

Комбинаторика

Тази област на математиката се заражда през 16 век, като първите задачи са възникнали от хазартни игри, като например тези на карти и зарове. Комбинаториката може да се разглежда като дял от теория на множествата, който се занимава с образуването и преброяването на елементите на крайни множества от обекти, подчинени на разнообразни условия.

1. Пермутации без повторения.

Нека преброим събираемите в детерминанта на матрица от ред n . Всяко едно събираемо представлява произведение на n елемента на матрицата взети от всеки ред и стълб точно по един. Можем да считаме, че елементите в дадено събираемо са били взети от редовете 1 до n последователно, следователно то се определя еднозначно от номерата на стълбовете от които са взети елементите съответно от 1-ви до n -ти ред. Това означава, че е напълно достатъчно да преброим всички възможни пренареждания на номерата от 1 до n . Това именно са всички пермутации на числата от 1 до n .

Дефиниция: Пермутации от n елемента са наредени n -орки от тези n елемента, където n е естествено число.

Броя на всички пермутации от n елемента е $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$. Това лесно се вижда, тъй като на първо място имаме n възможности, ако фиксираме елемент на първо място за второто вече имаме $n - 1$ възможности и т.н. Ще означаваме това число още с P_n .

2. Пермутации с повторения.

Дефиниция: Пермутации с повторения са наредени n -орки от k различни елемента всеки от които се повтаря съответно $n_1, n_2, \dots, n_k$ пъти. Тук $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$. Броя на всички такива пермутации ще означаваме с $P(n_1, n_2, \dots, n_k)$.

За да пресметнем последното число, можем да разгледаме броя на всички думи с дължина n , в които има точно k различни букви, първата (например а), от които се повтаря точно n_1 пъти, втората (например б) n_2 пъти и т.н и последната (например я), която се повтаря точно n_k пъти. Очевидно не всички $n!$ на брой пермутации ще променят първоначално фиксирана дума от този тип (например аа...абб...б...яя...я). Ако една пермутация разбърква само първите n_1 букви то тази дума ще се запази. Такава е пермутацията $(2, 1, 3, 4, \dots, n)$, за която ще считаме че просто разменя първите 2 букви на думата. Така лесно се вижда, че има точно $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$ пермутации (разгледани като различните пренареждания на местата на буквите на дума с дължина n) които няма да променят нашата първоначално избрана дума. Ако обаче една пермутация наистина промени думата аа...абб...б...яя...я, то за новата дума ще има отново $n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!$ пермутации които няма да й действат съществено. И така от думата аа...абб...б...яя...я ще получим точно $n! / (n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!)$ на брой различни думи от всички възможни пермутации разгледани като разбъркванията на буквите на думата. И така $P(n_1, n_2, \dots, n_k) = n! / (n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!)$.

Пример: „Салатата” може да бъде разбъркана по $8! / (4! \cdot 2!) = P(4, 2, 1, 1)$, така че да се промени, т.е. има 840 различни думи със същите букви и повторения съответно.

3. Вариации без повторения

Дефиниция: Вариации без повторения от n елемента k -ти клас наричаме наредени k -орки от точно k различни елемента от първоначално фиксирани n . Броят на всички такива вариации ще означаваме с V_n^k .

Последното число се намира по подобен начин на числото P_n . Ако имаме n елемента и искаме да съставим наредена k -орка от тях, то на първо място имаме n възможности, ако изберем една от тях за второ място вече имаме $n-1$ възможности и т. н. получаваме $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = n! / ((n-k)!)$.

Пример: Във футболно първенство участват 18 отбора, следователно има $18 \cdot 17 \cdot 16 = V_{18}^3$ възможни наредени тройки отбори, които да получат съответно златен, сребърен и бронзов медал, т. е. има общо 4896 възможни изхода от първенството.

4. Вариации с повторения

Дефиниция: Вариации с повторения от n елемента k -ти клас наричаме наредени k -орки от не непременно различни елемента от първоначално фиксирани n . Броят на всички такива вариации ще означаваме с $\tilde{V}_n^k$.

Поради факта, че за първо място имаме n възможности, и ако изберем една от тях, на второ място можем да повторим избора си, то за второ място имаме отново n възможности. Така получаваме $\tilde{V}_n^k = n^k$.

Пример: Има точно $27 = 3^3$ трицифрени числа съставени само от единици, двойки и тройки.

5. Комбинации без повторения

Дефиниция: Комбинации без повторения от n елемента k -ти клас наричаме ненаредени k -орки от точно k различни елемента от първоначално фиксирани n . Броят на всички такива комбинации ще означаваме с C_n^k .

Тъй като от всяка една комбинация без повторения от n елемента k -ти клас, можем да получим точно $k!$ вариации, то получаваме равенството $k! \cdot C_n^k = V_n^k$. Следователно $C_n^k = n! / ((n-k)! k!) = C_n^{n-k}$.

Пример: Ако във същото първенство по футбол знаем, че последните 4 отбора няма да участват следващата година, тъй като редът не ни интересува, то ще имаме $3060 = 18! / (14! 4!)$ възможности за 4-те отпадащи отбора.

6. Комбинации с повторения

Дефиниция: Комбинации с повторения от n елемента k -ти клас наричаме ненаредени k -орки от не непременно различни елементи от първоначално фиксирани n . Броят на всички такива комбинации ще означаваме с $\tilde{C}_n^k$.

За да преброим всички такива комбинации нека имаме n различни елемента означени съответно с $a_1, a_2, \dots, a_n$. На всяка комбинация можем еднозначно да съпоставим наредена $n+k-1$ -орка съставена от точно k единици и $n-1$ нули по следния начин: Ако в избраната комбинация не участва нито един път елемента a_1 на първо място ще има 0, в противен случай ще пишем толкова единици, колкото пъти участва a_1 . След

това пишем нула за да отбележим, че вече отброяваме елементите от тип a_2 и написваме толкова единици, колкото пъти участва той в нашата комбинация и т.н. По този начин ще ни трябват точно $n-1$ нули за да отделим бройките за различните типове елементи. Например $00...011...1$ ($n-1$ нули и k единици) означава, че сме повторили k пъти последният елемент. Получаваме, че търсеното число съвпада с броя на пермутациите с повторения от 2 различни елемента, първият от които се повтаря точно $n-1$ пъти, а вторият k пъти. Следователно $\check{C}_n^k = P(n-1, k) = (n+k-1)! / ((n-1)! \cdot k!) = C_{n+k-1}^k$.

Пример: Имате общо $15 = \check{C}_3^4$ възможности, ако искате да си купите точно 4 плода, а на пазара има само портокали, банани и ябълки.

Следствие: **Нютонов бином**

Да разкрием скобите в израза $(x + y)^n$ като знаем, че двете променливи комутират. Ще получим равни събираеми на някои места. Всъщност тук ни интересуват бройките на еднаквите събираеми. Ако при разкриването сме взели k пъти x и $n-k$ пъти y , то ще получим събираемо от вида $x^k y^{n-k}$ което ще се повтаря точно $P(k, n-k) = C_n^k$ пъти. Следователно получаваме:

$$(x + y)^n = x^n + \dots + C_n^k x^k y^{n-k} + \dots + y^n = C_n^n x^n + \dots + C_n^k x^k y^{n-k} + \dots + C_n^0 y^n.$$