С О Ф И Й С К И   У Н И В Е Р С И Т Е Т

„СВ.   К Л И М Е Н Т   О Х Р И Д С К И“

Ф А К У Л Т Е Т   П О   М А Т Е М А Т И К А   И   И Н Ф О Р М А Т И К А

Асен Иванов Божилов

Екстремални задачи за малки и големи множества в графи

ДИСЕРТАЦИЯ

за получаване на образователната и научна степен „доктор“

по професионално направление 4.5 „Математика“ (Алгебра и теория на числата)

Научен ръководител

проф. дмн Недялко Ненов

СОФИЯ, 2014

Разглеждат се само крайни, неориентирани графи без кратни ребра и примки. За даден граф G с $\mathrm{V}(G)$, $\mathrm{E}(G)$ и $\mathrm{e}\,(G)$ означават съответно множеството на върховете, множеството на ребрата и броят на ребрата на графа G. Казваме, че $W \subset \mathrm{V}(G)$ е клика на графа G, ако всеки два върха от W са съседни. Най-големият брой върхове на G, които образуват клика се нарича кликово число на G и се бележи с $\omega\,(G)$. Казваме, че $W \subset \mathrm{V}(G)$ е независимо множество, ако в W няма съседни върхове. Най-големият брой върхове в G, които образуват независимо множество се нарича число на независимост на G и се бележи с $\alpha\,(G)$. С $\chi\,(G)$ означаваме хроматичното число на G, а с $\deg(v)$ означаваме степента на върха v.

Теорията на графите е възникнала като математическа дисциплина, която отразява връзките между обектите на дадена математическа структура. За неин родоначалник се смята Ойлер, поставяйки и решавайки известната задача за Кьонигсбергските мостове. Използвайки съвременна терминология, можем да кажем, че Ойлер доказва, че необходимо условие за съществуване на Ойлеров път в граф е той да е свързан и броят на върховете от нечетна степен да е точно нула или два. Оказва се, че това условие и достатъчно. Интересното тук е, че за определяне дали има такъв път е достатъчно да знаем само редицата от степени на графа. Естествено възниква въпросът дали всяка редица от неотрицателни числа може да бъде графична (т. е. да съответства на степените на върховете на някакъв граф). Отговор на този въпрос ни дава теоремата на Erdős–Gallai (вж. [14] или Теорема 5.5). Паралелно с това възникват и въпросът кои характеристики на даден граф могат да се определят от степените на върховете му или, евентуално, да се оценят. В това направление са и основните резултати на тази дисертация.

От класическата теорема на Turán (вж. [39] или Теорема 1.16) лесно следва неравенството

$$\mathrm{e}\,(G) \leq \frac{n^2(r-1)}{2r}. \tag{1}$$

С помощта на средната степен

$$\mathrm{d}_1 = \frac{1}{n}\left(\sum_{v\in V(G)} \deg(v)\right)$$

и очевидното равенство

$$2\mathrm{e}\,(G) = \sum_{v\in V(G)} \deg(v),$$

от (1) лесно се получава

$$\omega\,(G) \geq \frac{n}{n-\mathrm{d}_1}. \tag{2}$$

Това неравенство, изглежда че, се появява за първи път в дуална форма (за $\alpha\,(G)$) в работата на Erdős и Gallai в [15]. Разнообразни негови доказателства има в [2].

През 1979 г. Caro ([8]) и през 1981 г. Wei ([40, 41]) доказват следното неравенство (вж. Следствие 1.21):

$$\omega\,(G) \geq \sum_{v\in V} \frac{1}{n-\deg(v)}. \tag{3}$$

Тъй като функцията $\dfrac{1}{n-x}$ е изпъкнала, след като приложим към дясната страна на (3) неравенството на Jensen се получава неравенството (2). Поради това неравенството (3) е по-силно от неравенството (2).

Друго усилване на (2) е неравенството

$$\omega\left(G\right) \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_2}, \tag{4}$$

където

$$\mathrm{d}_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum_{v \in V(G)} \deg^2(v)\right)},$$

което за първи път е формулирано от Edwards и Elphick в [11]. Доказателството им не е коректно и в тази дисертация предлагаме коректно доказателство.

Тъй като $\mathrm{d}_1 \leq \mathrm{d}_2$, неравенството (2) следва от (4). Да отбележим, че неравенствата (3) и (4) са несравними.

В [36] и [4] неравенствата (1)-(4) са усилени. За да опишем по точно тези неравенства ще са ни необходими следните дефиниции.

