко множество.

Лема 2 (Лема 2.7). *Нека G е граф и $W \subseteq \mathrm{V}(G)$. Ако U е малко множество в $G[W]$, то U е малко множество и в G.*

Основно твърдение тук е Твърдение 2.8 (вж. и [**36**]):

$$\varphi(G) \leq \omega(G).$$

Следващата теорема ([3]) завършва първия параграф на главата.

Теорема 3 (Теорема 2.9). *Нека G е граф с n върха, минимална степен δ, максимална степен Δ и средна степен d_1. Тогава:*

а) $\left\lceil \dfrac{n}{n-\mathrm{d}_1} \right\rceil \le \varphi(G) \le \left\lceil \dfrac{n}{n-\Delta} \right\rceil$;

б) *Ако* $\dfrac{r-2}{r-1}n < \mathrm{d}_1 \le \Delta \le \dfrac{r-1}{r}n$ *за някое естествено число* $r > 1$, *то* $\varphi(G) = r$. *В частност, за* $r = 2$ *неравенството* $1 \le \delta \le \Delta \le n/2$ *ни дава* $\varphi(G) = 2$;

в) *Ако* G *е* r*-регулярен, то* $\varphi(G) = \left\lceil \dfrac{n}{n-r} \right\rceil$.

Във втория параграф Твърдение 2.11 (вж. и [36]) гласи, че

$$\varphi(G) \ge \mathrm{CW}(G) = \sum_{v \in \mathrm{V}(G)} \frac{1}{n - \deg(v)},$$

което е усилване и дава друго доказателство на неравенството на Caro-Wei.

Оттук, като следствие, получаваме и усилване на теоремата на Turán в (Следствие 2.13 и Следствие 2.14):

$$\varphi(G) \ge \frac{n}{n-\mathrm{d}_1} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{e}\,(G) \le \frac{n^2(\varphi(G)-1)}{2\varphi(G)}.$$

В третия параграф основна е Теорема 2.17 (вж. и [4]).

Теорема 4 (Теорема 2.17). *Нека G е граф с n върха. Тогава*

$$\varphi(G) \ge \frac{n}{n-\mathrm{d}_2}.$$

Равенство се достига точно когато $n \equiv 0 \pmod{\varphi(G)}$ *и G е регулярен граф от степен* $\dfrac{n(\varphi(G)-1)}{\varphi(G)}$.

Главата завършва с параграф (вж. и [3]), в който се разглеждат максимални малки множества, т. е. малки множества с възможно най-голям брой върхове. Доказани са неравенства между големината на максимално малко множество $\mathrm{S}(G)$ и числото на кликово разбиване (Твърдение 2.26)

$$\mathrm{S}(G) \geq \theta(G) \geq \alpha(G).$$

и са намерени оценките за $\mathrm{S}(G)$ (Твърдение 2.28 и Теорема 2.29)

$$n - \Delta \leq \mathrm{S}(G) \leq n - \delta$$

$$\alpha(G) \leq S(G) \leq \frac{n-\Delta}{2} + \sqrt{\frac{(n-\Delta)^2}{4} + n\Delta - 2\mathrm{e}(G)}$$

Като следствие е получено неравенството на Hansen-Zheng ([21])

$$\alpha(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + n^2 - n - 2\mathrm{e}(G)} \right\rfloor.$$

Също така в Твърдение 2.27 е даден начин за ефективно пресмятане на $\mathrm{S}(G)$, ако знаем редицата от степени на графа, както и за намиране на едно максимално малко множество.

Твърдение 5 (Твърдение 2.27). *Нека G е граф с n върха и нека $\mathrm{d}_1 \leq \mathrm{d}_2 \leq \ldots \leq \mathrm{d}_n$ е неговата редица от степени. Тогава*

а) $\mathrm{S}(G) \geq \dfrac{n}{\varphi(G)}$;

б) $\mathrm{S}(G) = \max\{s \mid \mathrm{d}_s \leq n - s\}$ *и* $\{v_1, v_2, \ldots, v_{S(G)}\}$ *е максимално малко множество на G;*

Глава 3. В тази глава се разглеждат средно-степенните

$$\mathrm{d}_r = \sqrt[\mathrm{r}]{\frac{1}{n}\left(\sum_{v \in V(G)} \deg^r(v)\right)},$$

и се доказва Теорема 3.2 (вж. и [3])

Теорема 6 (Теорема 3.2). *Нека G е граф с n върха. Тогава са в сила следните твърдения:*

а) *За всяко естествено число $r \le \varphi(G)$, $\varphi(G) \ge \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_r(G)}$. Освен това, равенство се достига тогава и само тогава, когато G е $\dfrac{n(\varphi(G)-1)}{\varphi(G)}$-регулярен граф.*

б) $\varphi(G) \ge \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}$. *Освен това, равенство се достига тогава и само тогава, когато G е $\dfrac{n(\varphi(G)-1)}{\varphi(G)}$-регулярен граф.*

в) *Ако $\varphi(G) \ne 2$, то $\varphi(G) \ge \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_4(G)}$. Освен това, съществува граф G, за който $\varphi(G) = 2$ и $\varphi(G) < \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_4(G)}$.*

Като следствие получаваме усилвания на теоремата на Turán.

Следствие 7 (Следствие 3.3). *Нека G е граф с n върха. Тогава са в сила следните твърдения.*

а) *За всяко естествено число $r \le \varphi(G)$, $\omega(G) \ge \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_r(G)}$ и има равенство, точно когато G е пълен $\omega(G)$-хроматичен граф на Turán (Определение 1.9)*

$$T_{\omega(G)}(n) = K\left(\tfrac{n}{\omega(G)}, \tfrac{n}{\omega(G)}, \ldots, \tfrac{n}{\omega(G)}\right).$$

б) $\omega(G) \ge \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}$ *и има равенство, точно когато G е пълен $\omega(G)$-хроматичен граф на Turán $T_{\omega(G)}(n)$.*

в) *Ако $\varphi(G) \ne 2$, то $\omega(G) \ge \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_4(G)}$.*

Глава 4. Тук се разглеждат различни модификации на малки множества ([3, 5]. Първата от тях е:

Определение 8 (Определение 4.1). Нека G е n-върхов граф и $W \subseteq \mathrm{V}(G)$. Ще казваме, че W е δ_k*-малко множество* на G ако

$$\mathrm{d}_k(W) \le n - |W|.$$

С $\varphi^{(k)}(G)$ ще означаваме най-малкия брой δ_k-множества на G, на които $\mathrm{V}(G)$ се разлага.

Ще означаваме максималния брой върхове в δ_k-множество на G с $\mathrm{S}^{(k)}(G)$.

В първия параграф са получени оценките (Твърдение 4.5, Твърдение 4.8 и Твърдение 4.7):

$$\varphi^{(1)}(G) \geq \left\lceil \frac{n}{n - \mathrm{d}_1(G)} \right\rceil$$
$$\left\lceil \frac{n}{n - \mathrm{d}_1(G)} \right\rceil \leq \varphi^{(k)}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{n - \Delta(G)} \right\rceil$$
$$\varphi^{(1)}(G) \leq \varphi^{(2)}(G) \leq \cdots \leq \varphi^{(k)}(G) \leq \cdots \leq \varphi(G) \leq \omega(G) \leq \chi(G)$$

Във втория параграф Теорема 4.9 усилва Твърдение 4.7.

Теорема 9 (Теорема 4.9). *Нека G е граф. Тогава съществува естествено число $k_0 = k_0(G)$, такова че за всяко $k \geq k_0$ е в сила*

а) *Всяко δ_k-малко множество на G е малко множество на G.*
б) $\varphi^{(1)}(G) \leq \cdots \leq \varphi^{(k_0)}(G) = \varphi^{(k_0+1)}(G) = \cdots = \varphi(G)$.

В третия параграф на главата се доказва следната теорема:

Теорема 10 (Теорема 4.11). *Нека G е n-върхов граф и*

$$\mathrm{V}(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

където V_i са δ_k-малки множества. Тогава, за всяко естествено $k \leq r$ са изпълнени следните неравенства

а) $\mathrm{d}_k(G) \leq \dfrac{n(r-1)}{r}$;
б) $r \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_k(G)}$.

Тя ни дава оценка за $\mathrm{d}_k(G)$, която се използва в следващия, четвърти, параграф, за да се получат някои следствия.

В петия параграф се разглеждат най-големите δ_k-малки множества. За големините им се показва, че образуват монотонна ненарастваща редица, която се стабилизира. Следващите две твърдения дават тяхно описание и оценка за големината им.

Твърдение 11 (Твърдение 4.24). *Нека*

$$\mathrm{V}(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad \text{и} \quad \deg(v_1) \le \deg(v_2) \le \dots \le \deg(v_n).$$

Тогава

$$\mathrm{S}^{(k)}(G) = \max\{s \mid \mathrm{d}_k(\{v_1, v_2, \dots v_s\}) \le n - s\} =$$
$$= \max\{s \mid \{v_1, v_2, \dots v_s\} \text{ е } \delta_k\text{-малко множество в } G\}.$$

Твърдение 12 (Твърдение 4.25). *За всяко естествено число k са в сила следните неравенства*

$$n - \Delta(G) \le \mathrm{S}^{(k)}(G) \le n - \delta(G).$$

Последната теорема от параграфа оценява големината на едно δ_1-малко множество чрез средно-степенното на останалите върхове. Като следствие се получава оценка за максималните δ_k-малки множества.

Теорема 13 (Теорема 4.27). *Нека $A \subseteq \mathrm{V}(G)$ е δ_1-малко множество на G и $s = \mathrm{d}_1(\mathrm{V}(G) \setminus A)$. Тогава*

$$|A| \le \left\lfloor \frac{n-s}{2} + \sqrt{\frac{(n-s)^2}{4} + ns - 2\mathrm{e}\,(G)} \right\rfloor \tag{6}$$

Следствие 14 (Следствие 4.28). *За всяко естествено число k*

$$\mathrm{S}^{(k)}(G) \le \left\lfloor \frac{n-\Delta(G)}{2} + \sqrt{\frac{(n-\Delta(G))^2}{4} + n\Delta(G) - 2\mathrm{e}\,(G)} \right\rfloor \le$$
$$\le \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + n^2 - n - 2\mathrm{e}\,(G)} \right\rfloor. \tag{7}$$

В последния параграф се разглежда модификация на малките множества чрез функцията на Caro-Wei — α-малки множества. Доказва се, че всяко малко множество е и α-малко, както и че всяко α-малко множество е и δ_1-малко. Накрая доказваме две вериги неравенства за минималния брой малки множества и като следствие получаваме по-точни оценки за неравенството в теоремата на Turán.

Теорема 15 (Теорема 4.31). *Нека G е граф с n върха. Тогава*

а) $\omega(G) \geq \varphi(G) \geq \varphi^{\alpha}(G) \geq \varphi^{(1)}(G) \geq \left\lceil \frac{n}{n-\mathrm{d}_1(G)} \right\rceil$;

б) $\omega(G) \geq \varphi(G) \geq \varphi^{\alpha}(G) \geq CW(G) \geq \left\lceil \frac{n}{n-\mathrm{d}_1(G)} \right\rceil$.

Следствие 16 (Следствие 4.33). *Нека G е граф с n върха. Тогава*

а)

$$\mathrm{e}(G) \leq \frac{(\varphi^{(1)}(G)-1)n^2}{2\varphi^{(1)}(G)} \leq \frac{(\varphi^{\alpha}(G)-1)n^2}{2\varphi^{\alpha}(G)} \leq \\ \leq \frac{(\varphi(G)-1)n^2}{2\varphi(G)} \leq \frac{(\omega(G)-1)n^2}{2\omega(G)};$$

б)

$$\mathrm{e}(G) \leq \frac{(\mathrm{CW}(\overline{G})-1)n^2}{2\,\mathrm{CW}(\overline{G})} \leq \frac{(\varphi^{\alpha}(G)-1)n^2}{2\varphi^{\alpha}(G)} \leq \\ \leq \frac{(\varphi(G)-1)n^2}{2\varphi(G)} \leq \frac{(\omega(G)-1)n^2}{2\omega(G)}.$$

Глава 5. В тази глава, заедно с малките множества, разглеждаме и дуалните им големи множества, като разглеждаме по-общата ситуация на k-малки и k-големи множества.

Определение 17 (Определение 5.2). Нека G е граф с n върха. Едно множество от върхове $A \subseteq \mathrm{V}(G)$ ще наричаме k-*малко* ако за всеки връх $v \in A$, $\deg(v) \leq n-|A|+k$. Едно подмножество $B \subseteq \mathrm{V}(G)$ ще наричаме k-*голямо* ако за всеки връх $v \in B$, $\deg(v) \geq |B|-k-1$.

Като използваме техниката развита за малки множества, получаваме множество твърдения за минималния брой такива множества, на които може да се разбие множеството от върховете и за големината на най-голямото такова множество.

Теорема 18 (Теорема 5.12). *Нека G е граф със n върха и $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ е неговата редица от степени. Тогава*

а) $\mathrm{S}_k(G) \geq \alpha_k(G)$ *и* $\mathrm{L}_k(G) \geq \omega_k(G)$;

б) $\mathrm{S}_k(G) \geq \dfrac{n}{\varphi_k(G)}$ *и* $\mathrm{L}_k(G) \geq \dfrac{n}{\Omega_k(G)}$;

в) $\mathrm{S}_k(G) = \max\{s \mid d_s \leq n - s + k\}$ *и* $\{v_1, v_2, \ldots, v_{\mathrm{S}_k(G)}\}$ *е най-голямо k-малко множество на G;*

г) $\mathrm{L}_k(G) = \max\{t \mid t - k - 1 \leq d_{n-t+1}\}$ *и* $\{v_{n-L_k(G)+1}, v_{n-L_k(G)+2}, \ldots, v_n\}$ *е най-голямо k-голямо множество на G.*

Твърдение 19 (Твърдение 5.13). *Нека G е граф с минимална степен δ и максимална степен Δ. Тогава*

а) $n - \Delta + k \leq \mathrm{S}_k(G) \leq n - \delta + k$ *за* $k \leq \Delta$;

б) $\delta + k + 1 \leq \mathrm{L}_k(G) \leq \Delta + k + 1$ *за* $k \leq n - \delta - 1$;

в) *Ако G е r-регулярен, то* $\mathrm{S}_k(G) = n - r + k$ *при* $k \leq r$ *и* $\mathrm{L}_k(G) = r + k + 1$ *при* $k \leq n - r - 1$.

Доказваме, че множеството от върховете на всеки граф може да се разложи на k-голямо и k-малко множество. Този факт се прецизира в

Твърдение 20 (Твърдение 5.19). *Нека G е граф с n върха и $\mathrm{e}\,(G)$ ребра. Тогава съществува разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на k-малко множество V_S и k-голямо множество V_L, такива,че*

$$|V_L| \leq \frac{1}{2}(k + 1 + \sqrt{(k+1)^2 + 8\mathrm{e}\,(G)})$$

и

$$|V_S| \geq n - \frac{1}{2}(k + 1 + \sqrt{(k+1)^2 + 8\mathrm{e}\,(G)}).$$

В последния параграф на главата се доказват следните оценки за $\varphi_k(G)$ и $\Omega_k(G)$.

Теорема 21 (Теорема 5.20). *Нека G е граф с n върха и средна степен d_1. Тогава*

а) $\varphi_k(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n - \deg(v) + k} \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_1 + k}$;

б) $\Omega_k(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg(v) + k + 1} \geq \frac{n}{\mathrm{d}_1 + k + 1}$.

Следствие 22 (Следствие 5.22). *Нека G е граф с n върха и* $\mathrm{e}(G)$ *ребра. Тогава*

а) $\mathrm{e}(G) \leq \frac{1}{2}\left(n^2 - \frac{n^2}{\varphi_k(G)} + nk\right)$;

б) $\mathrm{e}(G) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{\Omega_k(G)} - n(k+1)\right)$.

Теорема 23 (Теорема 5.23). *Нека G е граф с n върха минимална степен δ, максимална степен Δ и средна степен d_1. Тогава*

а) $\left\lceil \frac{n}{n - \mathrm{d}_1 + k} \right\rceil \leq \varphi_k(G) \leq \left\lceil \frac{n}{n + k - \Delta} \right\rceil$;

б) $\left\lceil \frac{n}{\mathrm{d}_1 + k + 1} \right\rceil \leq \Omega_k(G) \leq \left\lceil \frac{n}{\delta + k + 1} \right\rceil$;

в) *Ако* $\frac{r-2}{r-1}n + k < \mathrm{d}_1 \leq \Delta \leq \frac{r-1}{r}n + k$ *за някое цяло число* $r > 1$, *то* $\varphi_k(G) = r$. *В частност за* $r = 2$ *имаме, че ако* $1 \leq \delta \leq \Delta \leq n/2$, *то* $\varphi(G) = 2$);

г) *Ако* $\frac{n}{r} - k - 1 \leq \delta \leq \mathrm{d}_1 < \frac{n}{r-1} - k - 1$ *за някое цяло число* $r > 1$, *то* $\Omega_k(G) = r$;

д) *Ако G е r-регулярен, то* $\varphi_k(G) = \left\lceil \frac{n}{n + k - r} \right\rceil$ *и* $\Omega_k(G) = \left\lceil \frac{n}{r + k + 1} \right\rceil$.

Глава 6. В тази глава са представени два алгоритъма с линейно време за намиране на $\varphi_k(G)$ и на $\Omega_k(G)$, като е доказана тяхната коректност.

В заключение, бих искал да изкажа благодарността си на всички колеги от катедра „Алгебра“, ФМИ, СУ, които от много отдавна чувствам като приятели. Особено искам да благодаря на по-възрастните колеги, от които съм се учил много и, надявам се, научил поне мъничко. Някои от тях, за съжаление, вече не са сред нас... Специална благодарност бих искал да изкажа на научния си ръководител проф. Н. Ненов, който ме въведе в тази тематика, с когото ми беше изключително приятно да работя, който ме изтърпя през всичките тези години и с когото се надявам да работя и занапред.

Авторска справка

По мнение на автора основните приноси в дисертацията са:

1. Усилване на резултат на Erdős и неравенството на Caro-Wei (Следствие 5.21).
2. Получаване на вярно доказателство и усилване на неравенството на Edwards и Elphick (Теорема 1.22).
3. Получаване на веригите неравенства (25) и Теорема 4.9 б).
4. Оценка на кликовото число с кубичното, биквадратичното и останалите средно-степенни. Описани са и случаите когато се достига равенство (Следствие 3.3).
5. Горни и долни граници за φ, както и за неговите модификации.
6. Линеен алгоритъм за пресмятане на φ.
7. Алгоритъм за намиране на най-голямо малко множество и получаване на оценка за броя на върховете на най-голямо малко множество.
8. Дефиниране на k-малки множества, като обобщение на малки множества и доказване на аналогични резултати на случая, когато $k = 0$, включително получаване на линеен алгоритъм за пресмятане на φ_k, аналогичен на алгоритъма за φ.
9. Дефиниране на k-големи множества и получаване на дуални зависимости между k-малки и k-големи множества. Получаване чрез тях на резултати, аналогични на резултатите за k-малки множества.
10. Дефиниране на малки и големи множества (подредици) за редици и алгоритъм за получаване на минимални разлагания на малки и големи подредици.

