Глава 9

Гладки и особени точки

1. Спрегнати линейни изображения

Нека U, V са линейни пространства над поле k с дуални пространства U^*, V^*. Произволно k-линейна изображение $L : U \to V$ индуцира изображение

$$L^* : V^* \longrightarrow U^*,$$

$$L^*(\varphi)(u) = \varphi(L(u)) \quad \text{за} \quad \forall \varphi \in V^*, \quad \forall u \in U.$$

Твърдим, че L^* е k-линейно, т.е. $L^*(\varphi + \psi) = L^*(\varphi) + L^*(\psi)$ и $L^*(\lambda\varphi) = \lambda L^*(\varphi)$ за $\forall \varphi, \psi \in V^*$, $\forall \lambda \in k$. Наистина, за $\forall u \in U$ е в сила

$$L^*(\varphi + \psi)(u) = (\varphi + \psi)(L(u)) = \varphi(L(u)) + \psi(L(u)) =$$
$$= L^*(\varphi)(u) + L^*(\psi)(u) = (L^*(\varphi) + L^*(\psi))(u)$$

и

$$L^*(\lambda\varphi)(u) = (\lambda\varphi)(L(u)) = \lambda[\varphi(L(u))] = \lambda[L^*(\varphi)(u)] = [\lambda L^*(\varphi)](u).$$

Линейното изображение $L^* : V^* \to U^*$ се нарича спрегнато на $L : U \to V$.

Лема 9.1. *(i) Ако U е крайномерно линейно пространство над поле k, то съществува k-линеен изоморфизъм $i_U : U \to (U^*)^*$.*
(ii) Всяка k-линейно изображение $L : U \to V$ на крайномерни пространства U и V участва в комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "L"] \arrow[d, "i_U"] & V \arrow[d, "i_V"] \\ (U^*)^* \arrow[r, "(L^*)^*"] & (V^*)^* \end{tikzcd}$$

с k-линейните изоморфизми $i_U : U \to (U^*)^*$ и $i_V : V \to (V^*)^*$ от (i).
Оттук, $\ker L = 0$ *точно когато* $\ker (L^*)^* = 0$ *и* $\mathrm{im} L = V$ *тогава и само тогава, когато* $\mathrm{im}(L^*)^* = (V^*)^*$.

Доказателство: (i) Определяме

$$i_U : U \longrightarrow (U^*)^*,$$

$$i_U(x)(\varphi) := \varphi(x) \quad \text{за} \quad \forall x \in U, \quad \forall \varphi \in U^*.$$

Проверяваме, че i_U е k-линейно. По-точно, $i_U(x+y) = i_U(x) + i_U(y)$ и $i_U(\lambda x) = \lambda i_U(x)$ за $\forall x, y \in U$, $\forall \lambda \in k$, съгласно

$$i_U(x+y)(\varphi) = \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) = i_U(x)(\varphi) + i_U(y)(\varphi) = (i_U(x) + i_U(y))(\varphi)$$

и

$$i_U(\lambda x)(\varphi) = \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = \lambda[i_U(x)(\varphi)] = [\lambda i_U(x)](\varphi)$$

за $\forall \varphi \in U^*$.

Линейното изображение i_U е влагане, защото ако $x \in \ker(i_U)$, то за произволен k-линеен функционал $\varphi : U \to k$ е изпълнено $i_U(x)(\varphi) = \varphi(x) = 0$. Допускането $x \neq 0_U \in U$ дава възможност за допълване на линейно независимия вектор

x до базис $x_1 = x, x_2, \dots, x_n$ на U. Ако $x_1^*, \dots, x_n^* \in U^*$ е дуалният базис на $x_1, \dots, x_n \in U$, то $i_U(x)(x_1^*) = x_1^*(x) = x_1^*(x_1) = 1$, противно на $i_U(x)(\varphi) = 0$ за $\forall \varphi \in U^*$. Противоречието доказва, че $x = 0_U \in U$ и $\ker(i_U) = \{0_U\}$. По този начин, $i_U : U \to \mathrm{im}(i_U)$ е k-линеен изоморфизъм с образа си $\mathrm{im}(i_U) = \{i_U(x) \ \mid \ x \in U\}$.
По теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение на крайномерно пространство, $\dim \mathrm{im}(i_U) = \dim(U)$, защото $\dim \ker(i_U) = 0$. Но $\dim(U) = \dim(U^*) = \dim(U^*)^*$, защото за произволен k-базис $x_1, \dots, x_n$ на U линейните функционали $x_i^* : U \to k$ с

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за } i = j, \\ 0 & \text{за } i \neq j \end{cases}$$

образуват k-базис на U^*. Следователно $\dim(\mathrm{im}(i_U)) = \dim(U^*)^*$ и подпространството $\mathrm{im}(i_U)$ на $(U^*)^*$ съвпада с цялото пространство. Това доказва, че $i_U : U \to (U^*)^*$ е k-линеен изоморфизъм на U с $(U^*)^*$.
(ii) За произволен вектор $u \in U$ твърдим, че $i_V L(u) = (L^*)^* i_U(u)$. Наистина, за $\forall \varphi \in V^*$ е изпълнено

$$(L^*)^* i_U(u)(\varphi) = i_U(u)(L^*(\varphi)) = L^*(\varphi)(u) = \varphi(L(u)) = i_V(L(u))(\varphi).$$