Определение 1 (Определение 2.1). Нека G е граф с n върха и $W \subseteq \mathrm{V}(G)$. Ще казваме, че W е *малко множество* (*δ-множество*) в графа G, ако

$$\deg(v) \leq n - |W|\,, \text{ за всяко } v \in W.$$

С $\mathrm{S}(G)$ ще бележим броя на върховете в най-голямото малко множество.

Графът G се нарича *обобщен r-хроматичен* граф, ако съществува r-разлагане

$$\mathrm{V}(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

за което множествата $V_1, V_2, \ldots, V_r$ са малки множества в G. Най-малкото цяло число r, за което G е обобщен r-хроматичен се означава с $\varphi(G)$.

В [36] Ненов доказва следното неравенство

$$\varphi(G) \leq \omega\left(G\right). \tag{5}$$

Също в [36] Ненов доказва, че неравенствата (1), (2) и (3) остават верни, когато заменим $\omega(G)$ с $\varphi(G)$, а заедно с Ненов в [4] доказваме, че неравенството (4) също остава вярно при тази замяна.

От неравенство (5) виждаме, че получените по този начин неравенства усилват неравенствата (1), (2), (3) и (4).

В тази дисертация изследваме подробно функцията $\varphi(G)$. Получаваме редица оценки за $\varphi(G)$, от които следват оценки за важни параметри на графа като кликовото число, хроматичното число, числото на независимост и др.. Получаваме и линеен алгоритъм за пресмятането на $\varphi(G)$ и някои негови обобщения. Дефинираме и други функции върху графите, които са аналогични на $\varphi(G)$ и които също дават възможност да се получат нови оценки за някои основни параметри на графа.

Пристъпваме към по-подробно описание на резултатите по глави.

Глава 1. В първия параграф се дефинират основни понятия и означения от теория на графите ([**24**, **43**]). Във втория параграф се разглеждат хроматични разлагания ([1]).

Глава 2. В първия параграф се дават необходимите дефиниции и се доказват основни свойства на малките множества и на функцията $\varphi(G)$. Следващата лема ни дава начин, по който можем да строим различни разбивания на малки множества на графа, ако винаги можем да намираме едно малко множество.

Лема 2 (Лема 2.7). *Нека G е граф и $W \subseteq \mathrm{V}(G)$. Ако U е малко множество в $G[W]$, то U е малко множество и в G.*

Основно твърдение тук е Твърдение 2.8 (вж. и [36]):

$$\varphi(G) \leq \omega(G).$$

Следващата теорема ([3]) завършва първия параграф на главата.

Теорема 3 (Теорема 2.9). *Нека G е граф с n върха, минимална степен δ, максимална степен Δ и средна степен d_1. Тогава:*

а) $\left\lceil \frac{n}{n-\mathrm{d}_1} \right\rceil \le \varphi(G) \le \left\lceil \frac{n}{n-\Delta} \right\rceil$;

б) *Ако* $\frac{r-2}{r-1}n < \mathrm{d}_1 \le \Delta \le \frac{r-1}{r}n$ *за някое естествено число* $r > 1$, *то* $\varphi(G) = r$. *В частност, за* $r = 2$ *неравенството* $1 \le \delta \le \Delta \le n/2$ *ни дава* $\varphi(G) = 2$;

в) *Ако G е r-регулярен, то* $\varphi(G) = \left\lceil \frac{n}{n-r} \right\rceil$.

Във втория параграф Твърдение 2.11 (вж. и [36]) гласи, че

$$\varphi(G) \ge \mathrm{CW}(G) = \sum_{v \in \mathrm{V}(G)} \frac{1}{n - \deg(v)},$$

което е усилване и дава друго доказателство на неравенството на Caro-Wei.

Оттук, като следствие, получаваме и усилване на теоремата на Turán в (Следствие 2.13 и Следствие 2.14):

$$\varphi(G) \ge \frac{n}{n-\mathrm{d}_1} \qquad \text{и} \qquad \mathrm{e}\,(G) \le \frac{n^2(\varphi(G)-1)}{2\varphi(G)}.$$

В третия параграф основна е Теорема 2.17 (вж. и [4]).

Теорема 4 (Теорема 2.17). *Нека G е граф с n върха. Тогава*

$$\varphi(G) \ge \frac{n}{n-\mathrm{d}_2}.$$

Равенство се достига точно когато $n \equiv 0 \pmod{\varphi(G)}$ и G е регулярен граф от степен $\frac{n(\varphi(G)-1)}{\varphi(G)}$.