Публикации във връзка с дисертацията

[1] A. Bojilov and N. Nenov. An inequality for generalized chromatic graphs. In *Proceedings of the Forty First Spring Conference of Union of Bulgarian Mathematics*, Mathematics and education in mathematics, pages 143–147, Borovets, April 9–12 2012.

[2] A. Bojilov, Y. Caro, A. Hansberg., and N. Nenov. Partitions of graphs into small and large sets. *Discrete Applied Mathematics*, 161(13-14):1912–1924, 2013, IF2012-0.718.

[3] A. Bojilov and N. Nenov. δ_k-small sets in graphs. In *Proceedings of the Forty Second Spring Conference of Union of Bulgarian Mathematics*, Mathematics and education in mathematics, pages 189–197, Borovets, April 2–6 2013.

Цитирания:

Работи [1] и [2] се цитират в [**13**], а работа [3] се цитира в [**12**].

Резултатите в дисертацията са докладвани в семинара по алгебра през април 2012, на отчетни сесии на ФМИ и на 41 и 42 пролетни конференции на СМБ, 2012 г. и 2013 г., Боровец.

Съдържание

Глава 1

Независими множества. Разлагане на независими множества и хроматично число.

1. Основни понятия и означения от теория на графите

В този парграф ще дадем някои основни определения и означения ([43, 24]).

Ще разглеждаме само крайни и неориентирани графи, без кратни ребра и примки.

Ако A е множество с $A^{(2)}$ ще означаваме множеството от всички двуелементни подмножества на A.

Определение 1.1. Нека V е непразно крайно множество и $E \subset V^{(2)}$ е множество от двуелементни подмножества на V. *Граф* наричаме наредената двойка $G = (V, E)$, а елементите на $V = \mathrm{V}(G)$ и $E = \mathrm{E}(G)$ наричаме съответно *върхове* и *ребра* на графа G. С $\overline{G}$ означаваме *допълнителния граф* на $G = (V, G)$, където $\mathrm{V}(\overline{G}) = \mathrm{V}(G)$ и $\mathrm{E}(\overline{G}) = V^{(2)} \setminus E$, а с $\mathrm{e}(G) = |\mathrm{E}(G)|$ броя на ребрата на G.

Графът G е *пълен*, когато $E = V^{(2)}$ и ако $|V| = n$ го бележим с K_n. Простият цикъл с дължина n ще бележим с C_n.

Определение 1.2. Ако $v_1, v_2 \in \mathrm{V}(G)$ и $[v_1, v_2] \in \mathrm{E}(G)$ казваме, че върховете v_1 и v_2 са *съседни*. За върха $v \in V$ с $\mathrm{N}(v) = \mathrm{N}_G(v)$ означаваме множеството от всички съседни на v върхове, а за $M \subset V$ с $\mathrm{N}(M) = \mathrm{N}_G(M) = \bigcup\limits_{v \in M} \mathrm{N}(v)$ бележим множеството от върховете, които са съседни на връх от M.

Степен $\deg_G(v) = |\mathrm{N}(v)|$ на върха v наричаме броя на съседните на v върхове. Когато графът G е фиксиран се използва и означението $\deg(v)$.

С $\Delta = \Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} \deg(v)$ и $\delta = \delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} \deg(v)$ означаваме, съответно, най-голямата и най-малката степен на върховете на графа G.

Ще смятаме, че върховете са номерирани според големината на степените си, т. е. $\delta = \deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \cdots \leq \deg(v_n) = \Delta$, където $n = |\mathrm{V}(G)|$. Често ще пишем d_i вместо $\deg(v_i)$. Редицата $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ ще наричаме *редица от степени* на графа G.

За $W \subseteq \mathrm{V}(G)$ определяме *k-то средно-степенно* на W и G, съответно, като

$$\mathrm{d}_k(W) = \sqrt[k]{\frac{\sum\limits_{v \in W} \deg^k(v)}{|W|}}, \qquad \mathrm{d}_k = \mathrm{d}_k(G) = \mathrm{d}_k\big(\mathrm{V}(G)\big).$$

Определение 1.3. Нека $W \subseteq \mathrm{V}(G)$. *Функция на Caro-Wei* ще наричаме

$$\mathrm{CW}(W) = \sum_{v \in W} \frac{1}{n - \deg(v)}.$$

Вместо $\mathrm{CW}(\mathrm{V}(G))$ ще пишем $\mathrm{CW}(G)$.

Определение 1.4. Едно множество от k върха наричаме *k-клика*, ако всеки два негови върха са съседни и *независимо множество*, ако всеки два негови върха не са съседни.

Броят на върховете $\alpha(G)$ в максимално независимо множество се нарича *число на независимост* на G, а броят на елементите на максимална клика $\omega(G)$ *кликово число.*

Минималният брой клики $\theta(G)$, на които се разлага $\mathrm{V}(G)$, се нарича *число на кликово разлагане.*

Да отбележим, че два върха са съседни в $\overline{G}$ тогава и само тогава, когато не са съседни в G и едно множество от върхове е независимо (клика) в G тогава и само тогава, когато то е клика (независимо) в $\overline{G}$. Поради това, $\alpha(G) = \omega\left(\overline{G}\right)$ и $\omega(G) = \alpha\left(\overline{G}\right)$.

Определение 1.5. Нека G_1 и G_2 са два графа без общи върхове. С $G_1 + G_2$ означаваме графа G, за който $\mathrm{V}(G) = \mathrm{V}(G_1) \cup \mathrm{V}(G_2)$ и

$$\mathrm{E}(G) = \mathrm{E}(G_1) \cup \mathrm{E}(G_2) \cup \{[v_1, v_2] \mid v_1 \in \mathrm{E}(G_1), v_2 \in \mathrm{E}(G_2)\}.$$

2. Хроматични разлагания. Теорема на Turán. Неравенство на Caro-Wei.

Ще се придържаме към означенията и изложението в Глава 10 от дисертацията на Ненов ([1]). За пълнота ще изложим основните определения и добре известни твърдения свързани с теоремата на Turán.

Определение 1.6. Нека G е граф. Всяко разлагане

$$V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, i \neq j \tag{8}$$

се нарича *r-разлагане* на върховете на G. Множествата V_1, V_2, ..., V_r се наричат *части* на това разлагане.

Определение 1.7. Казваме, че r-разлагането (8) е *r-хроматично разлагане*, ако частите му са независими множества, а графът G се нарича r-хроматичен граф. *Хроматичното число* на графа G е най-малкото естествено число r, за което G има r-хроматично разлагане и се бележи с $\chi(G)$.

Определение 1.8. Нека G е r-хроматичен граф с части V_1, V_2, ..., V_r. Казваме, че G е *пълен r-хроматичен граф*, ако всеки два върха, които са от различни части, са съседни. Бележим го с $K(p_1, p_2, \dots, p_r)$, където $p_i = |V_i|$, $i = 1, 2, \dots, r$.

Ясно е, че $K(p_1, p_2, \dots, p_r) = \overline{K_{p_1}} + \overline{K_{p_2}} + \cdots + \overline{K_{p_r}}$.

Определение 1.9. Пълният r-хроматичен граф $K(p_1, p_2, \dots, p_r)$ се нарича *r-хроматичен граф на Turán*, ако $|p_i - p_j| \leq 1$, за всеки

i и j, и се означава с $T_r(n)$, където $n = p_1 + p_2 + \cdots p_r$ е броят на върховете на този граф.

Твърдение 1.10. *С точност до изоморфизъм графът $T_r(n)$ се определя еднозначно от числата r и n.*

Доказателство. Нека G е r-хроматичен n-върхов граф на Turán с части V_1, V_2, …, V_r и $p_i = |V_i|$, $i = 1, 2, r$, като $|p_i - p_j| \leq 1$, за всяко i и j Ако $n = rq + s$, $0 \leq s \leq r - 1$, то от $|p_i - p_j| \leq 1$ следва, че s от частите V_i се състоят от $\left\lceil \frac{n}{r} \right\rceil = q + 1$, а останалите $r - s$ части имат $\lfloor nr \rfloor = q$ върха. Следователно, (с точност до изоморфизъм) r-хроматичният n-върхов граф на Turán е определен еднозначно. □

От направените разсъждения става ясно, че

$$T_r(n) = \underbrace{\overline{K_{q+1}} + \cdots + \overline{K_{q+1}}}_{s} + \underbrace{\overline{K_q} + \cdots + \overline{K_q}}_{r-s}. \tag{9}$$

Твърдение 1.11. *Нека G е r-хроматичен граф с части V_1, V_2, …, V_r и $p_i = |V_i|$, $i = 1, 2, r$. Тогава:*

а) $\mathrm{e}\,(G) \leq \mathrm{e}\,(K(p_1, p_2, \ldots, p_r))$;

б) *Равенство в а) е възможно само когато $G = K(p_1, p_2, \ldots, p_r)$.*

Доказателство. Следва очевидно от равенството

$$\mathrm{e}\,(K(p_1, p_2, \ldots, p_r)) = \sum_{1 \leq i < j \leq r} p_i p_j. \tag{10}$$

□

Твърдение 1.12. *Вярно е неравенството*

$$\mathrm{e}\,(T_r(n)) \leq \frac{n^2(r-1)}{2r}$$

и равенство се достига само когато $n \equiv 0 \pmod r$.

Доказателство. От (9) получаваме

$$\mathrm{e}\,(T_r(n)) = \frac{(n^2 - s^2)(r-1)}{2r} + \binom{s}{2}$$

и след преобразуване

$$\mathrm{e}\,(T_r(n)) = \frac{n^2(r-1)}{2r} - \frac{s(r-s)}{2r},$$

откъдето очевидно следва исканото твърдение. □

Лема 1.13. *Нека p_1, p_2, ..., p_r са неотрицателни цели числа и нека $n = p_1 + p_2 + \cdots + p_r$. Тогава*

а) $\mathrm{e}\,(K(p_1, p_2, \dots, p_r)) \le \mathrm{e}\,(T_r(n))$;

б) *Равенство в а) е възможно само когато*

$$K(p_1, p_2, \dots, p_r) = T_r(n),$$

т. е. когато $|p_i - p_j| \le 1$, за всяко i и j.

За пълнота ще изложим доказателството на тази лема ([1]).

Доказателство. Нека $K(p_1, p_2, \dots, p_r) \ne T_r(n)$, т. е.

$$\max\{p_1, p_2, \dots, p_r\} - \min\{p_1, p_2, \dots, p_r\} \ge 2$$

и нека, например, $p_1 - p_2 \ge 2$. От (10) получаваме

$$\mathrm{e}\,(K(p_1 - 1, p_2 + 1, p_3, \dots, p_r)) - \mathrm{e}\,(K(p_1, p_2, \dots, p_r)) = p_1 - p_2 - 1.$$

Понеже $p_1 - p_2 - 1 > 0$, от последното равенство получаваме

$$\mathrm{e}\,(K(p_1 - 1, p_2 + 1, p_3, \dots, p_r)) > \mathrm{e}\,(K(p_1, p_2, \dots, p_r)).$$

Следователно $\mathrm{e}\,(K(p_1, p_2, \dots, p_r))$ е най-голямо само тогава, когато $|p_i - p_j| \le 1$, за всяко i и j, т. е. когато $K(p_1, p_2, \dots, p_r) = T_r(n)$. □

От Твърдение 1.11 и Лема 1.13 получаваме

Твърдение 1.14. *Нека G е n-върхов r-хроматичен граф с части V_1, V_2, ..., V_r. Тогава:*

а) $\mathrm{e}\,(G) \le \mathrm{e}\,(T_r(n))$;

б) *равенство в а) е възможно само тогава, когато G е r-хроматичният граф на Turán $T_r(n)$ с части V_1, V_2, ..., V_r.*

През 1941 година в [39] Turán обобщава Твърдение 1.14 по следния начин:

Теорема 1.15 (**Теорема на Turán**). *Нека G е n-върхов граф и $\omega(G) \leq r$. Тогава:*

а) $\mathrm{e}(G) \leq \mathrm{e}(T_r(n))$;

б) $\mathrm{e}(G) = \mathrm{e}(T_r(n))$ *само когато* $G = T_r(n)$.

Често се използва следната малко по-слаба формулировка на теоремата на Turan:

Теорема 1.16. *Нека G е n-върхов граф и $r = \omega(G)$. Тогава*

$$\mathrm{e}(G) \leq \frac{n^2(r-1)}{2r} = \frac{n^2(\omega(G)-1)}{2\omega(G)}$$

и равенство се достига точно, когато r дели n и G е графът на Turán $T_r(n)$.

Като се използва равенството

$$\frac{2\mathrm{e}(G)}{n} = \frac{\sum\limits_{v \in V(G)} \deg(v)}{n} = \mathrm{d}_1,$$

и Теорема 1.16 след елементарни преобразувания получаваме

Теорема 1.17 ([15]). *Нека G е n-върхов граф. Тогава:*

$$\omega(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_1}.$$

Пример 1.18. Нека C_5 е граф, за който $\mathrm{V}(C_5) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ и $\mathrm{E}(C_5) = \{[v_1, v_2], [v_2, v_3], [v_3, v_4], [v_4, v_5], [v_1, v_5]\}$. Едно 3-хроматично негово разлагане е $\{\{v_1\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_5\}\}$. От друга страна, за всяко 2-разлагане на C_5 в една от частите ще има два съседни върха и, следователно, не съществува 3-хроматично разлагане. Така $\chi(G) = 3$. Ясно е, че $\omega(G) = 2$, т.,е. $\chi(G) > \omega(G)$. (Неравенството $\chi(G) \geq \omega(G)$ е винаги изпълнено.)

Забележка 1.19. Да отбележим, че теоремата на Turán обобщава Твърдение 1.12, понеже всеки r-хроматичен граф не съдържа $(r+1)$-клики. Тъй като има графи G с $\omega(G) < r$, които не са r-хроматични (Пример 1.18), то обобщението е съществено.

През 1979 г. Y. Caro ([8]) и през 1981 г. V. Wei ([41, 40]) доказват следното неравенство:

Твърдение 1.20 (**Неравенство на Caro-Wei**).

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{\deg(v)+1}.$$

Границата на Caro-Wei е обект на многочислени изследвания и обобщения ([**9**, **27**, **6**, **7**, **16**, **18**, **19**, **23**, **22**, **35**, **37**]).

Чрез разглеждане на допълнителния граф, от неравенството на Caro-Wei се получава

Следствие 1.21.

$$\omega(G) \geq \sum_{v \in V} \frac{1}{n-\deg(v)}.$$

Като използваме, че функцията $\dfrac{1}{n-x}$ е изпъкнала и приложим неравенството на Jensen към дясната страна на последното следствие, получаваме Теорема 1.17, което означава, че неравенството от Теорема 1.17 е по-слабо от дуалната форма на неравенството на Caro-Wei от Следствие 1.21.

В [11] Edwards и Elphick формулират следната теорема:

Теорема 1.22. *За всеки граф G е изпълнено неравенството*

$$\omega(G) \geq \frac{n}{n-\mathrm{d}_2},$$

където

$$\mathrm{d}_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum_{v \in V(G)} \deg^2(v)\right)}.$$

Тъй като $d_1 \leq d_2$, то неравенството в Теорема 1.22 усилва неравенството от Теорема 1.17.

Глава 2

Малки множества ($\boldsymbol{\delta}$-множества).

1. Основни определения.

Малки множества (δ-множества) се разглеждат в работите на Ненов и Хаджииванов [30, 31, 32, 33, 34]. Числото $\varphi(G)$ е въведено за първи път от Ненов през 2006 г. в [36]. Някои негови свойства са разгледани в [36, 4]. По-основно е изследвано в [3], където е предложен и ефективен алгоритъм за пресмятането му.

Там са доказани някои техни основни свойства, а по-късно по-задълбочено са разгледани в [4] и [3].

Определение 2.1. Нека G е граф с n върха и $W \subseteq \mathrm{V}(G)$. Ще казваме, че W е *малко множество* (*δ-множество*) в графа G, ако

$$\deg(v) \leq n - |W|\,, \text{ за всяко } v \in W.$$

С $\mathrm{S}(G)$ ще бележим броя на върховете в най-голямото малко множество.

Пример 2.2. Всяко независимо множество W от върхове на графа G е малко множество, защото $\mathrm{N}(v) \subseteq \mathrm{V}(G) \setminus W$ и

$$\deg(v) \leq |\mathrm{V}(G)| - |W| \text{ за всяко } v \in W.$$

В частност, всеки връх е малко множество и винаги имаме разбиване на малки множества.

Пример 2.3. Ако $W \subseteq \mathrm{V}(G)$ и

$$|W| \geq \Delta(G) = \max\{\deg(w) \mid v \in \mathrm{V}(G)\},$$

то $U = \mathrm{V}(G) \setminus W$ е малко множество, защото $\deg(v) \leq \Delta(G) \leq |W|$ за $v \in U$.

Да отбележим, че не е задължително U да е независимо множество.

Пример 2.4. Нека $\omega(G) = s$. Нека W е подмножество на $\mathrm{V}(G)$ с най-много върхове, което не съдържа s-клики. Тогава $\mathrm{V}(G) \setminus W$ е малко множество.

Наистина, ако v е връх с максимална степен на G, то $\mathrm{N}(v)$ не съдържа s-клика, защото $\omega(G) = s$. Следователно, $\Delta(G) = \deg(v) = |\,\mathrm{N}(v)| \leq |W|$. От Пример 2.3 правим извода, че $\mathrm{V}(G) \setminus W$ е малко множество.

Определение 2.5. Графът G се нарича *обобщен r-хроматичен* граф, ако съществува r-разлагане

$$\mathrm{V}(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

за което множествата $V_1, V_2, \ldots, V_r$ са малки множества в G. Най-малкото цяло число r, за което G е обобщен r-хроматичен се означава с $\varphi(G)$.

Твърдение 2.6. *За всеки граф G е в сила*

$$\varphi(G) \leq \chi(G).$$

Доказателство. Тъй като всяко независимо множество (2.2) е и малко множество, твърдението следва непосредствено. □

Лема 2.7. *Нека G е граф и $W \subseteq \mathrm{V}(G)$. Ако U е малко множество в $G[W]$, то U е малко множество и в G.*

Доказателство. Нека $W_1 = \mathrm{V}(G) \setminus W$ и $U_1 = W \setminus U$. Тогава $\mathrm{V}(G)$ е дизюнктно обединение на W_1, U и U_1 и $|\mathrm{V}(G)| = |W_1| + |U| + |U_1|$. Нека $u \in U$. Тъй като U е малко множество в W, то $\deg_{G[W]}(u) \leq |W| - |U| = |U_1|$. От $\deg_G(u) \leq \deg_{G[W]} + |W_1| \leq |U_1| + |W_1| = |\mathrm{V}(G)| - |U|$, получаваме, че U е малко множество в G. □

Лема 2.7 ни дава начин, по който можем да получаваме разлагания на даден граф на малки множества. За целта избираме малко множество по някакъв начин. Това можем да направим по някой от начините от Примери 2.2, 2.3 и 2.4. Да допуснем, че сме намерили няколко малки множества. Следващото малко множество, съгласно лемата, можем да получим като намерим малко множество в породения от останалите (неизбраните) върхове граф.

