Лекция 10

Формули на Крамер. Произведение на детерминанти. Обратна матрица

10.1 Формули на Крамер

Нека

$$
(10.1) \qquad \left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \right.
$$

е система от n линейни уравнения за n неизвестни $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тази система има единствено решение тогава и само тогава, когато

$$\mathrm{rk}\,(A) = \mathrm{rk}\,(A \mid B) = n,$$

където A и $(A \mid B)$ са съответно матрицата от коефициентите и разширената матрица на (10.1). Да забележим, че $\mathrm{rk}\,(A \mid B) \leq n$, защото матрицата $(A \mid B)$ има n реда. Тъй като

$$\mathrm{rk}\,(A) \leq \mathrm{rk}\,(A \mid B) \leq n,$$

ние получаваме окончателно, че системата (10.1) има единствено решение тогава и само тогава, когато

$$\mathrm{rk}\,(A) = n.$$

Определение 10.1 (Неособена матрица)**.** Нека $X \in M_n(\mathbb{R})$ е матрица с n реда и n стълба. Казваме, че матрицата X е *неособена*, когато $\mathrm{rk}\,(X) = n$. Ако $\mathrm{rk}\,(X) < n$, матрицата X се нарича *особена*.

Твърдение 10.1. *Матрицата $X \in M_n(\mathbb{R})$ е неособена тогава и само тогава, когато* $\det X \neq 0$.

Доказателство. Ясно е, че рангът на X е равен на n само когато редовете $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ на X са линейно независими вектори от $\mathbb{R}^n$. От друга страна, съгласно Твърдение 9.4, редовете $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$, на X са линейно независими тогава и само тогава, когато $\det X \neq 0$.

Нека $\Delta = \det A$ е детерминантата на матрицата от коефициентите на система (10.1). Нека Δ_q, $q = 1, \ldots, n$, е детерминанта на матрицата, която се получава от A чрез замяна на q-тия стълб на A със стълба на константите B на (10.1):

$$\Delta_q = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,q-1} & b_1 & a_{1,q+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,q-1} & b_2 & a_{2,q+1} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,q-1} & b_n & a_{n,q+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad q = 1, \ldots, n.$$

Развивайки Δ_q по q-тия стълб, получаваме:

$$\Delta_q = b_1\Delta_{1q} + b_2\Delta_{2q} + \cdots + b_n\Delta_{nq}, \quad q = 1 \ldots, n,$$

където $\Delta_{1q}, \Delta_{2q}, \ldots, \Delta_{nq}$ са адюнгираните количества на $a_{1q}, a_{2q}, \ldots, a_{nq}$.

Твърдение 10.2 (Формули на Крамер)**.** *Ако матрицата от коефициенти на линейната система* (10.1) *е неособена, то* (10.1) *има единствено решение, което се дава с формулите:*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Доказателство. За всяко $p = 1, \ldots, n$, да умножим p-тото уравнение на система (10.1) с адюнгираното количество Δ_{pq} на елемента a_{pq},

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}\Delta_{1q}\, x_1 + a_{12}\Delta_{1q}\, x_2 + \cdots + a_{1q}\Delta_{1q}\, x_q + \cdots + a_{1n}\Delta_{1q}\, x_q = b_1\Delta_{1q} \\ a_{21}\Delta_{2q}\, x_1 + a_{22}\Delta_{2q}\, x_2 + \cdots + a_{2q}\Delta_{2q}\, x_q + \cdots + a_{2n}\Delta_{2q}\, x_q = b_2\Delta_{2q} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\Delta_{nq}\, x_1 + a_{n2}\Delta_{nq}\, x_2 + \cdots + a_{nq}\Delta_{nq}\, x_q + \cdots + a_{nn}\Delta_{nq}\, x_q = b_n\Delta_{nq} \end{array} \right.$$

след което да съберем всички уравнения. Използвайки Следствие 9.7, получаваме

$$\underbrace{(a_{1q}\Delta_{1q} + a_{2q}\Delta_{2q} + \cdots + a_{nq}\Delta_{nq})}_{\Delta} x_q = \underbrace{b_1\Delta_{1q} + b_2\Delta_{2q} + \ldots + b_n\Delta_{nq}}_{\Delta_q},$$

откъдето $x_q = \Delta_q/\Delta$, $q = 1, \ldots, n$, което трябваше да се докаже.

10.2 Произведение на детерминанти

Нека $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ са матрици с n реда и n стълба. Нека $\boldsymbol{R}_1, \boldsymbol{R}_2, \ldots, \boldsymbol{R}_n$ са редовете на X и $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_1, \ldots, \boldsymbol{C}_n$ са стълбовете на Y. Тогава

$$XY = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{C}_2 & \ldots & \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{C}_n \\ \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{C}_2 & \ldots & \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{C}_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \boldsymbol{R}_n\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{R}_n\boldsymbol{C}_2 & \ldots & \boldsymbol{R}_n\boldsymbol{C}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 Y \\ \boldsymbol{R}_2 Y \\ \ldots \\ \boldsymbol{R}_n Y \end{pmatrix}.$$

Лема 10.3. *Нека $Y \in M_n(\mathbb{R})$ е фиксирана матрица и нека функцията $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ е зададена с формулата*

$$f(X) = \det(XY), \quad X \in M_n(\mathbb{R}).$$

Тогава f е полилинейна антисиметрична функция на редовете на матрицата X.