Главата завършва с параграф (вж. и [3]), в който се разглеждат максимални малки множества, т. е. малки множества с възможно най-голям брой върхове. Доказани са неравенства между големината на максимално малко множество $\mathrm{S}(G)$ и числото на кликово разбиване (Твърдение 2.26)

$$\mathrm{S}(G) \geq \theta\,(G) \geq \alpha\,(G).$$

и са намерени оценките за $\mathrm{S}(G)$ (Твърдение 2.28 и Теорема 2.29)

$$n - \Delta \leq \mathrm{S}(G) \leq n - \delta$$

$$\alpha\,(G) \leq S(G) \leq \frac{n-\Delta}{2} + \sqrt{\frac{(n-\Delta)^2}{4} + n\Delta - 2\mathrm{e}\,(G)}$$

Като следствие е получено неравенството на Hansen-Zheng ([21])

$$\alpha\,(G) \leq \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + n^2 - n - 2\mathrm{e}\,(G)} \right\rfloor.$$

Също така в Твърдение 2.27 е даден начин за ефективно пресмятане на $\mathrm{S}(G)$, ако знаем редицата от степени на графа, както и за намиране на едно максимално малко множество.

Твърдение 5 (Твърдение 2.27). *Нека G е граф с n върха и нека $\mathrm{d}_1 \leq \mathrm{d}_2 \leq \ldots \leq \mathrm{d}_n$ е неговата редица от степени. Тогава*

а) $\mathrm{S}(G) \geq \dfrac{n}{\varphi(G)}$;

б) $\mathrm{S}(G) = \max\{s \mid \mathrm{d}_s \leq n-s\}$ *и* $\{v_1, v_2, \ldots, v_{S(G)}\}$ *е максимално малко множество на* G;

Глава 3. В тази глава се разглеждат средно-степенните

$$\mathrm{d}_r = \sqrt[\mathrm{r}]{\frac{1}{n}\left(\sum_{v \in V(G)} \deg^r(v)\right)},$$

и се доказва Теорема 3.2 (вж. и [3])

Теорема 6 (Теорема 3.2). *Нека G е граф с n върха. Тогава са в сила следните твърдения:*

а) *За всяко естествено число $r \le \varphi(G)$, $\varphi(G) \ge \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_r(G)}$. Освен това, равенство се достига тогава и само тогава, когато G е $\dfrac{n(\varphi(G)-1)}{\varphi(G)}$-регулярен граф.*

б) $\varphi(G) \ge \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}$. *Освен това, равенство се достига тогава и само тогава, когато G е $\dfrac{n(\varphi(G)-1)}{\varphi(G)}$-регулярен граф.*

в) *Ако $\varphi(G) \ne 2$, то $\varphi(G) \ge \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_4(G)}$. Освен това, съществува граф G, за който $\varphi(G) = 2$ и $\varphi(G) < \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_4(G)}$.*

Като следствие получаваме усилвания на теоремата на Turán.

Следствие 7 (Следствие 3.3). *Нека G е граф с n върха. Тогава са в сила следните твърдения.*

а) *За всяко естествено число $r \le \varphi(G)$, $\omega(G) \ge \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_r(G)}$ и има равенство, точно когато G е пълен $\omega(G)$-хроматичен граф на Turán (Определение 1.9)*

$$T_{\omega(G)}(n) = K\left(\tfrac{n}{\omega(G)}, \tfrac{n}{\omega(G)}, \ldots, \tfrac{n}{\omega(G)}\right).$$

б) $\omega(G) \ge \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_3(G)}$ *и има равенство, точно когато G е пълен $\omega(G)$-хроматичен граф на Turán $T_{\omega(G)}(n)$.*

в) *Ако $\varphi(G) \ne 2$, то $\omega(G) \ge \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_4(G)}$.*

Глава 4. Тук се разглеждат различни модификации на малки множества ([3, 5]. Първата от тях е:

Определение 8 (Определение 4.1). Нека G е n-върхов граф и $W \subseteq \mathrm{V}(G)$. Ще казваме, че W е *δ_k-малко множество* на G ако

$$\mathrm{d}_k(W) \le n - |W|\,.$$

С $\varphi^{(k)}(G)$ ще означаваме най-малкия брой δ_k-множества на G, на които $\mathrm{V}(G)$ се разлага.