Твърдение 2.8 ([36]). *За всеки граф G е в сила*

$$\varphi(G) \leq \omega(G) \leq \chi(G).$$

Доказателство. Ще използваме Лема 2.7 и ще избираме малки множества, както е описано в Пример 2.3. Нека v_1 е връх с максимална степен, т. е. $\deg(v_1) = \Delta(G)$. Да означим с $V_1 = \mathrm{V}(G) \setminus \mathrm{N}[v_1]$. Тогава, съгласно Пример 2.3, V_1 е малко множество. Да изберем по същия начин малко множество V_2 в $\mathrm{N}[v_1]$. Според Лема 2.7 V_2 ще бъде малко и в G. Продължавайки по този начин, ще получим разбиване на $\mathrm{V}(G)$ на малки множества. Нека това са V_1, $V_2, \ldots$, V_r за някое цяло число r. От конструкцията е ясно, че графът ще съдържа поне r-клика и, следователно $r \leq \omega(G)$. От дефиницията на $\varphi(G)$ получаваме, че $\varphi(G) \leq r$. Оттук $\varphi(G) \leq r \leq \omega(G)$ и $\varphi(G) \leq \omega(G)$. Дясното неравенство е очевидно. $\square$

Да отбележим, че горното разлагане отговаря на конструирането на α-редици в [30, 36] (вж. и Определение 2.19).

Всъщност, както ще видим в Глава 6 (Следствие 6.3) в по-обща ситуация, конструкцията от Твърдение 2.8 ни дава алгоритъм за точното намиране на $\varphi(G)$.

Теорема 2.9. *Нека G е граф с n върха, минимална степен δ, максимална степен Δ и средна степен d_1. Тогава:*

а) $\left\lceil \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_1} \right\rceil \leq \varphi(G) \leq \left\lceil \dfrac{n}{n - \Delta} \right\rceil$;

б) *Ако* $\frac{r-2}{r-1}n < \mathrm{d}_1 \le \Delta \le \frac{r-1}{r}n$ *за някое естествено число* $r > 1$, *то* $\varphi(G) = r$. *В частност, за* $r = 2$ *неравенството* $1 \le \delta \le \Delta \le n/2$ *ни дава* $\varphi(G) = 2$*;*

в) *Ако* G *е* r*-регулярен, то* $\varphi(G) = \left\lceil \frac{n}{n-r} \right\rceil$.

Доказателство. а) Лявата страна е Следствие 2.13.

Нека $A \subseteq \mathrm{V}(G)$ е множество с $n - \Delta$ елемента. Тогава за всяко $v \in A$,

$$\deg(v) \le \Delta = n - (n - \Delta) = n - |A|$$

и, следователно, A е малко множество. Сега ще разбием $\mathrm{V}(G) \setminus A$ на малки множества. Имаме, че $|\mathrm{V}(G) \setminus A| = \Delta$. Нека $V_1, V_2, \ldots, V_t$ е разлагане на $\mathrm{V}(G) \setminus A$ на $t = \left\lceil \frac{\Delta}{n-\Delta} \right\rceil$ множества, такива че

$$|V_i| = n - \Delta \text{ за } i = 1, 2, \ldots, t-1 \text{ и } |V_t| \le n - \Delta.$$

Тогава за всеки връх $v \in V_i$, $\deg(v) \le \Delta = n - (n - \Delta) \le n - |V_i|$ и V_i е малко множества за $1 \le i \le t$. Следователно $A \cup V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_t$ е разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на $1 + t = 1 + \left\lceil \frac{\Delta}{n-\Delta} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{n-\Delta} \right\rceil$ малки и множества и така

$$\varphi(G) \le \left\lceil \frac{n}{n-\Delta} \right\rceil.$$

б) Ако $\frac{r-2}{r-1}n < \mathrm{d}_1 \le \Delta \le \frac{r-1}{r}n$ от а) получаваме

$$r - 1 = \left\lceil \frac{n}{n - \frac{r-2}{r-1}n} \right\rceil < \left\lceil \frac{n}{n - \mathrm{d}_1 - 1} \right\rceil \le \varphi(G) \le$$

$$\le \left\lceil \frac{n}{n-\Delta} \right\rceil \le \left\lceil \frac{n}{n - \frac{r-1}{r}n} \right\rceil = r$$

и, следователно $\varphi(G) = r$.

в) От а) имаме $\left\lceil \frac{n}{n-\mathrm{d}_1} \right\rceil \le \varphi(G) \le \left\lceil \frac{n}{n-\Delta} \right\rceil$ и тогава,

$$\text{ако } \mathrm{d}_1 = \Delta = r, \text{ то } \varphi(G) = \left\lceil \frac{n}{n-r} \right\rceil.$$

$\square$

2. Усилване на Теоремата на Turán и на неравенството на Garo-Wei.

В този параграф за пълнота ще изложим с доказателствата някои резултати за $\varphi(G)$ на Ненов от [36], тъй като са важни за следващото изложение.

Твърдение 2.10 ([36]). *За всяко малко множество W на граф G е в сила*

$$\mathrm{CW}(W) = \sum_{v \in W} \frac{1}{n - \deg(v)} \leq 1,$$

където $n = |\mathrm{V}(G)|$.

Доказателство. За всяко $v \in W$ е изпълнено $\deg(v) \leq n - |W|$ (W е малко множество). Тогава $\dfrac{1}{n - \deg(v)} \leq \dfrac{1}{|W|}$. □

Твърдение 2.11 ([36]). *За всеки граф G е в сила*

$$\varphi(G) \geq \mathrm{CW}(G) = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n - \deg(v)},$$

където $n = |\mathrm{V}(G)|$.

Доказателство. Нека G е разбит на $r = \varphi(G)$ малки множества. Тъй като сумата върху всяко малко множество е не по-голяма от 1, получаваме че $\mathrm{CW}(G) \leq \varphi(G)$. □

Следствие 2.12 (вж. Следствие 1.21). *За всеки граф G е в сила $\omega(G) \geq \mathrm{CW}(G)$.*

Доказателство. Доказателството следва непосредствено от Твърдение 2.8 и Твърдение 2.11. □

Като използваме изпъкналостта на функцията $\dfrac{1}{n - x}$ и неравенството на Jensen, получаваме

Следствие 2.13. *За всеки граф G е в сила*

$$\varphi(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_1},$$

където $n = |\mathrm{V}(G)|$.

Като заместим в последното следствие $\mathrm{d}_1(G)$ с $\dfrac{2\mathrm{e}\,(G)}{n}$ имаме

Следствие 2.14 ([31]). *За всеки граф* G *е в сила*

$$\mathrm{e}\,(G) \leq \frac{n^2(\varphi(G) - 1)}{2\varphi(G)}.$$

Последното равенство усилва Теорема 1.16.

От неравенството $\varphi(G) \leq \omega\,(G)$ (Твърдение 2.8) и последното следствие, получаваме неравенството

$$\mathrm{e}\,(G) \leq \frac{n^2(\omega(G) - 1)}{2\,\omega(G)},$$

което е неравенството от Теорема 1.16 и поради това неравенството от Следствие 2.14 е по-силно. Следващият пример показва, че има ситуации, в които неравенството на Turán е много грубо, като неравенството от Следствие 2.14 е точно.

Пример 2.15. Да разгледаме граф G, който се състои от две непресичащи се копия на пълния граф K_n и n независими ребра, които свързват двете копия на K_n. Тогава имаме $\mathrm{e}\,(G) = n^2$, $\omega\,(G) = n$ и $\varphi(G) = 2$. Теоремата на Turán ни дава $\mathrm{e}\,(G) \leq 2n(n-1)$, а Следствие 2.14 — $\mathrm{e}\,(G) \leq n^2$, като последната оценка е точна.

3. Оценка за $\varphi(\mathrm{G})$ със средно-квадратично на степените.

Ще означаваме елементарните симетрични полиноми от степен s със $\sigma_s(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $1 \le s \le n$, т. е.

$$\sigma_s(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 x_2 \dots x_s + \cdots .$$

Ще използваме и следните равенства:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2, \tag{11}$$

$$x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3 = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3, \tag{12}$$

където $\sigma_i = \sigma_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

За да докажем следващата теорема ще използваме следното добре познато неравенство (неравенство на Maclaurin, вж. [25],[28]).

Теорема 2.16. *Нека $x_1, x_2, \dots, x_n$ са неотрицателни реални числа и $\sigma_s(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sigma_s$. Тогава*

$$\sqrt[s]{\frac{\sigma_s}{\binom{n}{s}}} \le \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sigma_1}{n}, \quad 1 \le s \le n. \tag{13}$$

Ако $s \ge 2$, то равенство в (13) е възможно точно когато $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Едно директно и не дълго доказателство на Теорема 2.16 може да се намери в [29].

Теорема 2.17 ([11, 4]). *Нека G е граф с n върха. Тогава*

$$\varphi(G) \ge \frac{n}{n - \mathrm{d}_2}.$$

Равенство се достига точно, когато $n \equiv 0 \pmod{\varphi(G)}$ и G е регулярен граф от степен $\dfrac{n(\varphi(G)-1)}{\varphi(G)}$.

Доказателство. Нека $\varphi(G) = r$, $\mathrm{V}(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ и

$$\mathrm{V}(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \ne j, \tag{14}$$

където $V_1, V_2, \ldots, V_r$ са малки множества в G, т.е. ако $n_i = |V_i|$, $i = 1,\ 2, \ldots,\ r$ то

$$\deg(v) \leq n - n_i, \quad \forall v \in V_i. \tag{15}$$

От (14) следва, че

$$\deg^2(v_1) + \deg^2(v_2) + \cdots + \deg^2(v_n) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{v \in V_i} \deg^2(v),$$

а от (15)

$$\sum_{v \in V_i} \deg^2(v) \leq n_i(n - n_i)^2.$$

Тогава имаме

$$\deg^2(v_1) + \deg^2(v_2) + \cdots + \deg^2(v_n) \leq \sum_{i=1}^{r} n_i(n - n_i)^2.$$

От (11) и (12) получаваме

$$\sum_{i=1}^{r} n_i(n - n_i)^2 = n\sigma_2 + 3\sigma_3,$$

където $\sigma_2 = \sigma_2(n_1, n_2, \ldots, n_r)$, $\sigma_3 = \sigma_3(n_1, n_2, \ldots, n_r)$.

Така получаваме неравенството

$$\deg^2(v_1) + \deg^2(v_2) + \cdots + \deg^2(v_n) \leq n\sigma_2 + 3\sigma_3. \tag{16}$$

Тъй като $\sigma_1 = n$, от Теорема 2.16 имаме

$$\sigma_2 \leq \frac{n^2(r-1)}{2r} \quad \text{и} \quad \sigma_3 \leq \frac{n^3(r-1)(r-2)}{6r^2}. \tag{17}$$

Сега, неравенството от теоремата следва от (16) и (17).

Очевидно, ако $n \equiv 0 \pmod r$ и

$$\deg(v_1) = \deg(v_2) = \cdots = \deg(v_r) = \frac{n(r-1)}{r},$$

то ще имаме равенство в неравенството. Нека сега имаме равенство. Тогава ще имаме също равенства в (17) и (15). От $r = \varphi(G) = \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_2}$ е ясно, че r дели n. От Теоремата на Maclaurin следва, че

$$n_1 = n_2 = \cdots = n_r = \frac{n}{r}.$$

Поради равенството в (15), т. е. $\deg(v) = n - n_i$, $v \in V_i$, имаме

$$\deg(v_1) = \deg(v_2) = \cdots = \deg(v_r) = \frac{n(r-1)}{r}. \qquad \square$$

Забележка 2.18 ([13]). Лесно може да се съобрази, че ако въведем означението $\sqrt{\nu} = \frac{\mathrm{d}_2}{\mathrm{d}_1}$, неравенството от Теорема 2.17 се преобразува в

$$2\mathrm{e}\,(G) \le \frac{(\varphi(G)-1)n^2}{\varphi\sqrt{\nu}}.$$

Последното неравенство не може да се замени с

$$2\mathrm{e}\,(G) \le \frac{(\varphi(G)-1)n^2}{\varphi\nu},$$

защото графът с редица от степени $(5;5;2;2;2;1;1)$ (такъв граф съществува) не удовлетворява неравенството ([13]). За този граф $\varphi(G) = 2$ и $\omega\,(G) = 3$.

Определение 2.19 ([30]). Нека G е граф и $v_1, v_2, \ldots, v_r \in \mathrm{V}(G)$. Редицата $v_1, v_2, \ldots, v_r$ се нарича α-редица в G ако следните условия са изпълнени:

а) $\deg(v_1) = \max\{\deg(v) \mid v \in \mathrm{V}(G)\}$;

б) $v_i \in \mathrm{N}[v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}]$ и v_i има максимална степен в индуцирания граф $G[\mathrm{N}(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}]$, $2 \le i \le r$.

Определение 2.20. Нека G е граф и $v_1, v_2, \ldots, v_r \in \mathrm{V}(G)$. Редицата $v_1, v_2, \ldots, v_r$ се нарича β-редица в G ако следните условия са изпълнени:

а) $\deg(v_1) = \max\{\deg(v) \mid v \in \mathrm{V}(G)\}$;

б) $v_i \in \mathrm{N}(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1})$ и

$$\deg(v_i) = \max\{\deg(v) \mid v \in \mathrm{N}(v_1, v_2, \ldots, v_{i-1})\},\ 2 \le i \le r.$$

Следствие 2.21. *Нека $v_1, v_2, \ldots, v_r$, $r \ge 2$ е α- или β-редица в един n-върхов граф G, такава че $\mathrm{N}(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ е малко множество. Тогава*

$$r \ge \frac{n}{n - \mathrm{d}_2}. \tag{18}$$

Доказателство. Тъй като $\mathrm{N}(v_1, v_2, \ldots, v_r)$ е малко множество, то G е обобщен r-хроматичен граф, [34]. Тогава от $r \geq \varphi(G)$, (18) и Теорема 2.17 получаваме исканото твърдение. □

Следствие 2.22. *Нека $v_1, v_2, \ldots, v_r$, $r \geq 2$, е β-редица в един n-върхов граф G, такава че*

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) + \cdots + \deg(v_r) \leq (r-1)n. \tag{19}$$

Тогава е в сила неравенството (18).

Доказателство. От (19) следва, че G е обобщен r-хроматичен граф ([33],[32]). □

Следващото следствие се получава непосредствено от Твърдение 2.8 и Теорема 2.17.

Следствие 2.23 ([11]; Теорема 1.22). *Нека G е n-върхов граф. Тогава*

$$\omega(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_2}. \tag{20}$$

Забележка 2.24. Доказателството на (20) дадено в [11] не е съвсем коректно, тъй като аргументите на стр. 53, ред 8 и ред 9 отгоре, са неоснователни.

Следствие 2.25. *Нека G е n-върхов граф, такъв че*

$$\omega(G) = \frac{n}{n - \mathrm{d}_2}. \tag{21}$$

Тогава G е пълен регулярен $\omega(G)$-хроматичен граф.

Доказателство. Нека $\varphi(G) = r$. От (21), Твърдение 2.8 и Теорема 2.17 имаме

$$\omega(G) = \varphi(G) = r = \frac{n}{n - \mathrm{d}_2}.$$

От Теорема 2.17, $n \equiv 0 \pmod{r}$ и G е регулярен граф от степен $\dfrac{n(r-1)}{r}$. Тогава

$$\mathrm{e}\left(G\right) = \frac{n^2(r-1)}{2r} = \frac{n^2(\omega\left(G\right)-1)}{2\omega\left(G\right)}.$$

Съгласно теоремата на Turán, G е пълен r-хроматичен и регулярен.

$\square$

4. Максимални малки множества

Да припомним, че с $\mathrm{S}(G)$ означаваме максималния брой върхове, които образуват малко множество. Ако W е малко множество и $|W| = \mathrm{S}(G)$, казваме, че W е максимално малко множество.

В този параграф ще докажем оценки за $\mathrm{S}(G)$, с които и Твърдение 2.26 можем да оценяваме числото на независимост и числото на кликово разбиване с $\mathrm{S}(G)$. Също така е предложен алгоритъм за намиране на $\mathrm{S}(G)$, като се построява едно максимално малко множество (Твърдение 2.27 б)).

Твърдение 2.26. *Нека G е граф. Тогава*

$$\mathrm{S}(G) \geq \theta\,(G) \geq \alpha\,(G).$$

Доказателство. Нека G има n върха и $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_r$ е разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на $r = \theta\,(G)$ клики. Можем да предполагаме, че за всеки индекс i съществува връх $v_i \in V_i$, който не е свързан с поне един връх от останалите $r-1$ множества. Ако допуснем противното, т. е. че съществува индекс i, такъв че всеки връх $v \in V_i$ е свързан с всички върхове на някое множество, то можем да преместим върховете на V_i в множествата, с които са свързани и ще получим разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на $r-1$ клики. Следователно, $\deg(v_i) \leq (n-1)-(r-1) = n-r$ за $1 \leq i \leq r$ и $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ е малко множество. Оттук $\theta\,(G) = r \leq \mathrm{S}(G)$. □

Твърдение 2.27. *Нека G е граф с n върха и нека $\mathrm{d}_1 \leq \mathrm{d}_2 \leq \ldots \leq \mathrm{d}_n$ е неговата редица от степени. Тогава*

а) $\mathrm{S}(G) \geq \dfrac{n}{\varphi(G)}$;

б) $\mathrm{S}(G) = \max\{s \mid \mathrm{d}_s \leq n-s\}$ *и* $\{v_1, v_2, \ldots, v_{S(G)}\}$ *е максимално малко множество на* G;

Доказателство. а) Нека $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_t$ е разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на $t = \varphi(G)$ малки множества. Тогава $\mathrm{S}(G) \geq \max\limits_{1 \leq i \leq t} |V_i| \geq \dfrac{n}{t} = \dfrac{n}{\varphi(G)}$.