Доказателство. Първо ще покажем, че f е полилинейна функция на редовете на матрицата X.

а) Нека $\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_i, \boldsymbol{R}'_i, \dots, \boldsymbol{R}_n$ са вектор-редове от $\mathbb{R}^n$ и нека

$$X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{R}'_i \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$XY = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 Y \\ \dots \\ (\boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{R}'_i)Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_i Y + \boldsymbol{R}'_i Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n Y \end{pmatrix}.$$

Следователно

$$f(\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_i + \boldsymbol{R}'_i, \dots, \boldsymbol{R}_n) = \det(XY) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_i Y + \boldsymbol{R}'_i Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n Y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_i Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n Y \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}'_i Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n Y \end{pmatrix} =$$

$$= f(\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_i, \dots, \boldsymbol{R}_n) + f(\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}'_i, \dots, \boldsymbol{R}_n).$$

б) Нека λ е реално число, $\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_i, \dots, \boldsymbol{R}_n$ са вектор-редове от $\mathbb{R}^n$ и нека

$$X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \dots \\ \lambda \boldsymbol{R}_i \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$f(\boldsymbol{R}_1, \dots, \lambda \boldsymbol{R}_i, \dots, \boldsymbol{R}_n) = \det(XY) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 Y \\ \dots \\ (\lambda \boldsymbol{R}_i) Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n Y \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 Y \\ \dots \\ \lambda(\boldsymbol{R}_i Y) \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n Y \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_i Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n Y \end{pmatrix} =$$

$$= \lambda f(\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_i, \dots, \boldsymbol{R}_n).$$

Както се вижда от а) и б), f е полилинейна функция от редовете на матрицата X.

Остава да докажем, че f е антисиметрична функция на редовете на матрицата X.

в) Нека $\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_i, \dots, \boldsymbol{R}_j, \dots, \boldsymbol{R}_n$ са вектори от $\mathbb{R}^n$ и нека

$$X = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_j \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_i \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n \end{pmatrix}.$$

Тогава

$$\begin{aligned} f(\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_j, \dots, \boldsymbol{R}_i, \dots \boldsymbol{R}_n) = \det XY = \\ = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_j Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_i Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n Y \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1 Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_i Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_j Y \\ \dots \\ \boldsymbol{R}_n Y \end{pmatrix} = \\ = -f(\boldsymbol{R}_1, \dots, \boldsymbol{R}_i, \dots, \boldsymbol{R}_j, \dots \boldsymbol{R}_n). \end{aligned}$$

Сега от а), б) и в) следва, че f е полилинейна антисиметрична функция на редовете на матрицата X и лемата е доказана.

Теорема 10.1. *Нека $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ са матрици с n реда и n стълба. Тогава*

$$\det(XY) \;=\; \det X \, \det Y.$$

Доказателство. Нека $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ е функцията, зададена с формулата

$$f(X) \;=\; \det(XY), \quad X \in M_n(\mathbb{R}),$$

и нека $g : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ е функцията, зададена с формулата

$$g(X) \;=\; \det X \, \det Y, \quad X \in M_n(\mathbb{R}).$$

Трябва да докажем, че $f(X) = g(X)$ за всяка матрица $X \in M_n(\mathbb{R})$. За тази цел ще използваме, че f е полилинейна антисиметрична функция на редовете на матрицата X (Лема 10.3). Тъй като g също е полилинейна антисиметрична функция на редовете на матрицата X (проверете това!), то съгласно Следствие 8.11 е достатъчно да се установи, че $f(E_n) = g(E_n)$. Последното равенство следва от определението на функциите f и g:

$$\begin{aligned} f(E_n) &= \det(E_n Y) = \det Y, \\ g(E_n) &= \det E_n \det Y = \det Y = f(E_n). \end{aligned}$$

Следователно $f(X) = g(X)$ за всяка матрица $X \in M_n(\mathbb{R})$, което трябваше да се докаже.

10.3 Адюнгирана матрица и обратна матрица

Нека $X = (x_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ е матрица с n реда и n стълба,

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Да образуваме нова матрица $\widetilde{X} = (\widetilde{x}_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ с n реда и n стълба по следния начин:

За всяко $1 \leq q \leq n$, q-тият стълб на матрицата $\widetilde{X}$ се състои от адюнгираните количества на q-тия ред на матрицата X.

Тогава

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \dots & \Delta_{n1} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \dots & \Delta_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{1n} & \Delta_{2n} & \dots & \Delta_{nn} \end{pmatrix},$$

където Δ_{ij} е адюнгираното количество на елемента x_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$.

Определение 10.2 (Адюнгирана матрица)**.** Матрицата $\widetilde{X}$ се нарича *адюнгирана матрица* на матрицата X.