Ще означаваме максималния брой върхове в δ_k-множество на G с $\mathrm{S}^{(k)}(G)$.

В първия параграф са получени оценките (Твърдение 4.5, Твърдение 4.8 и Твърдение 4.7):

$$\varphi^{(1)}(G) \geq \left\lceil \frac{n}{n - \mathrm{d}_1(G)} \right\rceil$$
$$\left\lceil \frac{n}{n - \mathrm{d}_1(G)} \right\rceil \leq \varphi^{(k)}(G) \leq \left\lceil \frac{n}{n - \Delta(G)} \right\rceil$$
$$\varphi^{(1)}(G) \leq \varphi^{(2)}(G) \leq \cdots \leq \varphi^{(k)}(G) \leq \cdots \leq \varphi(G) \leq \omega\,(G) \leq \chi(G)$$

Във втория параграф Теорема 4.9 усилва Твърдение 4.7.

Теорема 9 (Теорема 4.9). *Нека G е граф. Тогава съществува естествено число $k_0 = k_0(G)$, такова че за всяко $k \geq k_0$ е в сила*

а) *Всяко δ_k-малко множество на G е малко множество на G.*

б) $\varphi^{(1)}(G) \leq \cdots \leq \varphi^{(k_0)}(G) = \varphi^{(k_0+1)}(G) = \cdots = \varphi(G)$.

В третия параграф на главата се доказва следната теорема:

Теорема 10 (Теорема 4.11). *Нека G е n-върхов граф и*

$$\mathrm{V}(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_r, \quad V_i \cap V_j = \emptyset, \quad i \neq j,$$

където V_i са δ_k-малки множества. Тогава, за всяко естествено $k \leq r$ са изпълнени следните неравенства

а) $\mathrm{d}_k(G) \leq \dfrac{n(r-1)}{r}$;

б) $r \geq \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_k(G)}$.

Тя ни дава оценка за $\mathrm{d}_k(G)$, която се използва в следващия, четвърти, параграф, за да се получат някои следствия.

В петия параграф се разглеждат най-големите δ_k-малки множества. За големините им се показва, че образуват монотонна ненарастваща редица, която се стабилизира. Следващите две твърдения дават тяхно описание и оценка за големината им.

Твърдение 11 (Твърдение 4.24). *Нека*

$$\mathrm{V}(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \quad \text{и} \quad \deg(v_1) \le \deg(v_2) \le \cdots \le \deg(v_n).$$

Тогава

$$\mathrm{S}^{(k)}(G) = \max\{s \mid \mathrm{d}_k(\{v_1, v_2, \ldots v_s\}) \le n - s\} =$$
$$= \max\{s \mid \{v_1, v_2, \ldots v_s\} \text{ е } \delta_k\text{-малко множество в } G\}.$$

Твърдение 12 (Твърдение 4.25). *За всяко естествено число k са в сила следните неравенства*

$$n - \Delta(G) \le \mathrm{S}^{(k)}(G) \le n - \delta(G).$$

Последната теорема от параграфа оценява големината на едно δ_1-малко множество чрез средно-степенното на останалите върхове. Като следствие се получава оценка за максималните δ_k-малки множества.

Теорема 13 (Теорема 4.27). *Нека $A \subseteq \mathrm{V}(G)$ е δ_1-малко множество на G и $s = \mathrm{d}_1(\mathrm{V}(G) \setminus A)$. Тогава*

$$|A| \le \left\lfloor \frac{n-s}{2} + \sqrt{\frac{(n-s)^2}{4} + ns - 2\mathrm{e}(G)} \right\rfloor \tag{6}$$

Следствие 14 (Следствие 4.28). *За всяко естествено число k*

$$\mathrm{S}^{(k)}(G) \le \left\lfloor \frac{n-\Delta(G)}{2} + \sqrt{\frac{(n-\Delta(G))^2}{4} + n\Delta(G) - 2\mathrm{e}(G)} \right\rfloor \le$$
$$\le \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + n^2 - n - 2\mathrm{e}(G)} \right\rfloor. \tag{7}$$

В последния параграф се разглежда модификация на малките множества чрез функцията на Caro-Wei — α-малки множества. Доказва се, че всяко малко множество е и α-малко, както и че всяко α-малко множество е и δ_1-малко. Накрая доказваме две вериги неравенства за минималния брой малки множества и като следствие получаваме по-точни оценки за неравенството в теоремата на Turán.