б) Нека $v_1, v_2, \ldots, v_n$ са върховете на G подредени според редицата от степените му. Нека A е произволно малко множество. Ясно е, че за всеки връх $v \in A$, $\deg(v) \leq n - |A|$. Да подредим върховете на A в нарастващ ред така, че

$$\deg(u_1) \leq \deg(u_2) \leq \ldots \leq \deg(u_{|A|}) \leq n - |A|.$$

Тогава $\mathrm{d}_{|A|} \leq \deg(u_{|A|}) \leq n - |A|$. Следователно, за всяко малко множество A, $\mathrm{d}_{|A|} \leq \deg(u_{|A|}) \leq n - |A|$. Нека s е най-големият индекс в редицата от степени на G, такъв че $\mathrm{d}_s \leq n - s$. Тогава $s \geq \mathrm{S}(G)$. Но $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ е малко множество по дефиниция. Следователно $\mathrm{S}(G) \geq s$ и $s = S(G)$. □

Твърдение 2.28. *Нека G е граф с минимална степен δ и максимална степен Δ. Тогава*

а) $n - \Delta \leq \mathrm{S}(G) \leq n - \delta$*;*

б) *ако G е r-регулярен, то $\mathrm{S}(G) = n - r$.*

Доказателство. а) Нека $\delta = \mathrm{d}_1 \leq \mathrm{d}_2 \leq \ldots \leq \mathrm{d}_n = \Delta$ е редицата от степени на G. Имаме, че $\mathrm{d}_{n-\Delta} \leq n - (n - \Delta) = \Delta$. Следователно, $n - \Delta \in \{s \mid \mathrm{d}_s \leq n - s\}$ и тогава $n - \Delta \leq \mathrm{S}(G)$. От Твърдение 2.27 и $\mathrm{S}(G) \in \{s \mid \mathrm{d}_s \leq n - s\}$ следва, че

$$\delta \leq \mathrm{d}_{S(G)} \leq n - \mathrm{S}(G), \text{ т. е. } S(G) \leq n - \delta.$$

б) Следва непосредствено от а). □

Теорема 2.29. *Нека G е граф с n върха и максимална степен Δ. Тогава*

$$\alpha(G) \leq S(G) \leq \frac{n - \Delta}{2} + \sqrt{\frac{(n - \Delta)^2}{4} + n\Delta - 2\mathrm{e}(G)}.$$

Оценката е точна за регулярни графи.

Доказателство. Нека A е максимално малко множество, т. е. $|A| = \mathrm{S}(G)$. Тогава $\deg(v) \leq n - |A|$ за всяко $v \in A$. Тогава от

$$\begin{aligned} 2\mathrm{e}\,(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) &= \sum_{v \in A} \deg(v) + \sum_{v \in V(G) \setminus A} \deg(v) \\ &\leq (n - |A|)|A| + \Delta(n - |A|) \\ &= -|A|^2 + (n - \Delta)|A| + n\Delta, \end{aligned}$$

следва, че $|A|^2 - (n - \Delta)|A| - n\Delta + 2\mathrm{e}\,(G) \leq 0$. Като решим квадратното неравенство, получаваме исканата граница

$$\alpha\,(G) \leq S(G) \leq \frac{n - \Delta}{2} + \sqrt{\frac{(n - \Delta)^2}{4} + n\Delta - 2\mathrm{e}\,(G)}.$$

Ако G е r-регулярен, от Твърдение 2.28 б), горното неравенство става равенство, което показва, че оценката е точна. □

Следващото следствие се получава директно от предишната теорема и Твърдение 2.28.

Следствие 2.30. *Нека G е граф с n върха и максимална степен Δ. Тогава*

$$\begin{aligned} \alpha\,(G) \leq \theta(G) \leq S(G) \leq \left\lfloor \frac{n - \Delta}{2} + \sqrt{\frac{(n - \Delta)^2}{4} + n\Delta - 2\mathrm{e}\,(G)} \right\rfloor &\leq \\ \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + n^2 - n - 2\mathrm{e}\,(G)} \right\rfloor &. \end{aligned}$$

Доказателство. Неравенствата от първия ред следват непосредствено от Твърдение 2.26 и Теорема 2.29. Последното неравенство е изпълнено, защото лявата му част е е монотонна растяща функция на Δ, когато $\Delta \leq n - 1$. □

Ще отбележим, че неравенството

$$\alpha\,(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + n^2 - n - 2\mathrm{e}\,(G)} \right\rfloor$$

е известно като неравенство на Hansen-Zheng ([21]).

Глава 3

Още нови оценки за $\varphi(\mathbf{G})$

В тази глава ще докажем нови оценки за $\varphi(G)$ ([3]). Метода на симетричните полиноми, който използвахме в параграф 3, Глава 2 не дава възможност да получим тези нови оценки. Поради това ще използваме друг подход.

Лема 3.1. *Нека $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \in [0,1]$ са реални числа, такива че $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_r \le r - 1$. Тогава*

$$\sum_{i=1}^{r} (1-\beta_i)\beta_i^r \le \left(\frac{r-1}{r}\right)^r \tag{22}$$

и има равенство тогава и само тогава, когато $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_r = \dfrac{r-1}{r}$.

Доказателство. Ако $r = 1$, то $\beta_1 = 0$ и неравенството е очевидно. Нека $r \ge 2$. Да разгледаме функцията $f(x) = (1-x)x^{r-1}$, $x \ge 0$. От $f'(x) = x^{r-2}\big((r-1) - rx\big)$ виждаме, че $f(x)$ достига абсолютния си максимум, точно когато $x = \dfrac{r-1}{r}$ и тогава

$$f(x) \le f\left(\frac{r-1}{r}\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{r-1}{r}\right)^{r-1}.$$

Следователно

$$(1-\beta_i)\beta_i^r = (1-\beta_i)\beta_i^{r-1}\beta_i \le \frac{1}{r}\left(\frac{r-1}{r}\right)^{r-1}\beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, r.$$

Тогава от условието $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r \le r - 1$ получаваме

$$\sum_{i=1}^{r} (1-\beta_i)\beta_i^r \le \frac{1}{r}\left(\frac{r-1}{r}\right)^{r-1}(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r) \le \left(\frac{r-1}{r}\right)^r$$

и исканото неравенство е изпълнено.

Да предположим, че имаме равенство в (22). Тогава ще имаме равенство и във всяко от горните неравенства и, следователно,

$$(1-\beta_i)\beta_i^{r-1} = \frac{1}{r}\left(\frac{r-1}{r}\right)^{r-1}, \quad i = 1, 2, \ldots, r,$$

откъдето $\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_r = \dfrac{r-1}{r}$. □

Теорема 3.2. *Нека G е граф с n върха. Тогава са в сила следните твърдения:*

а) *За всяко естествено число $r \leq \varphi(G)$, $\varphi(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_r(G)}$, а равенство се достига тогава и само тогава, когато G е $\dfrac{n(\varphi(G)-1)}{\varphi(G)}$-регулярен граф.*

б) *$\varphi(G) \geq \dfrac{n}{n-\mathrm{d}_3(G)}$, а равенство се достига тогава и само тогава, когато G е $\dfrac{n(\varphi(G)-1)}{\varphi(G)}$-регулярен граф.*

в) *Ако $\varphi(G) \neq 2$, то $\varphi(G) \geq \dfrac{n}{n-\mathrm{d}_4(G)}$, но съществува граф G, за който $\varphi(G) = 2$ и $\varphi(G) < \dfrac{n}{n-\mathrm{d}_4(G)}$.*

Доказателство. а) Тъй като $\mathrm{d}_{r-1}(G) \leq \mathrm{d}_r(G)$ за всяко $r \leq \varphi(G)$, достатъчно е да докажем, че $\varphi(G) \geq \dfrac{n}{n-\mathrm{d}_{\varphi(G)}(G)}$. Нека $\varphi(G) = \varphi$ и нека $\mathrm{V}(G) = V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_\varphi$ е разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на малки множества и нека $n_i = |V_i|$, $1 \leq i \leq \varphi$. Понеже $\deg(v) \leq n - n_i$ за всяко $v \in V_i$ и $1 \leq i \leq \varphi$, имаме

$$n(\mathrm{d}_\varphi(G))^\varphi = \sum_{v\in V(G)} \deg^\varphi(v) = \sum_{i=1}^{\varphi}\sum_{v\in V_i} \deg^\varphi(v) \leq \sum_{i=1}^{\varphi} n_i(n-n_i)^\varphi. \quad (23)$$

Полагайки $\beta_i = 1 - \dfrac{n_i}{n}$ for $1 \leq i \leq \varphi$, горното неравенство може да бъде пренаписано като

$$n(\mathrm{d}_\varphi(G))^\varphi = \sum_{v\in V(G)} \deg^\varphi(v) \leq n^{\varphi+1}\sum_{i=1}^{\varphi}(1-\beta_i)\beta_i^\varphi. \quad (24)$$

Тъй като $\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_\varphi=\varphi-1$, от Лема 3.1 получаваме $\mathrm{d}_\varphi(G)\leq\dfrac{n(\varphi-1)}{\varphi}$, откъдето

$$\varphi(G)=\varphi\geq\frac{n}{n-\mathrm{d}_\varphi(G)}.$$

Следователно доказахме

$$\varphi\geq\frac{n}{n-\mathrm{d}_\varphi}\geq\frac{n}{n-\mathrm{d}_{\varphi-1}(G)}\geq\ldots\geq\frac{n}{n-\mathrm{d}_r(G)}. \tag{25}$$

за всяко $1\leq r\leq\varphi(G)$.

Да допуснем, че $\varphi(G)=\dfrac{n}{n-\mathrm{d}_r(G)}$ за някое $1\leq r\leq\varphi=\varphi(G)$. Тогава имаме равенство навсякъде във веригата от неравенства (25). В частност, $\varphi=\dfrac{n}{n-\mathrm{d}_\varphi(G)}$, което е еквивалентно на $\mathrm{d}_\varphi=\dfrac{n(\varphi-1)}{\varphi}$ и, следователно, също имаме равенство в (23) и (24). От равенството в (23) следва, че $\deg(v)=n-n_i$ за $v\in V_i$, $1\leq i\leq\varphi$. От $\mathrm{d}_\varphi=\dfrac{n(\varphi-1)}{\varphi}$ и равенството в (24) виждаме, че в (22) също имаме равенство. Освен това, от Лема 3.1 следва (за $r=\varphi$), че $\beta_i=\dfrac{\varphi-1}{\varphi}$ за $1\leq i\leq\varphi$ и тогава $n_i=\dfrac{n}{\varphi}$ и φ делят n. Оттук $\deg(v)=n-n_i=\dfrac{n(\varphi-1)}{\varphi}$ за всяко $v\in V_i$. Така от $1\leq i\leq\varphi$ получаваме, че G е $\dfrac{n(\varphi-1)}{\varphi}$-регулярен.

Обратно, ако G е $\dfrac{n(\varphi-1)}{\varphi}$-регулярен, очевидно

$$\mathrm{d}_\varphi(G)=\frac{n(\varphi-1)}{\varphi}=\mathrm{d}_r(G)$$

за всяко $r\leq\varphi$. Тогава от Теорема 2.9 имаме

$$\varphi(G)=\left\lceil\frac{n}{n-\frac{n(\varphi-1)}{\varphi}}\right\rceil=\frac{n}{n-\frac{n(\varphi-1)}{\varphi}}=\frac{n}{n-\mathrm{d}_r(G)}.$$

б) Ако $\varphi=\varphi(G)\geq 3$, то от а) имаме $\varphi(G)\geq\dfrac{n}{n-\mathrm{d}_3(G)}$ и неравенството става равенство тогава и само тогава, когато G е $\dfrac{(\varphi-1)n}{\varphi}$-регулярен.

Остава да разгледаме случаите $\varphi(G)=1$ и $\varphi(G)=2$.

Да отбележим, че $\varphi(G) = 1$ е изпълнено тогава и само тогава, когато $G = \overline{K_n}$. Следователно, в този случай $\mathrm{d}_3(G) = 0$ и $\varphi(G) = 1 = \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}$.

Нека сега $\varphi(G) = 2$ и $\mathrm{V}(G) = V_1 \cup V_2$ е разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на малки множества. Полагайки $|V_1| = n_1$ и $|V_2| = n_2 = n - n_1$ имаме

$$\sum_{v \in V(G)} \deg^3(v) = \sum_{v \in V_1} \deg^3(v) + \sum_{v \in V_2} \deg^3(v) \leq$$
$$\leq n_1(n-n_1)^3 + n_2(n-n_2)^3 = n_1 n_2 (n^2 - 2n_1 n_2).$$

Последният израз достига максимума си, когато $n_1 n_2 = \dfrac{n^2}{4}$. Следователно $\displaystyle\sum_{v \in V(G)} \deg^3(v) \leq \frac{n^4}{8}$ и $\mathrm{d}_3(G) \leq \dfrac{n}{2}$, откъдето $\dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)} \leq 2 = \varphi(G)$.

Да допуснем сега, че $\varphi(G) = 2 = \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}$. Тогава неравенството става равенство. Следователно $n_1 n_2 = \dfrac{n^2}{4}$ и $\deg(v) = n - n_i$ за $v \in V_i$, $i = 1, 2$. Така $n_1 = n_2 = \dfrac{n}{2} = \dfrac{n(\varphi - 1)}{\varphi}$ и G е $\dfrac{n(\varphi-1)}{\varphi}$-регулярен граф.

От друга страна, ако G е $\dfrac{n}{2}$-регулярен граф, то $\mathrm{d}_3(G) = \dfrac{n}{2}$ и, от Теорема 2.9 в), $\varphi(G) = 2$. Следователно $\varphi(G) = 2 = \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}$.

в) Случаят $\varphi(G) = 1$ е тривиален.

Ако $\varphi(G) \geq 4$, то твърдението следва от а).

Случаят $\varphi(G) = 3$ ще докажем като използваме множители на Лагранж. Аналогично на а), разлагането на $\mathrm{V}(G)$ на $\varphi(G) = 3$ малки множества V_1, V_2, V_3, за които $|V_1| = n_1$, $|V_2| = n_2$ и $|V_3| = n_3$, води до неравенството

$$\left(\frac{\mathrm{d}_4(G)}{n}\right)^4 \leq \sum_{i=1}^{3} (1 - \beta_i)\beta_i^4 = f(\beta_1, \beta_2, \beta_3),$$

където $\beta_i = 1 - \dfrac{n_i}{n}$ и, очевидно, $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 2$ и $\beta_i \in [0,1]$, за $i = 1,2,3$. Ще докажем, че $f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \le \left(\dfrac{2}{3}\right)^4$. Нека

$$F(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda) = \sum_{i=1}^{3}(1-\beta_i)\beta_i^4 + \lambda(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 2)$$

е функцията на Лагранж. Екстремалните точки са или решения на системата

$$\left|\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial \beta_i} = 4\beta_i^3 - 5\beta_i^4 - \lambda = 0, \quad i = 1,2,3 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 - 2 = 0 \end{array}\right. ,$$

или са точки от границата.

Ще докажем, че системата няма решение, за което $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ са две по две различни. Да допуснем противното. Тогава $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ са три различни корена на $g(x) = 5x^4 - 4x^3 + \lambda$. Така $\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 2$ и от формулите на Виет следва, че четвъртият корен на g е $-\dfrac{6}{5}$. Следователно $\lambda = -12\left(\dfrac{6}{5}\right)^2$ и тогава $g(x)$ има само два реални корена, което е противоречие. Следователно, ако $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ е решение на системата, то поне две от тях са равни.

Нека $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ е екстремална точка, която не лежи на границата. Тъй като $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ са решения на системата, можем да предполагаме, че $\beta_1 = 2\beta$ и $\beta_2 = \beta_3 = 1 - \beta$, където $\beta \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. Тогава

$$f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = f(\beta) = -30\beta^5 + 8\beta^4 + 12\beta^3 - 8\beta^2 + 2\beta$$

и

$$f'(\beta) = -2(3\beta - 1)(25\beta^3 + 3\beta^2 - 5\beta + 1).$$

Производната f' има два реални корена, $\dfrac{1}{3}$ и някакъв друг, който е отрицателно число. Следователно, f достига максимума си $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4$ в $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ точно когато $\beta = \dfrac{1}{3}$.

Нека сега $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ принадлежи на границата. Без ограничение на общността, можем да смятаме, че $\beta_3 = 1$ и $\beta_1 + \beta_2 = 1$. Тогава

$$f(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (1-\beta_1)\beta_1^3 + (1-\beta_2)\beta_2^3 = \beta_2\beta_1^3 + \beta_1\beta_2^3 =$$
$$= \beta_1\beta_2(1 - 3\beta_1\beta_2) \leq \frac{1}{6}(1 - 3\frac{1}{6}) = \frac{1}{12}$$

и имаме равенство, точно когато $\beta_1\beta_2 = \dfrac{1}{6}$ ($\beta_1\beta_2 \in \left[0, \dfrac{1}{4}\right]$ когато $\beta_1 + \beta_2 = 1$ и $\beta_1, \beta_2 \in [0,1]$). Така максимумът върху границата е $\dfrac{1}{12}$, което е строго по-малко от $\left(\dfrac{2}{3}\right)^4$. Следователно

$$\left(\frac{\mathrm{d}_4(G)}{n}\right)^4 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \left(\frac{\varphi(G)-1}{\varphi(G)}\right)^4.$$

Тогава $\varphi(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_4(G)}$.

Да разгледаме графът $G = K_{1,9}$. Ясно е, че $\varphi(G) = 2$, $\mathrm{d}_4(G) = \sqrt[4]{657} > 5$. Следователно $2 = \varphi(G) < \dfrac{10}{10 - \mathrm{d}_4(G)}$. □

Следствие 3.3. *Нека G е граф с n върха. Тогава са в сила следните твърдения.*

а) *За всяко естествено число $r \leq \varphi(G)$, $\omega(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_r(G)}$ и има равенство, точно когато G е пълен $\omega(G)$-хроматичен граф на Turán (Определение 1.9)*
$$T_{\omega(G)}(n) = K\left(\tfrac{n}{\omega(G)}, \tfrac{n}{\omega(G)}, \ldots, \tfrac{n}{\omega(G)}\right).$$

б) *$\omega(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}$ и има равенство, точно когато G е пълен $\omega(G)$-хроматичен граф на Turán $T_{\omega(G)}(n)$.*

в) *Ако $\varphi(G) \neq 2$, то $\omega(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_4(G)}$.*

Доказателство. а) От Твърдение 2.8 и Теорема 3.2 а) имаме, че $\omega(G) \geq \varphi(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_r(G)}$. Да допуснем, че $\omega(G) = \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_r(G)}$. Тогава имаме равенство в Теорема 3.2 а). Тогава, полагайки $\varphi(G) = \omega(G) = \omega$, G е $\dfrac{n(\omega-1)}{\omega}$-регулярен и $\mathrm{e}(G) = \dfrac{n^2(\omega-1)}{2\omega}$. Тъй като $\omega(G) = \omega$, от теоремата на Turán следва, че G е регулярен пълен ω-хроматичен граф, т. е. G е пълен ω-хроматичен граф на Turán

$K\left(\frac{n}{\omega(G)}, \frac{n}{\omega(G)}, \ldots, \frac{n}{\omega(G)}\right)$. Обратно, ако G е пълен ω-хроматичен граф на Turán $K\left(\frac{n}{\omega(G)}, \frac{n}{\omega(G)}, \ldots, \frac{n}{\omega(G)}\right)$, то $\mathrm{d}_r(G) = \dfrac{n(\omega-1)}{\omega}$ и, следователно, $\omega\,(G) = \omega = \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_r(G)}$.