Следващата теорема описва най-важното свойство на адюнгираната матрица.

Теорема 10.2. *Нека $X \in M_n(\mathbb{R})$ и нека $\widetilde{X} \in M_n(\mathbb{R})$ е адюнгираната матрица на X. Тогава*

$$X\widetilde{X} = \widetilde{X}X = (\det X)E_n.$$

Доказателство. Нека

$$\boldsymbol{R}_p = \begin{pmatrix} x_{p1} & x_{p2} & \dots & x_{pn} \end{pmatrix}$$

е p-тият ред на матрицата X и нека

$$\boldsymbol{C}_q = \begin{pmatrix} \Delta_{q1} \\ \Delta_{q2} \\ \dots \\ \Delta_{qn} \end{pmatrix}$$

е q-тият стълб на матрицата $\widetilde{X}$. Използвайки Следствие 9.7 а), получаваме:

$$\boldsymbol{R}_p\boldsymbol{C}_q = x_{p1}\Delta_{q1} + x_{p2}\Delta_{q2} + \dots + x_{pn}\Delta_{qn} = \begin{cases} 0 & \text{когато } p \neq q, \\ \det X & \text{когато } p = q. \end{cases}$$

Следователно

$$X\widetilde{X} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{C}_2 & \dots & \boldsymbol{R}_1\boldsymbol{C}_n \\ \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{C}_2 & \dots & \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{C}_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \boldsymbol{R}_n\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{R}_n\boldsymbol{C}_2 & \dots & \boldsymbol{R}_n\boldsymbol{C}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det X & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det X & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det X \end{pmatrix},$$

т.е. $X\widetilde{X} = (\det X)E_n$. Аналогично, използвайки Следствие 9.7 б), виждаме, че $\widetilde{X}X = (\det X)E_n$.

Следствие 10.4. *Нека $X \in M_n(\mathbb{R})$ е неособена матрица и нека*

$$Y \;=\; \frac{1}{\det X}\,\widetilde{X}.$$

Тогава

$$XY \;=\; YX \;=\; E_n.$$

Доказателство. От Теорема 10.2 следва, че

$$XY = X\left(\frac{1}{\det X}\widetilde{X}\right) = \frac{1}{\det X}(X\widetilde{X}) = \frac{1}{\det X}(\det X)E_n = E_n,$$
$$YX = \left(\frac{1}{\det X}\widetilde{X}\right)X = \frac{1}{\det X}(\widetilde{X}X) = \frac{1}{\det X}(\det X)E_n = E_n.$$

Определение 10.3 (Обратима матрица)**.** Казваме, че матрицата $X \in M_n(\mathbb{R})$ е *обратима*, когато съществува матрица $Y \in M_n(\mathbb{R})$, такава че

$$XY \;=\; YX \;=\; E_n.$$

Матрицата Y се нарича *обратна матрица* на матрицата X.

Забележка. Ако матрицата X е обратима, то X има единствена обратна матрица Y. Наистина, ако матрицата $Y' \in M_n(\mathbb{R})$ е такава, че

$$XY' \;=\; Y'X \;=\; E_n,$$

то от асоциативността на умножението на матрици следва, че

$$Y' = E_nY' = (YX)Y' = Y(XY') = YE_n = Y.$$

Ако X е обратима матрица, ще означаваме с X^{-1} обратната матрица на X.

Както видяхме в Следствие 10.4, всяка неособена матрица е обратима. Лесно се вижда, че обратното също е вярно:

Твърдение 10.5. *Матрицата $X \in M_n(\mathbb{R})$ е обратима тогава и само тогава, когато е неособена.*

Доказателство. Трябва само да докажем, че всяка обратима матрица $X \in M_n(\mathbb{R})$ е неособена. За тази цел да забележим, че от равенството $XY = E_n$ и Теорема 10.1 следва, че

$$\det X\,\det Y = \det(XY) = \det E_n = 1.$$

Следователно $\det X \neq 0$ и матрицата X е неособена.

Доказателството на горното твърдение показва, че ако матрицата X е обратима, то

$$\det(X^{-1}) = \frac{1}{\det X}.$$

Твърдение 10.6. *Нека $X_1, X_2 \in M_n(\mathbb{R})$ са обратими матрици. Тогава X_1X_2 също е обратима матрица и*

$$(X_1X_2)^{-1} \;=\; X_2^{-1}X_1^{-1}.$$

Доказателство. Използвайки асоциативността на умножението на матрици, получаваме:

$$\begin{aligned}(X_1X_2)(X_2^{-1}X_1^{-1}) &= X_1(X_2X_2^{-1})X_1^{-1} = X_1E_nX_1^{-1} = X_1X_1^{-1} = E_n,\\ (X_2^{-1}X_1^{-1})(X_1X_2) &= X_2^{-1}(X_1^{-1}X_1)X_2 = X_2^{-1}E_nX_2 = X_2^{-1}X_2 = E_n.\end{aligned}$$

Следователно X_1X_2 е обратима матрица и $(X_1X_2)^{-1} = X_2^{-1}X_1^{-1}$.