Теорема 15 (Теорема 4.31). *Нека G е граф с n върха. Тогава*

а) $\omega(G) \geq \varphi(G) \geq \varphi^{\alpha}(G) \geq \varphi^{(1)}(G) \geq \left\lceil \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_1(G)} \right\rceil$;

б) $\omega(G) \geq \varphi(G) \geq \varphi^{\alpha}(G) \geq CW(G) \geq \left\lceil \dfrac{n}{n - \mathrm{d}_1(G)} \right\rceil$.

Следствие 16 (Следствие 4.33). *Нека G е граф с n върха. Тогава*

а)

$$\mathrm{e}(G) \leq \frac{(\varphi^{(1)}(G) - 1)n^2}{2\varphi^{(1)}(G)} \leq \frac{(\varphi^{\alpha}(G) - 1)n^2}{2\varphi^{\alpha}(G)} \leq \leq \frac{(\varphi(G) - 1)n^2}{2\varphi(G)} \leq \frac{(\omega(G) - 1)n^2}{2\omega(G)};$$

б)

$$\mathrm{e}(G) \leq \frac{(\mathrm{CW}(\overline{G}) - 1)n^2}{2\,\mathrm{CW}(\overline{G})} \leq \frac{(\varphi^{\alpha}(G) - 1)n^2}{2\varphi^{\alpha}(G)} \leq \leq \frac{(\varphi(G) - 1)n^2}{2\varphi(G)} \leq \frac{(\omega(G) - 1)n^2}{2\omega(G)}.$$

Глава 5. В тази глава, заедно с малките множества, разглеждаме и дуалните им големи множества, като разглеждаме по-общата ситуация на k-малки и k-големи множества.

Определение 17 (Определение 5.2). Нека G е граф с n върха. Едно множество от върхове $A \subseteq \mathrm{V}(G)$ ще наричаме *k-малко* ако за всеки връх $v \in A$, $\deg(v) \leq n - |A| + k$. Едно подмножество $B \subseteq \mathrm{V}(G)$ ще наричаме *k-голямо* ако за всеки връх $v \in B$, $\deg(v) \geq |B| - k - 1$.

Като използваме техниката развита за малки множества, получаваме множество твърдения за минималния брой такива множества, на които може да се разбие множеството от върховете и за големината на най-голямото такова множество.

Теорема 18 (Теорема 5.12). *Нека G е граф със n върха и $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ е неговата редица от степени. Тогава* а) $\mathrm{S}_k(G) \geq \alpha_k(G)$ *и* $\mathrm{L}_k(G) \geq \omega_k(G)$*;*

б) $\mathrm{S}_k(G) \geq \dfrac{n}{\varphi_k(G)}$ *и* $\mathrm{L}_k(G) \geq \dfrac{n}{\Omega_k(G)}$*;*

в) $\mathrm{S}_k(G) = \max\{s \mid d_s \leq n - s + k\}$ *и* $\{v_1, v_2, \ldots, v_{\mathrm{S}_k(G)}\}$ *е най-голямо k-малко множество на G;*

г) $\mathrm{L}_k(G) = \max\{t \mid t - k - 1 \leq d_{n-t+1}\}$ *и* $\{v_{n-L_k(G)+1}, v_{n-L_k(G)+2}, \ldots, v_n\}$ *е най-голямо k-голямо множество на G.*

Твърдение 19 (Твърдение 5.13). *Нека G е граф с минимална степен δ и максимална степен Δ. Тогава*

а) $n - \Delta + k \leq \mathrm{S}_k(G) \leq n - \delta + k$ *за* $k \leq \Delta$*;*

б) $\delta + k + 1 \leq \mathrm{L}_k(G) \leq \Delta + k + 1$ *за* $k \leq n - \delta - 1$*;*

в) *Ако G е r-регулярен, то* $\mathrm{S}_k(G) = n - r + k$ *при* $k \leq r$ *и* $\mathrm{L}_k(G) = r + k + 1$ *при* $k \leq n - r - 1$.

Доказваме, че множеството от върховете на всеки граф може да се разложи на k-голямо и k-малко множество. Този факт се прецизира в

Твърдение 20 (Твърдение 5.19). *Нека G е граф с n върха и* $\mathrm{e}\,(G)$ *ребра. Тогава съществува разлагане на* $\mathrm{V}(G)$ *на k-малко множество V_S и k-голямо множество V_L, такива,че*

$$|V_L| \leq \frac{1}{2}(k + 1 + \sqrt{(k+1)^2 + 8\mathrm{e}\,(G)})$$

и

$$|V_S| \geq n - \frac{1}{2}(k + 1 + \sqrt{(k+1)^2 + 8\mathrm{e}\,(G)}).$$

В последния параграф на главата се доказват следните оценки за $\varphi_k(G)$ и $\Omega_k(G)$.