б) От Твърдение 2.8 и Теорема 3.2 б) имаме, че $\omega\,(G) \geq \varphi(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}$. Да допуснем, че $\omega = \omega\,(G) = \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}$. Тогава $\varphi(G) = \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}$, т. е. имаме равенство в Теорема 3.2 б). Тогава, полагайки $\varphi(G) = \omega\,(G) = \omega$, G е $\dfrac{n(\omega-1)}{\omega}$-хроматичен и $\mathrm{e}\,(G) = \dfrac{n^2(\omega-1)}{2\omega}$. Тъй като $\omega\,(G) = \omega$, от теоремата на Turán's следва, че G е регулярен пълен ω-хроматичен граф, т. е. $G = K_{\frac{n}{\omega}, \frac{n}{\omega}, \ldots, \frac{n}{\omega}}$. Обратно, ако G е пълен ω-хроматичен граф на Turán $K\left(\frac{n}{\omega(G)}, \frac{n}{\omega(G)}, \ldots, \frac{n}{\omega(G)}\right)$, то $\mathrm{d}_3(G) = \dfrac{n(\omega-1)}{\omega}$ и, следователно, $\omega\,(G) = \omega = \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}$.

в) Следва от Твърдение 2.8 и Теорема 3.2 в). □

Теорема 3.2 б) подобрява границата $\varphi(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_2(G)}$ от Теорема 2.17 ([4]) и Следствие 3.3 б) е по-добро от неравенството $\omega\,(G) \geq \dfrac{n}{n - d_2(G)}$ формулирано [11] и доказано по-късно в [4].

Глава 4

Модификации на малки множества

В тази глава ще разгледаме някои модификации на малки множества разгледани в [3] и [5].

1. $\boldsymbol{\delta_k}$-малки множества

Определение 4.1. Нека G е n-върхов граф и $W \subseteq \mathrm{V}(G)$. Ще казваме, че W е *δ_k-малко множество* на G ако

$$\mathrm{d}_k(W) \leq n - |W| \, .$$

С $\varphi^{(k)}(G)$ ще означаваме най-малкия брой δ_k-множества на G, на които $\mathrm{V}(G)$ се разлага.

Ще означаваме максималния брой върхове в δ_k-множество на G с $\mathrm{S}^{(k)}(G)$.

Забележка 4.2. С $\mathrm{S}(G)$ означавахме максималния брой върхове в малко множество на G (Определение 2.1).

Забележка 4.3. δ_1-малките множества са наречени в [3] β-малки множества и вместо $\varphi^{(1)}(G)$ там е използвано $\varphi^{\beta}(G)$.

Забележка 4.4. Да отбележим, че вместо $\mathrm{S}^{(k)}(G)$ в [5] е използвано $\alpha^{(k)}(G)$.

В [3] е доказано

Твърдение 4.5 ([3]).

$$\varphi^{(1)}(G) \geq \left\lceil \frac{n}{n - \mathrm{d}_1(G)} \right\rceil .$$

Доказателство. Нека $t = \varphi^{(1)}(G)$ и нека $\mathrm{V}(G) = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t$ е разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на δ_1-малки множества. Тогава, от дефиницията на δ_1-малки множества и неравенството на Jensen, получаваме

$$n\mathrm{d}_1(G) = 2\mathrm{e}\,(G) = \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = \sum_{i=1}^{t} \sum_{v \in A_i} \deg(v) \le$$
$$\le \sum_{i=1}^{t} (n - |A_i|)|A_i| \le n\left(n - \frac{n}{t}\right).$$

Следователно $\mathrm{d}_1(G) \le n - \dfrac{n}{t} = n - \dfrac{n}{\varphi^{(1)}(G)}$, което е еквивалентно на

$$\varphi^{(1)}(G) \ge \frac{n}{n - \deg_1(G)}. \qquad \square$$

Твърдение 4.6. *Нека G е n-върхов граф. Тогава*

а) *Всяко малко множество на G е и δ_k-малко множество на G за всяко естествено k.*

б) *Всяко δ_k-малко множество на G е и δ_{k-1}-малко множество на G.*

Доказателство. Нека W е малко множество на G. Тогава

$$\deg(v) \le n - |W|\,, \qquad \forall v \in W.$$

Следователно $\mathrm{d}_k(W) \le n - |W|$, т. е. W е δ_k-малко множество.

Твърдението в б) следва от неравенството $\mathrm{d}_{k-1}(W) \le \mathrm{d}_k(W)$ (вж. [**25**, **28**]). $\square$

Да отбележим, че ако G е r-регулярен граф, то $\mathrm{d}_k(W) = r$ за всяко естествено число k. Така всяко δ_k-множество от G е и малко множество на G.

Твърдение 4.7. *Нека G е граф. Тогава*

$$\varphi^{(1)}(G) \le \varphi^{(2)}(G) \le \cdots \le \varphi^{(k)}(G) \le \cdots \le \varphi(G) \le \omega\,(G) \le \chi(G).$$

Доказателство. Неравенството $\chi(G) \geq \omega(G)$ е очевидно. Неравенството $\varphi(G) \leq \omega(G)$ е Твърдение 2.8 ([36, 3]). Неравенството $\varphi^{(k)}(G) \leq \varphi(G)$ следва от Твърдение 4.6 а) и неравенството $\varphi^{(k-1)}(G) \leq \varphi^{(k)}(G)$ следва от Твърдение 4.6 б). □

Твърдение 4.8.

$$\left\lceil \frac{n}{n - \mathrm{d}_1(G)} \right\rceil \leq \varphi^{(k)}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{n - \Delta(G)} \right\rceil .$$

Доказателство. Дясното неравенство следва от Теорема 2.9 а) и Твърдение 4.7. Лявото неравенство се получава от Твърдение 4.5 и Твърдение 4.7. □

2. Усилване на Твърдение 4.7

Теорема 4.9. *Нека G е граф. Тогава съществува естествено число $k_0 = k_0(G)$, такова че за всяко $k \geq k_0$ е в сила*

а) *Всяко δ_k-малко множество на G е малко множество на G.*

б) $\varphi^{(1)}(G) \leq \cdots \leq \varphi^{(k_0)}(G) = \varphi^{(k_0+1)}(G) = \cdots = \varphi(G)$.

Доказателство. Да фиксираме подмножество на $\mathrm{V}(G)$, например W и нека $\Delta(W) = \max\{\deg(v) \mid v \in W\}$. Тогава $\mathrm{d}_k(W) \leq \Delta(W)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \mathrm{d}_k(W) = \Delta(W)$ (вж. [25]).

Тъй като $\mathrm{V}(G)$ има краен брой подмножества, то съществува k_0, такова че за произволно $W \subseteq \mathrm{V}(G)$

$$\Delta(W) - \frac{1}{2} \leq \mathrm{d}_k(W), \text{ за всяко } k \geq k_0. \tag{26}$$

Да допуснем, че W е δ_k-малко множество на G и $k \geq k_0$, т. е.

$$\mathrm{d}_k(W) \leq n - |W| . \tag{27}$$

От (26) и (27) имаме, че

$$\Delta(W) - \frac{1}{2} \leq n - |W| .$$

Тъй като $\Delta(W)$ и $n - |W|$ са естествени, от последното неравенство получаваме, че $\Delta(W) \leq n - |W|$. От дефиницията на $\Delta(W)$ следва, че $\deg(v) \leq n - |W|$ за всяко $v \in W$, т. е. W е малко множество. Така а) е доказано. Твърдението в б) очевидно следва от а). $\square$

3. Горна граница за $\mathrm{d}_{\mathbf{k}}(\mathbf{G})$

Ще ни трябва следното усилване на Лема 3.1:

Лема 4.10. *Нека $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r \in [0,1]$ и $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_r = r - 1$. Тогава за всяко естествено $k \leq r$*

$$\sum_{i=1}^{r} (1 - \beta_i)\beta_i^k \leq \left(\frac{r-1}{r}\right)^k. \tag{28}$$

Доказателство. Случаят $k = r$ следва от Лема 3.1 ([3]). Затова ще предполагаме, че $k \leq r - 1$. За естествено число n ще използваме означението

$$S_n = \beta_1^n + \beta_2^n + \cdots + \beta_r^n.$$

Можем да пренапишем неравенството (28) по следния начин

$$S_k - S_{k+1} \leq \left(\frac{r-1}{r}\right)^k. \tag{29}$$

Тъй като

$$\frac{r-1}{r} = \frac{S_1}{r} \leq \sqrt[k]{\frac{S_k}{r}} \leq \sqrt[k+1]{\frac{S_{k+1}}{r}} \quad (\text{вж. [25, 28]}),$$

имаме, че

$$S_{k+1} \geq \frac{1}{\sqrt[k]{r}} S_k^{\frac{k+1}{k}} \tag{30}$$

и

$$S_k \geq \frac{(r-1)^k}{r^{k-1}}. \tag{31}$$

От (30) получаваме, че

$$S_k - S_{k+1} \leq S_k - \frac{1}{\sqrt[k]{r}} S_k^{\frac{k+1}{k}}. \tag{32}$$

Ще разгледаме функцията

$$f(x) = x - \frac{1}{\sqrt[k]{r}} x^{\frac{k+1}{k}}, \quad x > 0.$$

Вземайки предвид (29) и (32), достатъчно е да докажем, че

$$f(S_k) \leq \left(\frac{r-1}{r}\right)^k.$$

От $f'(x) = 1 - \dfrac{k+1}{k\sqrt[k]{r}} x^{\frac{1}{k}}$ следва, че $f'(x)$ има единствен положителен корен

$$x_0 = \frac{rk^k}{(k+1)^k}$$

и $f(x)$ намалява в $[x_0, \infty)$. Съгласно (31), $S_k \geq \dfrac{(r-1)^k}{r^{k-1}}$. Тъй като $k \leq r-1$, то $\dfrac{(r-1)^k}{r^{k-1}} \geq x_0$. Следователно

$$f(S_k) \leq f\left(\frac{(r-1)^k}{r^{k-1}}\right) = \left(\frac{r-1}{r}\right)^k. \qquad \square$$

Теорема 4.11. *Нека G е n-върхов граф и*

$$\mathrm{V}(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

където V_i са δ_k-малки множества. Тогава, за всяко естествено $k \leq r$ са изпълнени следните неравенства

а) $\mathrm{d}_k(G) \leq \dfrac{n(r-1)}{r}$;

б) $r \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_k(G)}$.

Доказателство. Нека $n_i = |V_i|$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогава

$$\sum_{v \in V(G)} d^k(v) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{v \in V_i} d^k(v) \leq \sum_{i=1}^{r} n_i (n - n_i)^k.$$

Да положим $\beta_i = 1 - \dfrac{n_i}{n}$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогава

$$\sum_{v \in V(G)} d^k(v) \leq n^{k+1} \sum_{i=1}^{r} \beta_i (1 - \beta_i)^k, \quad k \geq r.$$

Неравенството в а) следва от последното неравенство и Лема 4.10. Решавайки неравенството в а) за r, получаваме неравенството в б). $\square$

4. Следствия от Теорема 4.11

Следствие 4.12. *Нека G е n-върхов граф и k и s са естествени числа, такива че $k \leq \varphi^{(s)}(G)$. Тогава*

а)

$$\mathrm{d}_k(G) \leq \frac{\big(\varphi^{(s)}(G) - 1\big)n}{\varphi^{(s)}(G)} \leq \frac{\big(\varphi(G) - 1\big)n}{\varphi(G)} \leq$$
$$\leq \frac{(\omega(G) - 1)n}{\omega(G)} \leq \frac{(\chi(G) - 1)n}{\chi(G)};$$

б) $\varphi^{(s)}(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_k(G)}$.

Доказателство. Нека $\varphi^{(s)}(G) = r$ и

$$\mathrm{V}(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r, \qquad V_i \cap V_j = \emptyset,$$

където V_i са δ_k-малки множества. Тогава, лявото неравенство в а) следва от Теорема 4.11 а). Другото неравенство в а) следва от неравенството $\varphi^{(s)}(G) \leq \varphi(G) \leq \omega(G) \leq \chi(G)$. Неравенството в б) следва от Теорема 4.11 а). □

Забележка 4.13. Случаят $k = s = 1$ на Следствие 4.12 е доказан в [3] (вж. Теорема 6.3 (i) и Теорема 6.2 (ii)).

Следствие 4.14. *Нека G е n-върхов граф. Тогава за всяко естествено $s \geq 2$,*

$$\varphi^{(s)}(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_2(G)}.$$

Доказателство. Ако $\varphi^{(2)}(G) = 1$, то $\mathrm{E}(G) = \emptyset$, т. е. $G = \overline{K}_n$ и неравенството е очевидно.

Ако $\varphi^{(2)}(G) \geq 2$,то $\varphi^{(s)}(G) \geq 2$, защото $s \geq 2$. Следователно Следствие 4.14 се получава от Следствие 4.12 б). □

Следствие 4.15 ([4]). *За всеки n-върхов граф*

$$\varphi(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_2(G)}.$$

Доказателство. Това неравенство следва от Следствие 4.14, защото $\varphi^{(s)}(G) \leq \varphi(G)$. □

Следствие 4.16 ([3]). *Нека G е n-върхов граф. Тогава за всяко естествено число $k \leq \varphi(G)$*

$$\varphi(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_k(G)}.$$

Доказателство. Според Теорема 4.9 съществува естествено число s, такова че $\varphi(G) = \varphi^{(s)}(G)$. Тъй като $k \leq \varphi^{(s)}(G)$, от Следствие 4.12 б) получаваме

$$\varphi(G) = \varphi^{(s)}(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_k(G)}.$$ □

Следствие 4.17. *Нека G е n-върхов граф. Тогава за всяко естествено число $s \geq 3$*

$$\varphi^{(s)}(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}.$$

Доказателство. Тъй като $s \geq 3$, то $\varphi^{(s)}(G) \geq \varphi^{(3)}(G)$. Следователно, достатъчно е да докажем неравенството

$$\varphi^{(3)}(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}. \tag{33}$$

Ако $\varphi^{(3)}(G) \geq 3$, то (33) следва от Следствие 4.12 б).

Ако $\varphi^{(3)}(G) = 1$, то неравенството (33) е очевидно, защото $\mathrm{d}_3(G) = 0$. Нека $\varphi^{(3)}(G) = 2$ и $\mathrm{V}(G) = V_1 \cup V_2$, където V_i, $i = 1, 2$ са δ_3-малки множества. Нека $n_i = |V_i|$, $i = 1, 2$. Тогава

$$\sum_{v \in V(G)} d^3(v) = \sum_{v \in V_1} d^3(v) + \sum_{v \in V_2} d^3(v) \leq$$

$$\leq n_1(n - n_1)^3 + n_2(n - n_2)^3 = n_1 n_2(n^2 - 2n_1 n_2) \leq \frac{n^4}{8}. \tag{34}$$

Следователно $\mathrm{d}_3(G) \leq \dfrac{n}{2}$ и получаваме, че

$$\frac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)} \leq 2 = \varphi^{(3)}(G).$$ □

Тъй като $\varphi(G) \geq \varphi^{(3)}(G)$, от Следствие 4.17 получаваме

Следствие 4.18 ([3]). *За всеки n-върхов граф G*

$$\varphi(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}.$$

Следствие 4.19. *Нека G е n-върхов граф и $\varphi^{(4)}(G) \neq 2$. Тогава за всяко естествено число $s \geq 4$,*

$$\varphi^{(s)}(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_4(G)}.$$

Доказателство. Тъй като $\varphi^{(s)}(G) \geq \varphi^{(4)}(G)$ за $s \geq 4$, достатъчно е да докажем неравнството

$$\varphi^{(4)}(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_4(G)}. \tag{35}$$

Ако $\varphi^{(4)}(G) \geq 4$ неравенството (35) следва от Следствие 4.12 б).

Ако $\varphi^{(4)}(G) = 1$ неравенството (35) е очевидно, защото $\mathrm{d}_4(G) = 0$.

Остава да разгледаме случая $\varphi^{(4)}(G) = 3$. Нека $\mathrm{V}(G) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$, където V_i, са δ_4-малки множества и нека $n_i = |V_i|$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Тогава

$$\sum_{v \in V(G)} d^4(v) = \sum_{v \in V_1} d^4(v) + \sum_{v \in V_2} d^4(v) + \sum_{v \in V_3} d^4(v) \leq$$
$$\leq n_1(n - n_1)^4 + n_2(n - n_2)^4 + n_3(n - n_3)^4. \tag{36}$$

Нека $\beta_i = 1 - \dfrac{n_i}{n}$, $i = 1,\ 2,\ 3$. Получаваме

$$\sum_{v \in V(G)} d^4(v) \leq n^5 \left(\sum_{i=1}^{3} (1 - \beta_i)\beta_i^4 \right).$$

Тъй като $\displaystyle\sum_{i=1}^{3} (1 - \beta_i)\beta_i^4 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^4$ (вж. Лема 3.1 или доказателството на Теорема 5.4 (iii) в [3]), то

$$\mathrm{d}_4(G) \leq \frac{2}{3} = \frac{\varphi^{(4)}(G) - 1}{\varphi^{(4)}(G)}.$$

Като решим последното неравенство за $\varphi^{(4)}(G)$, получаваме (35). $\square$

Следствие 4.20. *Нека G е n-върхов граф и $\varphi^{(4)}(G) \neq 2$. Тогава*

$$\varphi(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_4(G)}. \tag{37}$$

Забележка 4.21. Съгласно Теорема 3.2 в), неравенството (35) е изпълнено ако $\varphi(G) \neq 2$ ([3]).

5. Максимални $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{k}}$-множества

От Твърдение 4.6 лесно получаваме.

Твърдение 4.22. *За всеки граф G*

$$\mathrm{S}^{(1)}(G) \geq \mathrm{S}^{(2)}(G) \geq \cdots \geq \mathrm{S}^{(k)}(G) \geq \cdots \geq S(G) \geq \alpha\,(G).$$

От Теорема 4.9 получаваме

Теорема 4.23. *За всеки граф G съществува единствено число $k_0 = k_0(G)$, такова че*

$$\mathrm{S}^{(1)}(G) \geq \mathrm{S}^{(2)}(G) \geq \cdots \geq \mathrm{S}^{(k_0)}(G) = \mathrm{S}^{(k_0+1)}(G) \cdots = S(G).$$

Твърдение 4.24. *Нека*

$$\mathrm{V}(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \quad \text{и} \quad \deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \cdots \leq \deg(v_n).$$

Тогава

$$\mathrm{S}^{(k)}(G) = \max\{s \mid \mathrm{d}_k(\{v_1, v_2, \dots v_s\}) \leq n - s\} =$$

$$= \max\{s \mid \{v_1, v_2, \dots v_s\} \text{ е } \delta_k\text{-малко множество в } G\}.$$

Доказателство. Нека

$$s_0 = \max\{s \mid \{v_1, v_2, \dots v_s\} \text{ е } \delta_k\text{-малко множество в } G\}.$$

Тогава $s_0 \leq \mathrm{S}^{(k)}(G)$. Нека $\mathrm{S}^{(k)}(G) = r$ и нека $\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}\}$ е δ_k-малко множество. От $\mathrm{d}_k(\{v_1, v_2, \dots, v_r\}) \leq \mathrm{d}_k(\{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_r}\})$ следва, че $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ също е δ_k-малко множество. Следователно $\mathrm{S}^{(k)}(G) = r \leq s_0$. $\square$

Твърдение 4.25. *За всяко естествено число k са в сила следните неравенства*

$$n - \Delta(G) \leq \mathrm{S}^{(k)}(G) \leq n - \delta(G).$$

Доказателство. Лявото неравенство следва от неравенството $S(G) \geq n - \Delta(G)$ от Твърдение 2.28 (вж. [3]) и Твърдение 4.22. Нека $r = \mathrm{S}^{(k)}(G)$ и $\deg(v_1) \leq \deg(v_2) \leq \cdots \leq \deg(v_n)$ е редица от степените на G. От Твърдение 4.24, имаме, че $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ е δ_k-малко множество. Така

$$\delta(G) = \deg(v_1) \leq \mathrm{d}_k(\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}) \leq n - r = n - \alpha^{(k)}(G)$$

и, следователно, $\alpha^{(k)}(G) \leq n - \delta(G)$. $\square$

Забележка 4.26. Неравенството $\alpha(G) \geq n - \Delta(G)$ не винаги е вярно. Например, $\alpha\left(C_5\right) < 5 - \Delta(C_5) = 3$.