Теорема 21 (Теорема 5.20). *Нека G е граф с n върха и средна степен* d_1*. Тогава*

а) $\varphi_k(G) \geq \displaystyle\sum_{v \in V(G)} \frac{1}{n - \deg(v) + k} \geq \frac{n}{n - \mathrm{d}_1 + k}$*;*

б) $\Omega_k(G) \geq \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{\deg(v)+k+1} \geq \frac{n}{\mathrm{d}_1+k+1}$.

Следствие 22 (Следствие 5.22). *Нека G е граф с n върха и $\mathrm{e}(G)$ ребра. Тогава*

а) $\mathrm{e}(G) \leq \frac{1}{2}\left(n^2 - \frac{n^2}{\varphi_k(G)} + nk\right)$;

б) $\mathrm{e}(G) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{n^2}{\Omega_k(G)} - n(k+1)\right)$.

Теорема 23 (Теорема 5.23). *Нека G е граф с n върха минимална степен δ, максимална степен Δ и средна степен d_1. Тогава*

а) $\left\lceil \frac{n}{n-\mathrm{d}_1+k} \right\rceil \leq \varphi_k(G) \leq \left\lceil \frac{n}{n+k-\Delta} \right\rceil$;

б) $\left\lceil \frac{n}{\mathrm{d}_1+k+1} \right\rceil \leq \Omega_k(G) \leq \left\lceil \frac{n}{\delta+k+1} \right\rceil$;

в) *Ако* $\frac{r-2}{r-1}n + k < \mathrm{d}_1 \leq \Delta \leq \frac{r-1}{r}n + k$ *за някое цяло число* $r > 1$, *то* $\varphi_k(G) = r$. *В частност за* $r = 2$ *имаме, че ако* $1 \leq \delta \leq \Delta \leq n/2$, *то* $\varphi(G) = 2$*)*;

г) *Ако* $\frac{n}{r} - k - 1 \leq \delta \leq \mathrm{d}_1 < \frac{n}{r-1} - k - 1$ *за някое цяло число* $r > 1$, *то* $\Omega_k(G) = r$;

д) *Ако G е r-регулярен, то* $\varphi_k(G) = \left\lceil \frac{n}{n+k-r} \right\rceil$ *и* $\Omega_k(G) = \left\lceil \frac{n}{r+k+1} \right\rceil$.

Глава 6. В тази глава са представени два алгоритъма с линейно време за намиране на $\varphi_k(G)$ и на $\Omega_k(G)$, като е доказана тяхната коректност.

В заключение, бих искал да изкажа благодарността си на всички колеги от катедра „Алгебра“, ФМИ, СУ, които от много отдавна чувствам като приятели. Особено искам да благодаря на по-възрастните колеги, от които съм се учил много и, надявам се, научил поне мъничко. Някои от тях, за съжаление, вече не са сред нас... Специална благодарност бих искал да изкажа на научния си ръководител проф. Н. Ненов, който ме въведе в тази тематика, с когото ми беше изключително приятно да работя, който ме изтърпя през всичките тези години и с когото се надявам да работя и занапред.

Авторска справка

По мнение на автора основните приноси в дисертацията са:

1. Усилване на резултат на Erdős и неравенството на Caro-Wei (Следствие 5.21).
2. Получаване на вярно доказателство и усилване на неравенството на Edwards и Elphick (Теорема 1.22).
3. Получаване на веригите неравенства (25) и Теорема 4.9 б).
4. Оценка на кликовото число с кубичното, биквадратичното и останалите средно-степенни. Описани са и случаите когато се достига равенство (Следствие 3.3).
5. Горни и долни граници за φ, както и за неговите модификации.
6. Линеен алгоритъм за пресмятане на φ.
7. Алгоритъм за намиране на най-голямо малко множество и получаване на оценка за броя на върховете на най-голямо малко множество.
8. Дефиниране на k-малки множества, като обобщение на малки множества и доказване на аналогични резултати на случая, когато $k = 0$, включително получаване на линеен алгоритъм за пресмятане на φ_k, аналогичен на алгоритъма за φ.
9. Дефиниране на k-големи множества и получаване на дуални зависимости между k-малки и k-големи множества. Получаване чрез тях на резултати, аналогични на резултатите за k-малки множества.
10. Дефиниране на малки и големи множества (подредици) за редици и алгоритъм за получаване на минимални разлагания на малки и големи подредици.

Публикации във връзка с дисертацията

[1] A. Bojilov and N. Nenov. An inequality for generalized chromatic graphs. In *Proceedings of the Forty First Spring Conference of Union of Bulgarian Mathematics*, Mathematics and education in mathematics, pages 143–147, Borovets, April 9–12 2012.

[2] A. Bojilov, Y. Caro, A. Hansberg., and N. Nenov. Partitions of graphs into small and large sets. *Discrete Applied Mathematics*, 161(13-14):1912–1924, 2013, IF2012-0.718.

[3] A. Bojilov and N. Nenov. δ_k-small sets in graphs. In *Proceedings of the Forty Second Spring Conference of Union of Bulgarian Mathematics*, Mathematics and education in mathematics, pages 189–197, Borovets, April 2–6 2013.

Цитирания:

Работи [1] и [2] се цитират в [**13**], а работа [3] се цитира в [**12**].

Резултатите в дисертацията са докладвани в семинара по алгебра през април 2012, на отчетни сесии на ФМИ и на 41 и 42 пролетни конференции на СМБ, 2012 г. и 2013 г., Боровец.

Литература

[1] Н. Ненов, *Екстремални задачи за оцветяване на графи*, Дисертация за ДМН, 2005.

[2] M. Aigner and G. Ziegler, *Proofs from the book*, Springer-Verlag, 2010, p. viii+274.

[3] A. Bojilov, Y. Caro, A. Hansberg, and N. Nenov, *Partitions of graphs into small and large sets*, Discrete Applied Mathematics **161** (2013), no. 13-14, 1912–1924.

[4] A. Bojilov and N. Nenov, *An inequality for generalized chromatic graphs*, Proceedings of the Forty First Spring Conference of Union of Bulgarian Mathematics (Borovets), Mathematics and education in mathematics, April 9–12 2012, pp. 143–147.

[5] ______, *δ_k-small sets in graphs*, Proceedings of the Forty Second Spring Conference of Union of Bulgarian Mathematics (Borovets), Mathematics and education in mathematics, April 2–6 2013, pp. 189–197.

[6] Piotr Borowiecki and Frank Göring, *GreedyMAX-type Algorithms for the Maximum Independent Set Problem*, SOFSEM 2011: Theory and Practice of Computer Science (Ivana Černá, Tibor Gyimóthy, Juraj Hromkovič, Keith Jefferey, Rastislav Královič, Marko Vukolić, and Stefan Wolf, eds.), Lecture Notes in Computer Science, vol. 6543, Springer Berlin Heidelberg, 2011, pp. 146–156 (English).

[7] Piotr Borowiecki, Frank Göring, Jochen Harant, and Dieter Rautenbach, *The potential of greed for independence*, Journal of Graph Theory **71** (2012), no. 3, 245–259.

[8] Y. Caro, *New results on the independence number*, Tech. report, Tel-Aviv University, 1979.

[9] Yair Caro and Zsolt Tuza, *Improved lower bounds on k-independence*, Journal of Graph Theory **15** (1991), no. 1, 99–107.

[10] Mustapha Chellali, Odile Favaron, Adriana Hansberg, and Lutz Volkmann, *k-Domination and k-Independence in Graphs: A Survey*, Graphs and Combinatorics **28** (2012), no. 1, 1–55 (English).

[11] C. S. Edwards and C. H. Elphick, *Lower bounds for the clique and the chromatic numbers of a graph*, Discrete Applied Mathematics **5** (1983), no. 1, 51 – 64.

[12] C. Elphick and P. Wocjan, *New measures of graph irregularity*, ArXiv e-prints (2013).

[13] C. Elphick and P. Wocjan, *New measures of graph irregularity*, Electronic Journal of Graph Theory and Applications **2** (2014), no. 1, 52–65.

[14] P. Erdős and T. Gallai, *Gráfok előírt fokú pontokkal (Graphs with points of prescribed degrees, in Hungarian)*, Matematikai Lapok (1961), no. 11, 264–274.

[15] P. Erdös and T. Gallai, *On the minimal number of vertices representing the edges of a graph*, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci. (1961), no. 6, 181–203.