Теорема 4.27. *Нека $A \subseteq \mathrm{V}(G)$ е δ_1-малко множество на G и $s = \mathrm{d}_1(\mathrm{V}(G) \setminus A)$. Тогава*

$$|A| \leq \left\lfloor \frac{n-s}{2} + \sqrt{\frac{(n-s)^2}{4} + ns - 2\mathrm{e}\left(G\right)} \right\rfloor \tag{38}$$

Доказателство.

$$2\mathrm{e}\left(G\right) = \sum_{v \in V(G)} d(v) = \sum_{v \in A} d(v) + \sum_{v \in V(G) \setminus A} d(v) \leq |A| \left(n - |A|\right) + s(n - |A|).$$

Решавайки неравенството за $|A|$, получаваме неравенството (38). $\square$

Следствие 4.28 ([3]). *За всяко естествено число k*

$$\mathrm{S}^{(k)}(G) \leq \left\lfloor \frac{n - \Delta(G)}{2} + \sqrt{\frac{(n - \Delta(G))^2}{4} + n\Delta(G) - 2\mathrm{e}\left(G\right)} \right\rfloor \leq$$

$$\leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + n^2 - n - 2\mathrm{e}\left(G\right)} \right\rfloor. \tag{39}$$

Доказателство. Като вземем предвид Твърдение 4.22, достатъчно е да докажем (39) само в случая $k = 1$. Нека A е максимално δ_1-малко множество, т. е. $|A| = \mathrm{S}^{(1)}(G)$, и $s = \mathrm{d}_1\left(\mathrm{V}(G) \setminus A\right)$. От Теорема 4.27 имаме, че е в сила неравенството (38). Тъй като дясната страна на (38) е растяща функция за s и $s \leq \Delta(G) \leq n-1$, неравенствата (39) следват от (38). □

6. α-малки множества

Определение 4.29 ([3]). Нека G е n-върхов граф и нека $W \subseteq \mathrm{V}(G)$. Ще казваме, че W е α-малко множество, ако

$$\mathrm{CW}(W) = \sum_{v \in W} \frac{1}{n - d(v)} \leq 1.$$

Най-малкото естествено число r, за което $\mathrm{V}(G)$ се разлага на r α-малки множества, ще означаваме с $\varphi^{\alpha}(G)$.

Идеята за α-малки множества произлиза от неравенството на Caro-Wey (Следствие 1.21; вж. [41, 40] и [8])

$$\omega(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n - d(v)}.$$

Твърдение 4.30. *В граф G всяко малко множество е α-малко множество и всяко α-малко множество е δ_1-малко множество.*

Доказателство. Ако A е малко множество на G, то $n - \deg(v) \geq |A|$ за всеки връх $v \in A$ и имаме, че

$$\sum_{v \in A} \frac{1}{n - \deg(v)} \leq \sum_{v \in A} \frac{1}{|A|} = 1.$$

Следователно A е α-малко множество (Твърдение 2.10).

Ако A е α-малко множество на G, то от неравенството на Jensen получаваме

$$1 \geq \sum_{v \in A} \frac{1}{n - \deg(v)} \geq \frac{|A|}{n - \mathrm{d}_1(A)}$$

и, следователно, $\mathrm{d}_1(A) \leq n - |A|$. Така A е δ_1-малко множество. □

Имаме следното твърдение

Теорема 4.31 ([3]). *Нека G е граф с n върха. Тогава*

а) $\omega(G) \geq \varphi(G) \geq \varphi^{\alpha}(G) \geq \varphi^{(1)}(G) \geq \left\lceil \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_1(G)} \right\rceil$;

б) $\omega(G) \geq \varphi(G) \geq \varphi^{\alpha}(G) \geq CW(G) \geq \left\lceil \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_1(G)} \right\rceil$.

Доказателство. Тъй като всяко малко множество е α-малко множество и всяко α-малко множество е δ_1-малко множество и поради Теорема 2.8, получаваме веригата от неравенства

$$\omega(G) \geq \varphi(G) \geq \varphi^{\alpha}(G) \geq \varphi^{(1)}(G).$$

Сега ще докажем останалите неравенства.

а) Неравенството $\varphi^{(1)}(G) \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_1(G)}$ следва от Твърдение 4.5.

б) Нека $\mathrm{V}(G) = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_t$ е разбиване на $\mathrm{V}(G)$ на $t = \varphi^{\alpha}(G)$ α-малки множества. Тогава, неравенството на Jensen и определението за α-малки множества ни дава

$$\frac{n}{n - \mathrm{d}_1(G)} \leq \mathrm{CW}(G) = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n - \deg(v)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \sum_{v \in A_i} \frac{1}{n - \deg(v)} \leq t = \varphi^{\alpha}(G). \quad \square$$

Пример 4.32. Нека G получен от две копия на K_n чрез съединяване на един от върховете на едното копие с всички върхове на другото копие. Тогава $\varphi(G) = 3$, $\mathrm{CW}(G) = 3 - \dfrac{2}{n+1}$ и $\varphi^{(1)}(G) = 2$. В този случай $\varphi^{(1)}(G) \leq \mathrm{CW}(G)$.

Веригите от неравенства в Теорема 4.31 а) и б), заедно с $2\mathrm{e}(G) = n\,\mathrm{d}_1(G)$ ни дават следното следствие:

Следствие 4.33. *Нека G е граф с n върха. Тогава*

а)

$$\mathrm{e}\,(G) \leq \frac{(\varphi^{(1)}(G)-1)n^2}{2\varphi^{(1)}(G)} \leq \frac{(\varphi^{\alpha}(G)-1)n^2}{2\varphi^{\alpha}(G)} \leq \leq \frac{(\varphi(G)-1)n^2}{2\varphi(G)} \leq \frac{(\omega\,(G)-1)n^2}{2\omega\,(G)};$$

б)

$$\mathrm{e}\,(G) \leq \frac{(\mathrm{CW}(G)-1)n^2}{2\,\mathrm{CW}(G)} \leq \frac{(\varphi^{\alpha}(G)-1)n^2}{2\varphi^{\alpha}(G)} \leq \leq \frac{(\varphi(G)-1)n^2}{2\varphi(G)} \leq \frac{(\omega\,(G)-1)n^2}{2\omega\,(G)}.$$

Както отбелязахме след Следствие 2.14, горните граници за $\mathrm{e}\,(G)$ са по-добри от границата $\mathrm{e}\,(G) \leq \dfrac{n^2(\omega\,(G)-1)}{2\omega\,(G)}$, която се получава от класическата теорема на Turán, защото

$$\omega\,(G) \geq \varphi(G) \geq \varphi^{\alpha}(G) \geq \mathrm{CW}(G) \quad \text{и} \quad \varphi^{\alpha}(G) \geq \varphi^{(1)}(G).$$

Глава 5

k-малки и k-големи множества

1. Определение и основни свойства

Определение 5.1. Нека m и n са естествени числа. Нека

$$S = \{0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m \leq n-1\}$$

е редица от m цели числа и

$$\overline{S} = \{0 \leq b_m \leq b_{m-1} \leq \ldots \leq b_1 \leq n-1\}$$

е *допълващата редица*, където $b_i = n - a_i - 1$ за $1 \leq i \leq m$. Нека $k \geq 0$ е цяло.

Една подредица A на S се нарича *k-малка* ако за всеки член x на A, $x \leq n - |A| + k$. Една подредица B на S се нарича *k-голяма* ако за всеки член x на B, $x \geq |B| - k - 1$.

Определение 5.2. Нека G е граф с n върха. Едно множество от върхове $A \subseteq \mathrm{V}(G)$ ще наричаме *k-малко* ако за всеки връх $v \in A$, $\deg(v) \leq n - |A| + k$. Едно подмножество $B \subseteq \mathrm{V}(G)$ ще наричаме *k-голямо* ако за всеки връх $v \in B$, $\deg(v) \geq |B| - k - 1$.

Когато $k = 0$, ще казваме, че A е *малко* множество (Определение 2.1; δ-множество в [36, 4]) и B е *голямо* множество. С $\mathrm{S}_k(G)$ ще означаваме максималния брой елементи в k-малко множество и $\mathrm{L}_k(G)$ ще означава максималния брой елементи в k-голямо множество в G. За граф G ще използваме $\varphi_k(G)$ за минималното цяло t, за което съществува разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на t k-малки множества, а $\Omega_k(G)$ за минималното цяло t, за което има разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на t k-големи множества. Когато $k = 0$, ще използваме $\varphi(G)$ вместо $\varphi_0(G)$ и $\Omega(G)$ вместо $\Omega_0(G)$.

Забележка 5.3. От определението е ясно, че всяко k-малко (k-голямо) множество е и $(k+t)$-малко ($(k+t)$-голямо) множество за всяко естествено число t. В частност, всяко малко (голямо) множество е и k-малко (k-голямо) множество

Определение 5.4. Една крайна редица от числа ще наричаме *графична*, ако съществува граф, чиято редица от степени е тази редица.

В сила е следната теорема , която дава необходимо и достатъчно условие една редица да бъде графична.

Теорема 5.5 (Erdős–Gallai, [14]). *Нека* $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$, $n \geq 2$, *е редица от цели неотрицателни числа. Тогава тази редица е графична тогава и само тогава когато са изпълнени следните две условия:*

1) $\sum_{i=1}^{n} a_i$ *е четно число;*

2)

$$\sum_{i=1}^{j} a_i - j(j-1) \leq \sum_{k=j+1}^{n} \min\{j, a_k\} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-1)$$

Твърдение 5.6. *Нека* n *и* m *са две естествени числа. Нека*

$$S = \{0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m \leq n-1\}$$

редица и G *граф.*

а) A *е* k*-малка подредица на* S *тогава и само тогава, когато* $\overline{A}$ *е* k*-голяма подредица на* $\overline{S}$*;*

б) A *е* k*-малко множество в* G *тогава и само тогава, когато* A *е* k*-голямо множество в* $\overline{G}$*;*

в) $S_k(G) = \mathrm{L}_k(\overline{G})$ *и* $\mathrm{L}_k(G) = \mathrm{S}_k(\overline{G})$*;*

г) $\varphi_k(G) = \Omega_k(\overline{G})$ *и* $\Omega_k(G) = \varphi_k(\overline{G})$.

Доказателство. а) A е малка подредица на S тогава и само тогава, когато $a_i \leq n - |A| + k$ за всяко $a_i \in A$, което е еквивалентно на $b_i \geq |A| - k - 1$ за всяко $b_i = n - a_i - 1 \in \overline{A}$, което означава, че $\overline{A}$ е k-голяма подредица на $\overline{S}$.

б) A е k-малко множество на G тогава и само тогава, когато $\deg_G(v) \leq n - |A| + k$ за всеки $v \in A$, което е еквивалентно на $\deg_{\overline{G}}(v) = n - 1 - \deg_G(v) \geq |A| - k - 1$ за всеки $v \in A$, което означава, че A е k-голямо множество в $\overline{G}$.

в) и г) следват директно от б). □

Определение 5.7. *k-независимо множество* A в G е подмножество от върхове на G, такова че $|\mathrm{N}(v) \cap A| \leq k$ за всяко $v \in A$.

Максималният брой елементи в k-независимо множество се означава с $\alpha_k(G)$. Едно 0-независимо множество е точно независимо множество и ще използваме обичайното означение $\alpha(G)$ за числото на независимост вместо $\alpha_0(G)$.

Свойствата на числото на k-независимост са изложени в обзора [10].

С числото на независимост е свързана и границата от неравенството на Caro-Wei (Твърдение 1.20)

$$\alpha(G) \geq \sum_{v \in \mathrm{V}(G)} \frac{1}{\deg(v) + 1}.$$

Аналогично, ще наричаме едно подмножество $B \subseteq \mathrm{V}(G)$, такова че $|\mathrm{N}(v) \cap B| \geq |B| - k - 1$ за всеки $v \in B$ *k-кликоподобно* и броят на елементите в максимално k-кликоподобно ще означаваме с $\omega_k(G)$. Едно 0-кликоподобно множество е клика и ще използваме обичайното означение $\omega\,(G)$ за кликовото число, вместо $\omega_0(G)$.

Връзката между k-независимите множества и k-кликоподобните множества с k-малките и k-големите множества се дава със следващото твърдение.

Твърдение 5.8. *В граф G, всяко k-независимо множество е k-малко множество и всяко k-кликоподобно множество е k-голямо множество;*

Доказателство. Нека A е k-независимо множество и B е k-кликоподобно множество на G. Тогава $\deg(v) \leq n - |A| + k$ за всяко $v \in A$ и $\deg(v) \geq |B| - k - 1$ за всяко $v \in B$. Тогава, A е k-малко множество и B е k-голямо множество. □

2. Граници за $\mathrm{S}_\mathbf{k}(\mathbf{G})$ и $\mathrm{L}_\mathbf{k}(\mathbf{G})$ с приложения за горни граници за $\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{k}(\mathbf{G})$ и $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{k}(\mathbf{G})$

Тъй като едно k-независимо множество на G е k-малко множество и едно k-кликоподобно множество на G е k-голямо множество, можем да очакваме, че границите за $\mathrm{S}_k(G)$, $\mathrm{L}_k(G)$, $\varphi(G)$ и $\Omega(G)$ могат да бъдат получени като се използват само техните аритметични дефиниции и такива свойства ще бъдат полезни за получаването на граници за много по-трудните за намиране $\alpha_k(G)$ и $\omega_k(G)$. Ще получим лесно няколко усилвания на неравенството на Caro-Wei [**8**, **41**], Теоремата на Turán [**39**] и Теоремата на Hansen-Zheng [**21**] от като използваме оценките за k-малки множества и k-големи множества така, както и някои връзки между $\mathrm{L}_0(G)$ и $\chi(G)$. Намирането на долна граница за $\alpha(G)$ и $\omega(G)$ чрез $\Omega(G)$ и $\varphi(G)$, съответно, показват полезността на използването на малки и големи множества. Тези граници са получени като използваме основно идеята за известния greedy MIN-type-algorithm за намиране на независимо множество.

Теорема 5.9. *Нека G е граф. Тогава*

$$\alpha(G) \geq \Omega(G) \quad \text{и} \quad \omega(G) \geq \varphi(G).$$

Доказателство. Нека $G_1 = G$ и нека x_1 е връх от минимална степен в G_1. Нека сега x_i за $i \geq 1$ е връх от минимална степен в

G_i и да дефинираме последователно $G_{i+1} = G_i - \mathrm{N}_{G_i}[x_i]$ и $V_i = \mathrm{N}_{G_i}[x_i]$, докато има останали върхове, до индекс q, например. Така получаваме разлагане $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_q$ на $\mathrm{V}(G)$ на големи множества, като за всяко $v \in V_i$,

$$\deg(v) \geq \deg_{G_i}(v) \geq \deg_{G_i}(x_i) = |V_i| - 1.$$

Следователно $q \geq \Omega(G)$. От друга страна, $\{x_1, x_2, \ldots, x_q\}$ е независимо множество по конструкция и тогава $\alpha(G) \geq q$. Следователно, $\alpha(G) \geq \Omega(G)$ и също $\alpha(G) = \alpha(\overline{G}) \geq \Omega(\overline{G}) = \varphi(G)$. $\square$

Така получихме друго доказателство на $\omega(G) \geq \varphi(G)$ (Твърдение 2.8; също и в [36]).

Една от най-точните оценки за числото на независимост на граф е така наречената *остатъчна редица от степени*, която се означава с $R(G)$ ([**17**, **38**, **27**]). Това е броят на оставащите нули, след приключване на алгоритъма на Havel-Hakimi. През 1955 г. Havel (([26]) и, по-късно, през 1962 г. Hakimi ([20]) доказват, че редицата

$$a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n$$

е графична тогава и само тогава, когато множеството

$$\{a_2 - 1, a_3 - 1, \ldots, a_{a_1+1} - 1, a_{a_1+2}, a_{a_1+3}, \ldots, a_n\}$$

след, евентуално, пренареждане е графична редица. Това твърдение ни дава алгоритъм за намиране на граф, на който редицата от степени е отнапред зададена редица, която удовлетворява условието на теоремата на Erdős-Gallai (Теорема 5.5).

Както ще видим по-късно, изчисляването на $\Omega(G)$ е със сложност $O(|\mathrm{V}(G)|)$, докато алгоритъмът на Havel-Hakimi с $O(|E(G)|)$. Въпреки, че $R(G)$ дава по-добра оценка от всички долни граници представени в изследването [44], нека разгледаме следните два примера. В единия $R(G)$ е по-точна, а в другия $\Omega(G)$.

Пример 5.10. Нека $G = K_{1,n}$ е граф-звезда, т. е. се състои от клика и връх, който е свързан с всички върхове на кликата. Тогава $R(G) = n - 1$, докато $\Omega(G) \sim \frac{n}{2}$.

Пример 5.11. Да разгледаме графа G с 6 върха и редица от степени $1, 2, 2, 3, 3, 3$. Такъв граф съществува (Теорема 5.5) и за него $\Omega(G) = 3$, докато $R(G) = 2$.

За разлика от Теорема 5.9, която дава долни граници за $\alpha(G)$ и $\omega(G)$ изразени чрез $\Omega(G)$ и $\varphi(G)$, следващата теорема дава горни граници за $\alpha_k(G)$ и $\omega_k(G)$ изразени чрез $\mathrm{S}_k(G)$ и $\mathrm{L}_k(G)$.

Теорема 5.12. *Нека G е граф със n върха и $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ е неговата редица от степени. Тогава*

а) $\mathrm{S}_k(G) \geq \alpha_k(G)$ *и* $\mathrm{L}_k(G) \geq \omega_k(G)$*;*

б) $\mathrm{S}_k(G) \geq \dfrac{n}{\varphi_k(G)}$ *и* $\mathrm{L}_k(G) \geq \dfrac{n}{\Omega_k(G)}$*;*

в) $\mathrm{S}_k(G) = \max\{s \mid d_s \leq n - s + k\}$ *и* $\{v_1, v_2, \ldots, v_{\mathrm{S}_k(G)}\}$ *е най-голямо k-малко множество на G;*

г) $\mathrm{L}_k(G) = \max\{t \mid t-k-1 \leq d_{n-t+1}\}$ *и* $\{v_{n-L_k+1}, v_{n-L_k+2}, \ldots, v_n\}$ *е най-голямо k-голямо множество на G.*

Доказателство. а) Тъй като едно k-независимо множество е и k-малко множество и едно k-кликоподобно множество е и k-голямо множество, то $\mathrm{S}_k(G) \geq \alpha_k(G)$ и $\mathrm{L}_k(G) \geq \omega_k(G)$.