[16] O. Favaron, *k-domination and k-independence in graphs*, Ars Combin. **25C** (1988), 159–167.

[17] O. Favaron, M. Maheo, and J.-F. Sacle, *On the residue of a graph*, Journal of Graph Theory **15** (1991), no. 1, 39–64.

[18] Frank Göring, Jochen Harant, Dieter Rautenbach, and Ingo Schiermeyer, *On $\mathcal{F}$-independence in graphs*, Discuss. Math. Graph Theory **29** (2009), no. 2, 377–383.

[19] Jerrold R Griggs, *Lower bounds on the independence number in terms of the degrees*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **34** (1983), no. 1, 22 – 39.

[20] S. L. Hakimi, *On Realizability of a Set of Integers as Degrees of the Vertices of a Linear Graph. I*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics **10** (1962), no. 3, pp. 496–506 (English).

[21] Pierre Hansen and Maolin Zheng, *Sharp bounds on the order, size, and stability number of graphs*, Networks **23** (1993), no. 2, 99–102.

[22] J. Harant and I. Schiermeyer, *On the independence number of a graph in terms of order and size*, Discrete Mathematics **232** (2001), no. 1–3, 131 – 138.

[23] Jochen Harant and Dieter Rautenbach, *Independence in connected graphs*, Discrete Applied Mathematics **159** (2011), no. 1, 79 – 86.

[24] H. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass, Menlo Park, Calif., London, 1969, p. ix+274.

[25] G. H. Hardy, J. F. Litelewood, and G. Polya, *Inequalities*, 1934.

[26] Václav Havel, *Poznámka o existenci konečných grafů (A remark on the existence of finite graphs, in Czech)*, Časopis pro pěstováni matematiky **080** (1955), no. 4, 477–480 (cze).

[27] Frank Jelen, *k-Independence and the k-residue of a graph*, Journal of Graph Theory **32** (1999), no. 3, 241–249.

[28] N. Khadzhiivanov, *Extremal theory of graphs*, Sofia University, Sofia, 1990, (in Bulgarian).

[29] N. Khadzhiivanov and N. Nenov, *An equalities for elementary symetric functions*, Matematica (1977), no. 4, (in Bulgarian).

[30] ______, *Extremal problems for s-graphs and a theorem of Turan*, Serdica Math. J. **3** (1977), no. 2, 117–125, (in Russian).

[31] ______, *Generalized r-partite graphs and turan's theorem*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. **57** (2004), no. 2, 19–24.

[32] ______, *Sequence of maximal degree verteces in graphs*, Serdica Math. J. **30** (2004).

[33] ______, *Saturfated β-sequences in graphs*, Compt. rend. Acad. bulg. Sci. **57** (2004).

[34] ______, *Balanced vertex sets in graphs*, Ann. Univ. Sofia, Fac. Math. Inf. **97** (2005).

[35] Owen Murphy, *Lower bounds on the stability number of graphs computed in terms of degrees*, Discrete Mathematics **90** (1991), no. 2, 207 – 211.

[36] N. Nenov, *Improvement of graph theory Wei's inequlity*, Proceedings of the Thirty Fifth Spring Conference of Union of Bulgarian Mathematics (Borovets), Mathematics and education in mathematics, April 5-8 2006, pp. 191–194.

[37] Stanley M. Selkow, *The independence number of graphs in terms of degrees*, Discrete Mathematics **122** (1993), no. 1-3, 343 – 348.

[38] Eberhard Triesch, *Degree Sequences of Graphs and Dominance Order*, J. Graph Theory **22** (1996), no. 1, 89–93.

[39] P. Turán, *Eine extremalaufgabe aus der graphentheorie*, Mat. Fiz. Lapok **48** (1941).

[40] V. K. Wei, *Coding for a multiple access channel*, Ph.D. thesis, University of Hawaii, Honolulu, 1980.

[41] ______, *A lower bound on the stability number of a simple graph*, Technical Memorandum 81–11217–9, Bell Laboratories, Murray Hill, NJ, 1981.

[42] D. J. A. Welsh and M. B. Powell, *An upper bound for the chromatic number of a graph and its application to timetabling problems*, The Computer Journal **10** (1967), no. 1, 85–86.

[43] D. B. West, *Introduction to graph theory*, second ed., Prentice Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, 2001, p. xx+588.

[44] W. W. Willis, *Bounds for the independence number of a graph*, Master's thesis, Virginia Commonwealth University, 2011.