б) Нека $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_t$ е разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на $t = \varphi_k(G)$ k-малки множества. Тогава

$$\mathrm{S}_k(G) \geq \max_{1 \leq i \leq t} |V_i| \geq \frac{n}{t} = \frac{n}{\varphi_k(G)}.$$

Другото неравенство следва от

$$\mathrm{L}_k(G) = \mathrm{S}_k(\overline{G}) \geq \frac{n}{\varphi_k(\overline{G})} = \frac{n}{\Omega_k(G)}.$$

в) Нека $v_1, v_2, \ldots, v_n$ са върховете на G, подредени съгласно неговата редица от степени и нека A е произволно k-малко множество.

Ясно е, че за всеки връх е в сила $v \in A$, $\deg(v) \le n - |A| + k$. Сега да наредим степените на върховете от A в нарастващ ред, така че да е изпълнено

$$\deg(u_1) \le \deg(u_2) \le \ldots \le \deg(u_{|A|}) \le n - |A| + k.$$

Тогава $\deg_{|A|} \le \deg(u_{|A|}) \le n - |A| + k$. Следователно, за всяко k-малко множество A, $\deg_{|A|} \le \deg(u_{|A|}) \le n - |A| + k$. Нека s е най-големият индекс в редицата от степени на G такъв, че $\deg_s \le n - s + k$. Тогава $s \ge \mathrm{S}_k(G)$, тъй като това неравенство е в сила за всяко k-малко множество. Но тогава $\{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ е k-малко множество по дефиниция. Следователно $\mathrm{S}_k(G) \ge s$, откъдето получаваме $s = \mathrm{S}_k(G)$.

г) Нека $\overline{d}_1 \le \overline{d}_2 \le \ldots \le \overline{d}_n$ е редицата от степени на $\overline{G}$ зададена с $\overline{d}_i = n - 1 - d_{n-i+1}$ за $1 \le i \le n$. Тогава, съгласно в) и Твърдение 5.6 в) получаваме

$$\mathrm{L}_k(G) = \mathrm{S}_k(\overline{G}) = \max\{t \mid \overline{d}_t \le n - t + k\} =$$
$$= \max\{t \mid t - k - 1 \le d_{n-t+1}\} \quad \square$$

От предишната теорема забелязваме, че ако $k \ge \Delta$, то $\mathrm{S}_k(G) = n$ и $\varphi_k(G) = 1$. Също така, ако $k \ge n - \delta - 1$, то $\mathrm{L}_k(G) = n$ и $\Omega_k(G) = 1$. Вземайки това предвид, условията $k \le \Delta$ или $k \ge n - \delta - 1$, необходими в някои от следващите теореми, са напълно естествени.

От Теорема 5.12, директно следва следното Твърдение.

Твърдение 5.13. *Нека G е граф с минимална степен δ и максимална степен Δ. Тогава*

а) *$n - \Delta + k \le \mathrm{S}_k(G) \le n - \delta + k$ за $k \le \Delta$;*

б) *$\delta + k + 1 \le \mathrm{L}_k(G) \le \Delta + k + 1$ за $k \le n - \delta - 1$;*

в) *Ако G е r-регулярен, то $\mathrm{S}_k(G) = n - r + k$ при $k \le r$ и $\mathrm{L}_k(G) = r + k + 1$ при $k \le n - r - 1$.*

Доказателство. а) Нека $\delta = d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n = \Delta$ е редицата от степени на G за $k \leq \Delta$,

$$d_{n-\Delta+k} \leq n - (n - \Delta + k) + k = \Delta.$$

Откъдето, $n - \Delta + k \in \{s \mid d_s \leq n - s + k\}$ и следователно

$$n - \Delta + k \leq \mathrm{S}_k(G).$$

Още повече, според Теорема 5.12 в), от $\mathrm{S}_k \in \{s \mid d_s \leq n - s + k\}$ следва, че $\delta \leq d_{\mathrm{S}_k(G)} \leq n - \mathrm{S}_k(G) + k$, т. е. $\mathrm{S}_k(G) \leq n - \delta + k$.

б) Следва от а) приложено към графа $\overline{G}$.

в) Директно следва от а) и б). □

Сега ще намерим връзка между $\mathrm{L}_0(G)$ и хроматичното число $\chi(G)$ засилваща $\mathrm{L}_0(G) \geq \omega(G)$. Получава се и аналогичен резултат за $\mathrm{S}_0(G)$ и числото на кликово разбиване $\theta(G)$, получен по различен начин в Твърдение 2.26.

Твърдение 5.14. *Нека G е граф. Тогава*

а) $\mathrm{L}_0(G) \geq \chi(G) \geq \omega(G)$;

б) $\mathrm{S}_0(G) \geq \theta(G) \geq \alpha(G)$.

Доказателство. а) Резултат на Powell и Welsh в [42] (вж. също [24, стр. 148]) ни дава, че

$$\chi(G) \leq \max\{\min\{i, d_i + 1\} \mid 1 \leq i \leq n\},$$

където $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$ е редица от степени на G. Като обърнем посоката на неравенствата за степените, получаваме, че за $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ имаме

$$\chi(G) \leq \max\{t : t \leq d_{n-t+1} + 1\} = \mathrm{L}_0(G).$$

Последното равенство следва от Теорема 5.12.

б) Следва от а) и $\mathrm{S}_0(G) = \mathrm{L}_0(\overline{G})$, $\theta(G) = \chi(\overline{G})$ и $\alpha(G) = \omega(\overline{G})$. □

Сега ще докажем няколко твърдения за разлаганията на множеството от върхове на k-малки и k-големи множества.

Твърдение 5.15. *Нека G е граф. Тогава $\mathrm{V}(G)$ може да се разложи на k-малко множество V_S и на k-голямо множество V_L.*

Доказателство. Нека $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$ е редица от степени на G и нека $j = \mathrm{S}_k(G)$ е най-големият индекс, такъв че $d_j \le n-j+k$. Нека $v_1, v_2, \ldots, v_n$ са върховете на G подредени, както редицата от степени. Да положим $V_S = \{v_1, \ldots, v_j\}$ и $V_L = V \setminus V_S$. Ясно е, че $|V_S| = j$ и $|V_L| = n - j$. Съгласно Теорема 5.12 в), V_S е максимално k-малко множество. Тъй като j е най-големият индекс, за който $d_j \le n - j + k$, то $d_{j+1} > n - (j + 1) + k$ и $d_{j+1} \ge n - j + k$. Но тогава, за $i \ge j + 1$, $d_i \ge d_{j+1} \ge n - j + k = |V_L| + k > |V_L| - k - 1$ и, следователно V_L е k-голямо множество. □

Забележка 5.16. За да докажем горното твърдение беше достатъчно да го докажем за $k = 0$, т. е. че можем да разбием множеството от върховете на графа на малко и голямо множество, тъй като малко множество е и k-малко и всяко голямо множество е и k-голямо за $k > 0$ (Забележка 5.3).

Забележка 5.17. От Твърдение 5.15 лесно следва, че за всеки граф с n върха съществува или k-малко множество с поне $n/2$ върха или k-голямо множество с поне $n/2$ върха.

Твърдение 5.18. *В сила са неравенствата $n \le \mathrm{L}_k(G)+\mathrm{S}_k(G) \le n + 1 + 2k$, като и в двете е възможно равенство.*

Доказателство. От Твърдение 5.15 директно следва долната граница $n \le \mathrm{S}_k(G) + \mathrm{L}_k(G)$.

Нека сега A е k-малко множество, за което $\mathrm{S}_k(G) = |A|$ и B е k-голяма множество, за което $\mathrm{L}_k(G) = |B|$. Ако $A \cap B = \emptyset$, то $|A| + |B| \leq n$. В противен случай, да допуснем, че вземем връх $u \in A \cap B$. Тогава $\deg(u) \leq n - |A| + k$ и $\deg(u) \geq |B| - k - 1$. Следователно $|B| - k - 1 \leq n - |A| + k$ и $|A| + |B| \leq n + 1 + 2k$.

За да видим точността на долната граница, да вземем графа G_1 с $n_1 = 2q > 2(2k + 2)$ върха, чието множество от върхове може да се разложи на независимо множество V_S и клика V_L, така че $|V_S| = |V_L| = q$, така че техните върхове са свързани с $k + 1$ независими ребра. Тогава, всички върхове на V_S имат степен $k + 1$ и всички върхове в V_L имат степен $q + k$. Тогава за редицата от степени $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_{2q}$ на G_1 имаме

$$d_q = k + 1 \leq n_1 - q + k = q + k$$

и

$$q + k = d_{q+1} > n_1 - (q + 1) + k = q + k - 1,$$

откъдето следва, че V_S е максимално k-малко множество (Теорема 5.12). А от

$$d_{q+1} \geq n_1 - q - k - 1 = q - k - 1$$

и

$$d_q = k + 1 < n_1 - q - k - 1 = q - k - 1$$

за $q > 2k+2$ следва, че V_L е максимално k-голямо множество за G_1. Следователно, за този граф $n_1 = \mathrm{S}_k + \mathrm{L}_k$ и неравенството е точно.

За точността на горната граница, да разгледаме графа G_2, за който най-големите $2k + 1$ степени в редицата от степените му са равни на k. Лесно се проверява, че G_2 прави неравенството точно.

$\square$

Твърдение 5.19. *Нека G е граф с n върха и $\mathrm{e}(G)$ ребра. Тогава съществува разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на k-малко множество V_S и k-голямо множество V_L, такива,че*

$$|V_L| \leq \frac{1}{2}(k+1+\sqrt{(k+1)^2+8\mathrm{e}(G)})$$

и

$$|V_S| \geq n - \frac{1}{2}(k+1+\sqrt{(k+1)^2+8\mathrm{e}(G)}).$$

Доказателство. Нека $\mathrm{V}(G) = V_S \cup V_L$ е разлагане на k-малко и на k-голямо множество, каквото съществува според Твърдение 5.15 и нека $p = |V_L|$. Тогава

$$2\mathrm{e}(G) \geq \sum_{v \in V_L} \deg(v) \geq p(p-k-1).$$

Като решим последното квадратно неравенство, получаваме

$$|V_L| = p \leq \frac{1}{2}(k+1+\sqrt{(k+1)^2+8\mathrm{e}(G)}).$$

Другото неравенство следва от $|V_S| + |V_L| = |\mathrm{V}(G)| = n$ □

3. Граници за $\varphi_\mathbf{k}(\mathbf{G})$ и $\Omega_\mathbf{k}(\mathbf{G})$

Теорема 5.20. *Нека G е граф с n върха и средна степен d_1. Тогава*

а) $\varphi_k(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n-\deg(v)+k} \geq \frac{n}{n-\mathrm{d}_1+k}$;

б) $\Omega_k(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg(v)+k+1} \geq \frac{n}{\mathrm{d}_1+k+1}$.

Доказателство. а) Нека $V_1, V_2, \ldots, V_t$ е разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на $t = \varphi_k(G)$ k-малки множества и $|V_i| = n_i$ за $1 \leq i \leq t$. Тогава, от $\deg(v) \leq n - n_i + k$ за всяко $v \in V_i$, имаме

$$\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n-\deg(v)+k} = \sum_{i=1}^{t}\sum_{v \in V_i} \frac{1}{n-\deg(v)+k} \leq \sum_{i=1}^{t}\sum_{v \in V_i} \frac{1}{n_i} = t = \varphi_k(G).$$

Сега, от неравенството на Jensen получаваме

$$\varphi_k(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n - \deg(v) + k} \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_1 + k}.$$

б) Тъй като $\Omega_k(G) = \varphi_k(\overline{G})$, от а) получаваме

$$\Omega_k(G) = \varphi_k(\overline{G}) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n - \deg_{\overline{G}}(v) + k} \geq \frac{1}{n - \mathrm{d}_1(\overline{G}) + k},$$

което е еквивалентно на

$$\Omega_k(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg(v) + k + 1} \geq \frac{n}{\mathrm{d}_1 + k + 1}. \qquad \square$$

Теореми 5.9 и 5.20 за $k = 0$ ни дават следното следствие.

Следствие 5.21. *Нека G е граф с n върха и средна степен d_1. Тогава*

а) $\omega(G) \geq \varphi(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n - \deg(v)} \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_1}$;

б) $\alpha(G) \geq \Omega(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg(v) + 1} \geq \frac{n}{\mathrm{d}_1 + 1}$.

Първото експлицитно доказателство на $\alpha(G) \geq \frac{n}{\mathrm{d}_1 + 1}$ може да бъде намерено в [15]. Няколко други доказателства има в [2]. Също така б) подточка на предишното следствие подобрява неравенството на Caro-Wei $\alpha(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg(v) + 1}$ от [8, 41]. Освен това, неравенството $\varphi(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n - \deg(v)}$ е доказано в [36] (вж. също Твърдение 2.11).

Следствие 5.22. *Нека G е граф с n върха и $\mathrm{e}(G)$ ребра. Тогава*

а) $\mathrm{e}(G) \leq \frac{1}{2}\left(n^2 - \frac{n^2}{\varphi_k(G)} + nk\right)$;

б) $\mathrm{e}(G) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{\Omega_k(G)} - n(k+1)\right)$.

Доказателство. а) От Теорема 5.20 а) и $n\mathrm{d}_1 = 2\mathrm{e}(G)$, следва, че

$$\varphi_k(G) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_1 + k} = \frac{n^2}{n^2 - 2\mathrm{e}(G) + kn}.$$

Решавайки неравенството за $\mathrm{e}\,(G)$, получаваме желаното неравенство.

б) Подобно на а), от Теорема 5.20 б) и $n\mathrm{d}_1 = 2\mathrm{e}\,(G)$, следва, че $\Omega_k(G) \geq \dfrac{n^2}{2\mathrm{e}\,(G) + k(n+1)}$. Решавайки последното неравенство относно $\mathrm{e}\,(G)$, получаваме и б). □

В частния случай $k = 0$, от Следствие 5.22 получаваме $\mathrm{e}\,(G) \leq \dfrac{n^2(\varphi(G) - 1)}{2\varphi(G)}$ (вж. 2.14).

Теорема 5.23. *Нека G е граф с n върха минимална степен δ, максимална степен Δ и средна степен d_1. Тогава*

а) $\left\lceil \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_1 + k} \right\rceil \leq \varphi_k(G) \leq \left\lceil \dfrac{n}{n + k - \Delta} \right\rceil$;

б) $\left\lceil \dfrac{n}{\mathrm{d}_1 + k + 1} \right\rceil \leq \Omega_k(G) \leq \left\lceil \dfrac{n}{\delta + k + 1} \right\rceil$;

в) *Ако* $\dfrac{r-2}{r-1}n + k < \mathrm{d}_1 \leq \Delta \leq \dfrac{r-1}{r}n + k$ *за някое цяло число $r > 1$, то $\varphi_k(G) = r$. В частност за $r = 2$ имаме, че ако $1 \leq \delta \leq \Delta \leq n/2$, то $\varphi(G) = 2$);*

г) *Ако* $\dfrac{n}{r} - k - 1 \leq \delta \leq \mathrm{d}_1 < \dfrac{n}{r-1} - k - 1$ *за някое цяло число $r > 1$, то $\Omega_k(G) = r$;*

д) *Ако G е r-регулярен, то* $\varphi_k(G) = \left\lceil \dfrac{n}{n + k - r} \right\rceil$ *и* $\Omega_k(G) = \left\lceil \dfrac{n}{r + k + 1} \right\rceil$.

Доказателство. а) От Теорема 5.20 а), следва директно, че

$$\varphi_k(G) \geq \left\lceil \frac{n}{n - \mathrm{d}_1 + k} \right\rceil.$$

Ако $k > \Delta$, то $\varphi_k(G) = 1$ и дясното неравенство е очевидно. Нека $k \leq \Delta$ и $A \subseteq \mathrm{V}(G)$ е множество с $n - \Delta + k$ елемента. Тогава, за всяко $v \in A$,

$$\deg(v) \leq \Delta = n - (n - \Delta + k) + k = n - |A| + k$$

и, следователно, A е k-малко множество. Сега ще вземем разлагане $V_1, V_2, \ldots, V_t$ на $\mathrm{V}(G) \setminus A$ на $t = \left\lceil \dfrac{\Delta - k}{n - \Delta + k} \right\rceil$ (да отбележим, че

$|\mathrm{V}(G) \setminus A| = \Delta - k$) k-малки множества, такива че $|V_i| = n - \Delta + k$ за $i = 1, 2, \ldots, t-1$ и $|V_t| \leq n - \Delta + k$. Тъй като за всеки връх $v \in V_i$,

$$\deg(v) \leq \Delta = n - (n - \Delta + k) + k \leq n - |V_i| + k,$$

то V_i е k-малко множество за $1 \leq i \leq t$. Следователно $A \cup V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_t$ е разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на

$$1 + t = 1 + \left\lceil \frac{\Delta - k}{n - \Delta + k} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{n - \Delta + k} \right\rceil$$

k-малки множества и тогава

$$\varphi_k(G) \leq \left\lceil \frac{n}{n - \Delta + k} \right\rceil.$$

б) Теорема 5.20 б) ни дава

$$\Omega_k(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\mathrm{d}_1 + k + 1} \right\rceil.$$

Другото неравенство се получава от а) чрез

$$\Omega_k(G) = \varphi_k(\overline{G}) \leq \left\lceil \frac{n}{n + k - \Delta(\overline{G})} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{\delta + k + 1} \right\rceil.$$

в) Ако $\dfrac{r-2}{r-1}n + k < \mathrm{d}_1 \leq \Delta \leq \dfrac{r-1}{r}n + k$, то от а) получаваме

$$r - 1 = \left\lceil \frac{n}{n - \frac{r-2}{r-1}n} \right\rceil < \left\lceil \frac{n}{n + k - \mathrm{d}_1} \right\rceil \leq \varphi_k(G) \leq$$
$$\leq \left\lceil \frac{n}{n + k - \Delta} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{n}{n - \frac{r-1}{r}n} \right\rceil = r$$

и тогава $\varphi_k(G) = r$.

г) Ако $\dfrac{n}{r} - k - 1 \leq \delta \leq \mathrm{d}_1 < \dfrac{n}{r-1} - k - 1$, от б) получаваме

$$r - 1 = \left\lceil \frac{n}{\frac{n}{r-1}} \right\rceil < \left\lceil \frac{n}{\mathrm{d}_1 + k + 1} \right\rceil \leq \Omega_k(G) \leq \left\lceil \frac{n}{\delta + k + 1} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{n}{\frac{n}{r}} \right\rceil = r$$

и тогава $\Omega_k(G) = r$.

д) От а) имаме $\left\lceil \dfrac{n}{n+k-\mathrm{d}_1} \right\rceil \le \varphi_k(G) \le \left\lceil \dfrac{n}{n+k-\Delta} \right\rceil$ и тогава, ако $\mathrm{d}_1 = \Delta = r$, то $\varphi_k(G) = \left\lceil \dfrac{n}{n+k-r} \right\rceil$. Аналогично, б) влече $\Omega_k(G) = \left\lceil \dfrac{n}{r+k+1} \right\rceil$. □

Глава 6

Алгоритми за намирането на $\boldsymbol{\varphi_k}(\mathbf{G})$ и $\boldsymbol{\Omega_k}(\mathbf{G})$

Тук ще представим два алгоритъма за намиране на $\varphi_k(G)$ и $\Omega_k(G)$ за G. За целта ще разгледаме някаква редица от m цели числа

$$A = \{0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_m \leq n-1\}$$

(не е задължително да е графична). Искаме да я разложим на k-малки подредици. Ще приложим следния greedy MIN-type алгоритъм.

Алгоритъм 1

ВХОД: A

Стъпка 1: Нека $i := 0$, $R_0 := A$.

Стъпка 2: Повтаряме

(1) $n_i := |R_i|$

(2) $p_i := \min\{n_i, n - a_{n_i} + k\}$

(3) $A_{i+1} := \{a_{n_i - p_i + 1}, a_{n_i - p_i + 2}, \ldots, a_{n_i}\}$

(4) $R_{i+1} := R_i \setminus A_{i+1}$

(5) $i := i + 1$

докато $R_i = \emptyset$.

ИЗХОД: $s := i$, $A_1, A_2, \ldots, A_s$.

Тук i е номерът на итерацията; R_i е множеството от оставащите елементи и n_i броят на елементите му; A_{i+1} е подредицата, която се конструира на i-тата стъпка. На изхода, s е броят на конструираните подредици A_i.

Теорема 6.1. *Нека $A = \{0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_m \leq n-1\}$ е редица от m цели числа. Тогава Алгоритъм 1 с вход A дава едно минимално разлагане на A на s k-малки подредици $A_1, A_2, \ldots, A_s$.*

Доказателство. Ясно е, че A_i е подредица на A за $i = 1, 2, \ldots, s$. От конструкцията, на всяка стъпка i, $A_{i+1} \subseteq R_i = R_{i-1} \setminus A_i$ и така A_i-тата са непресичащи се. Освен това, последната стъпка s се достига, когато $R_s = \emptyset$, т. е., $A_s = R_{s-1}$ означава, че A_s се състои от всички останали елементи на A. Следователно, $A_1, A_2, \ldots, A_s$ е разлагане на A на подредици.

Сега ще докажем, че на всяка стъпка $i \geq 0$, получената подредица A_{i+1} е k-малка. Имаме следните две възможни ситуации:

1. *$p_i = n_i \leq n - a_{n_i} + k$:* Тогава $A_{i+1} = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n_i}\} = R_i$ и за всяко $a \in A_{i+1}$, имаме

$$a \leq a_{n_i} = n - (n - a_{n_i} + k) + k \leq n - n_i + k = n - |A_{i+1}| + k.$$

Тогава, A_{i+1} е k-малка подредица.

2. *$p_i = n - a_{n_i} + k \leq n_i$:* Тогава

$$A_{i+1} := \{a_{n_i-(n-a_{n_i}+k)+1}, a_{n_i-(n-a_{n_i}+k)+2}, \ldots, a_{n_i}\}$$

и за всяко $a \in A_{i+1}$, имаме

$$a \leq a_{n_i} = n - (n - a_{n_i} + k) + k = n - |A_{i+1}| + k.$$

Тогава A_{i+1} отново е k-малка подредица на A.

Накрая, ще докажем, че изходът s, който ни дава Алгоритъм 1 е минималният брой k-малки подредици, на които A може да бъде разложено. Нека $A'_1, A'_2, \ldots, A'_q$ оптимално разлагане на A на k-малки множества, т. е. такива че q е минимално. Тогава, очевидно, $q \leq s$. Нека $C_i = \max\{a \mid a \in A'_i\}$ и без ограничение на общността да предположим, че $C_1 \geq C_2 \geq \ldots \geq C_q$.

Ще докажем по индукция по i, че $a_{n_i} \leq C_i$. От $a_{n_1} = a_m = C_1$, базата на индукцията е доказана.

Да допуснем, че $a_{n_i} \leq C_i$ за $i = 1, 2, \ldots, r$ и $r < q$. Понеже A'_i е k-малко множество, имаме, че от

$$n - |A_i| + k = a_{n_i} \leq C_i \leq n - |A'_i| + k,$$

следва $|A'_i| \leq |A_i|$, for $i = 1, 2, \ldots, r$. Да допуснем, че $a_{n_{r+1}} > C_{r+1}$. Тогава $a_{n_{r+1}} \in \bigcup_{i=1}^{r} A'_i$. Така $\sum_{i=1}^{r} |A'_i| \leq \sum_{i=1}^{r} |A_i|$ и от $a_{n_{r+1}} \notin \bigcup_{i=1}^{r} A_i$ по конструкция, то трябва да има елемент y, който се съдържа в $\bigcup_{i=1}^{r} A_i$, но не се съдържа в $\bigcup_{i=1}^{r} A'_i$. Следователно, $y \in A'_j$ за някое $j \geq r + 1$ и $y \geq a_{n_{r+1}}$. Тъй като C_j е най-големият елемент в A'_j, заключаваме, че $C_{r+1} \geq C_j \geq y \geq a_{n_{r+1}}$, което е противоречие с допускането. Така $a_{n_{r+1}} \leq C_{r+1}$ и по индукция следва, че $a_{n_i} \leq C_i$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, q$. Както преди, това влече, че $|A'_i| \leq |A_i|$ за всяко $i = 1, 2, \ldots, q$. Следователно,

$$m = \sum_{i=1}^{q} |A'_i| \leq \sum_{i=1}^{q} |A_i| \leq \sum_{i=1}^{s} |A_i| = m,$$

откъдето получаваме $q = s$. Така, Алгоритъм 1 ни дава разлагане на A минималния възможен брой k-малки подредици $A_1, A_2, \ldots, A_s$.

$\square$

Твърдение 6.2. *Алгоритъм 1 може да бъде записан рекурсивно чрез дефиниране на функция f, която ще дава разлагане на произволна редица на на k-малки подредици:*

1. $f(\emptyset) = \emptyset$.
2. $f(\{0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_m \leq n - 1\}) =$

$$= \{\{a_{m-\min\{m,n-a_m+k\}+1}, \ldots, a_m\}\} \cup$$
$$\cup\, f(\{0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{\min\{m,n-a_m+k\}} \leq n - 1\}).$$

Когато $m = n$ и $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ е редица от степени на граф G, можем да използваме алгоритъм 1, за да намерим разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на минимално възможен брой k-малки множества.

Следствие 6.3. *Нека G е граф и $d_1 \le \ldots \le d_n$ е редицата от степените му. Нека $A = \{0 \le d_1 \le \ldots \le d_n \le n-1\}$ и нека $V_1, V_2, \ldots, V_s$ е множества от върхове, съответстващи на подредиците от степени $A_1, A_2, \ldots, A_s$, получени чрез Алгоритъм 1 при вход A. Тогава $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_s$ е разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на $s = \varphi_k(G)$ k-малки множества.*

От връзката между k-малки и k-големи редици и от $\Omega_k(G) = \varphi_k(\overline{G})$, можем да модифицираме Алгоритъм 1 да е greedy MAX-type алгоритъм, който намира точната стойност на $\Omega_k(G)$. Много подобен алгоритъм за случая $k = 0$ е предложен от Murphy в [35] за получаване на долна граница за числото на независимост. Тази долна граница е точно $\Omega(G)$ (както е показано в Теорема 5.9).

Нека отново да разгледаме редица от m цели числа $B = \{0 \le b_m \le b_{m-1} \le \ldots \le b_1 \le n-1\}$ (не е задължително да е графична).

Алгоритъм 2

ВХОД: B

Стъпка 1: Инициализираме $i := 0$, $S_0 := B$.

Стъпка 2: Повтаряме

(1) $n_i := |S_i|$

(2) $q_i := \min\{n_i, b_{n_i} + k + 1\}$

(3) $B_{i+1} := \{b_{n_i}, b_{n_i-1}, \ldots, b_{n_i-q_i+1}\}$

(4) $S_{i+1} := S_i \setminus B_{i+1}$

(5) $i := i + 1$

докато $S_i = \emptyset$.

ИЗХОД: $t := i$, $B_1, B_2, \ldots, B_t$.

Теорема 6.4. *Нека $B = \{0 \le b_m \le b_{m-1} \le \ldots \le b_1 \le n-1\}$ е редица от m цели числа. Тогава Алгоритъм 2 с вход B дава едно минимално разлагане на B на s k-големи подредици $B_1, B_2, \ldots, B_t$.*

Доказателство. Нека $A = \overline{B} = \{0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_m \leq n-1\}$ допълващата редица на B, където $a_i = n - b_i - 1$. Тогава, след прилагането на Алгоритъм 1 с вход A и на Алгоритъм 2 с вход B, получаваме:

(i) $R_0 = A = \overline{B} = \overline{S_0}$

(ii) $R_i = \overline{S_i}$, $|R_i| = n_i = |S_i|$

(iii) $q_i = \min\{n_i, b_{n_i} + k + 1\} = \min\{n_i, n - (n - 1 - b_{n_i}) + k\} = \min\{n_i, n - a_{n_i} + k\} = p_i$

(iv) $B_{i+1} = \{b_{n_i}, b_{n_i-1}, \ldots, b_{n_i-q_i+1}\} = \{n - a_{n_i} - 1, n - a_{n_i-1} - 1, \ldots, n - a_{n_i-q_i+1} - 1\} = \{n - a_{n_i-q_i+1} - 1, \ldots, n - a_{n_i-1} - 1, n - a_{n_i} - 1\} = \overline{A_{i+1}}$ и

(v) $S_{i+1} = S_i \setminus B_{i+1} = \overline{R_i} \setminus A_{i+1}$.

Освен това, $S_i = \emptyset$ тогава и само тогава, когато $R_i = \emptyset$, както и броят на стъпките направени от Алгоритъм 1 с вход A е същият, както броят на стъпките направени от Алгоритъм 2 с вход B. Така $s = t$. Тъй като Алгоритъм 1 ни дава разлагане на $A = \overline{B}$ на k-малки множества $A_1, A_2, \ldots, A_s$, изходът $B_1, B_2 \ldots, B_t$ на Алгоритъм 2 е разлагане на B на k-големи множества. □

Отново, когато $m = n$ и $d_n \leq d_{n-1} \leq \ldots \leq d_1$ е редица от степени на граф G, можем да използваме Алгоритъм 2 за намиране на разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на минимален брой k-големи множества.

Следствие 6.5. *Нека G е граф и $d_n \leq \ldots \leq d_1$ е редицата от степените му. Нека $B = \{0 \leq d_n \leq \ldots \leq d_1 \leq n-1\}$ и нека $V_1, V_2, \ldots, V_t$ са множествата от върхове, съответстващи на подредиците $B_1, B_2, \ldots, B_t$ получени от Алгоритъм 2 с вход B. Тогава $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_t$ е разлагане на $\mathrm{V}(G)$ на $t = \Omega_k(G)$ k-големи множества.*

Литература

[1] Н. Ненов, *Екстремални задачи за оцветяване на графи*, Дисертация за ДМН, 2005. iv, 3, 5

[2] M. Aigner and G. Ziegler, *Proofs from the book*, Springer-Verlag, 2010, p. viii+274. ii, 54

[3] A. Bojilov, Y. Caro, A. Hansberg, and N. Nenov, *Partitions of graphs into small and large sets*, Discrete Applied Mathematics **161** (2013), no. 13-14, 1912–1924. v, vi, vii, 9, 23, 30, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41

[4] A. Bojilov and N. Nenov, *An inequality for generalized chromatic graphs*, Proceedings of the Forty First Spring Conference of Union of Bulgarian Mathematics (Borovets), Mathematics and education in mathematics, April 9–12 2012, pp. 143–147. iii, iv, v, 9, 15, 29, 35, 43

[5] ———, *δ_k-small sets in graphs*, Proceedings of the Forty Second Spring Conference of Union of Bulgarian Mathematics (Borovets), Mathematics and education in mathematics, April 2–6 2013, pp. 189–197. vii, 30

[6] Piotr Borowiecki and Frank Göring, *GreedyMAX-type Algorithms for the Maximum Independent Set Problem*, SOFSEM 2011: Theory and Practice of Computer Science (Ivana Černá, Tibor Gyimóthy, Juraj Hromkovič, Keith Jefferey, Rastislav Královič, Marko Vukolić, and Stefan Wolf, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 6543, Springer Berlin Heidelberg, 2011, pp. 146–156 (English). 7

[7] Piotr Borowiecki, Frank Göring, Jochen Harant, and Dieter Rautenbach, *The potential of greed for independence*, Journal of Graph Theory **71** (2012), no. 3, 245–259. 7

[8] Y. Caro, *New results on the independence number*, Tech. report, Tel-Aviv University, 1979. ii, 7, 40, 46, 54

[9] Yair Caro and Zsolt Tuza, *Improved lower bounds on k-independence*, Journal of Graph Theory **15** (1991), no. 1, 99–107. 7

[10] Mustapha Chellali, Odile Favaron, Adriana Hansberg, and Lutz Volkmann, *k-Domination and k-Independence in Graphs: A Survey*, Graphs and Combinatorics **28** (2012), no. 1, 1–55 (English). 45

[11] C. S. Edwards and C. H. Elphick, *Lower bounds for the clique and the chromatic numbers of a graph*, Discrete Applied Mathematics **5** (1983), no. 1, 51 – 64. iii, 7, 15, 18, 29

[12] C. Elphick and P. Wocjan, *New measures of graph irregularity*, ArXiv e-prints (2013). xv

[13] C. Elphick and P. Wocjan, *New measures of graph irregularity*, Electronic Journal of Graph Theory and Applications **2** (2014), no. 1, 52–65. xv, 17

[14] P. Erdős and T. Gallai, *Gráfok előírt fokú pontokkal (Graphs with points of prescribed degrees, in Hungarian)*, Matematikai Lapok (1961), no. 11, 264–274. i, 44

[15] P. Erdös and T. Gallai, *On the minimal number of vertices representing the edges of a graph*, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. (1961), no. 6, 181–203. ii, 6, 54

[16] O. Favaron, *k-domination and k-independence in graphs*, Ars Combin. **25C** (1988), 159–167. 7

[17] O. Favaron, M. Maheo, and J.-F. Sacle, *On the residue of a graph*, Journal of Graph Theory **15** (1991), no. 1, 39–64. 47

[18] Frank Göring, Jochen Harant, Dieter Rautenbach, and Ingo Schiermeyer, *On $\mathcal{F}$-independence in graphs*, Discuss. Math. Graph Theory **29** (2009), no. 2, 377–383. 7

[19] Jerrold R Griggs, *Lower bounds on the independence number in terms of the degrees*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **34** (1983), no. 1, 22 – 39. 7

[20] S. L. Hakimi, *On Realizability of a Set of Integers as Degrees of the Vertices of a Linear Graph. I*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics **10** (1962), no. 3, pp. 496–506 (English). 47

[21] Pierre Hansen and Maolin Zheng, *Sharp bounds on the order, size, and stability number of graphs*, Networks **23** (1993), no. 2, 99–102. vi, 22, 46

[22] J. Harant and I. Schiermeyer, *On the independence number of a graph in terms of order and size*, Discrete Mathematics **232** (2001), no. 1–3, 131 – 138. 7

[23] Jochen Harant and Dieter Rautenbach, *Independence in connected graphs*, Discrete Applied Mathematics **159** (2011), no. 1, 79 – 86. 7

[24] H. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, Menlo Park, Calif., London, 1969, p. ix+274. iv, 1, 50

[25] G. H. Hardy, J. F. Litelewood, and G. Polya, *Inequalities*, 1934. 15, 31, 32, 33

[26] Václav Havel, *Poznámka o existenci konečných grafů (A remark on the existence of finite graphs, in Czech)*, Časopis pro pěstováni matematiky **080** (1955), no. 4, 477–480 (cze). 47

[27] Frank Jelen, *k-Independence and the k-residue of a graph*, Journal of Graph Theory **32** (1999), no. 3, 241–249. 7, 47

[28] N. Khadzhiivanov, *Extremal theory of graphs*, Sofia University, Sofia, 1990, (in Bulgarian). 15, 31, 33

[29] N. Khadzhiivanov and N. Nenov, *An equalities for elementary symetric functions*, Matematica (1977), no. 4, (in Bulgarian). 15

[30] ______, *Extremal problems for s-graphs and a theorem of Turan*, Serdica Math. J. **3** (1977), no. 2, 117–125, (in Russian). 9, 11, 17

[31] ______, *Generalized r-partite graphs and turan's theorem*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. **57** (2004), no. 2, 19–24. 9, 14

[32] ______, *Sequence of maximal degree verteces in graphs*, Serdica Math. J. **30** (2004). 9, 18

[33] ______, *Saturfated β-sequences in graphs*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. **57** (2004). 9, 18

[34] ______, *Balanced vertex sets in graphs*, Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Inf. **97** (2005). 9, 18

[35] Owen Murphy, *Lower bounds on the stability number of graphs computed in terms of degrees*, Discrete Mathematics **90** (1991), no. 2, 207 – 211. 7, 61

[36] N. Nenov, *Improvement of graph theory Wei's inequlity*, Proceedings of the Thirty Fifth Spring Conference of Union of Bulgarian Mathematics (Borovets), Mathematics and education in mathematics, April 5-8 2006, pp. 191–194. iii, iv, v, 9, 11, 13, 32, 43, 47, 54

[37] Stanley M. Selkow, *The independence number of graphs in terms of degrees*, Discrete Mathematics **122** (1993), no. 1-3, 343 – 348. 7

[38] Eberhard Triesch, *Degree Sequences of Graphs and Dominance Order*, J. Graph Theory **22** (1996), no. 1, 89–93. 47

[39] P. Turán, *Eine extremalaufgabe aus der graphentheorie*, Mat. Fiz. Lapok **48** (1941). ii, 6, 46

[40] V. K. Wei, *Coding for a multiple access channel*, Ph.D. thesis, University of Hawaii, Honolulu, 1980. ii, 7, 40

[41] ———, *A lower bound on the stability number of a simple graph*, Technical Memorandum 81–11217–9, Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, 1981. ii, 7, 40, 46, 54

[42] D. J. A. Welsh and M. B. Powell, *An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems*, The Computer Journal **10** (1967), no. 1, 85–86. 50

[43] D. B. West, *Introduction to graph theory*, second ed., Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2001, p. xx+588. iv, 1

[44] W. W. Willis, *Bounds for the independence number of a graph*, Master's thesis, Virginia Commonwealth University, 2011. 47