Твърдим, че $i_U \ker(L) = \ker(L^*)^*$. Наистина, за $\forall u \in \ker(L)$ имаме $(L^*)^* i_U(u) = i_V L(u) = i_V(0) = \mathbb{O}$, така че $i_U(u) \in \ker(L^*)^*$ и $i_U \ker(L) \subseteq \ker(L^*)^*$. За включването $\ker(L^*)^* \subseteq i_U \ker(L)$ да отбележим, че за $\forall i_U(u) \in \ker(L^*)^*$ е в сила $0 = (L^*)^* i_U(u) = i_V L(u)$. Понеже i_V е k-линеен изоморфизъм, оттук получаваме, че $L(u) = 0$ и $u \in \ker(L)$. В резултат, $i_U(u) \in i_U \ker(L)$ и $\ker(L^*)^* \subseteq i_U \ker(L)$. От равенството $i_U \ker(L) = \ker(L^*)^*$ следва, че $\ker(L) = 0$ точно когато $\ker(L^*)^*$, защото i_U е k-линеен изоморфизъм.
Ще докажем, че $i_V \mathrm{im}(L) = \mathrm{im}(L^*)^*$. Наистина, за $\forall i_V L(u) \in i_V \mathrm{im}(L)$ с $u \in U$ имаме $i_V L(u) = (L^*)^* i_U(u) \in \mathrm{im}(L^*)^*$, така че $i_V \mathrm{im}(L) \subseteq \mathrm{im}(L^*)^*$. За обратното включване $\mathrm{im}(L^*)^* \subseteq i_V \mathrm{im}(L)$ да изберем $v \in V$ с $i_V(v) = (L^*)^* i_U(u)$ за някое $u \in U$. Тогава $i_V(v) = i_V L(u)$ и $v = L(u)$, съгласно взаимната еднозначност на k-линейния изоморфизъм i_V. С това установихме, че $\mathrm{im}(L^*)^* \subseteq i_V \mathrm{im}(L)$ и $i_V \mathrm{im}(L) = \mathrm{im}(L^*)^*$. По този начин, $\mathrm{im}(L) = V$ тогава и само тогава, когато $\mathrm{im}(L^*)^* = (V^*)^*$, защото $i_V : V \to (V^*)^*$ е k-линеен изоморфизъм, Q.E.D.

Лема 9.2. *Нека $L : U \to V$ е k-линейно изображение на крайномерни пространства, а $L^* : V^* \to U^*$ е спрегнатото линейно изображение на L. Тогава*

$$U^* = (\ker(L)^* \oplus \mathrm{im}(L^*).$$

Оттук, ко-ядрото

$$\mathrm{co}\ker(L^*) := U^*/\mathrm{im}(L^*) \simeq (\ker(L))^*$$

на L^* е изоморфно на дуалното пространство на ядрото на L.
В частност, $\ker(L) = \{0\}$ тогава и само тогава, когато $\mathrm{im}(L^*) = U^*$ и $\mathrm{im}(L) = V$ тогава и само тогава, когато $\ker(L^*) = \{0\}$.

Доказателство: Нека $\dim(U) = n$, $\dim(V) = m$, $\dim(\ker(L)) = s$. Избираме базис $e_{n-s+1}, \dots, e_n$ на $\ker(L)$. Допълваме до базис $e_1, \dots, e_{n-s}, e_{n-s+1}, \dots, e_n$ на U. По Теоремата за ранга и дефекта на линейно изображение на крайномерни пространства, векторите $f_1 = L(e_1), \dots, f_{n-s} = L(e_{n-s}) \in V$ образуват базис на образа $\mathrm{im}(L)$ на L. Допълваме до базис $f_1, \dots, f_{n-s}, f_{n-s+1}, \dots, f_m$ на V. Разглеждаме дуалния базис $e_1^*, \dots, e_n^* \in U^*$ на $e_1, \dots, e_n \in U$ и дуалния базис $f_1^*, \dots, f_m^* \in V^*$ на $f_1, \dots, f_m \in V$. Твърдим, че спрегнатото линейно изображение $L^* : V^* \to U^*$ изпълнява равенствата $L^*(f_i^*) = e_i^*$ за $1 \leq i \leq n - s$ и

$L^*(f_i^*) = \mathbb{O} \in U^*$ за $n-s+1 \leq i \leq m$. Наистина, за $1 \leq i \leq n-s$ стойността на $L^*(f_i^*)$ в произволен вектор $u = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i e_i \in U$ е

$$L^*(f_i^*)(u) = f_i^* \left(L \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) \right) = f_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} x_j L(e_j) \right) = f_i^* \left(\sum_{j=1}^{n-s} x_j f_j \right) = x_i =$$

$$= e_i^* \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) = e_i^*(u).$$

В случая $n-s+1 \leq i \leq m$ имаме

$$L^*(f_i^*)(u) = f_i^* \left(L \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) \right) = f_i^* \left(\sum_{j=1}^{n-s} x_j f_j \right) = 0 = \mathbb{O}(u) \quad \text{за} \quad \forall u \in U.$$

В резултат,

$$\mathrm{im}(L^*) = l_k(e_1^*, \ldots, e_{n-s}^*)$$

и

$$(\ker(L))^* = l_k(e_{n-s+1}, \ldots, e_n)^* = l_k(e_{n-s+1}^*, \ldots, e_n^*),$$

така че

$$U^* = l_k(e_1^*, \ldots, e_{n-s}^*, e_{n-s+1}^*, \ldots, e_n^*) =$$
$$= l_k(e_1^*, \ldots, e_{n-s}^*) \oplus l_k(e_{n-s+1}, \ldots, e_n^*) = \mathrm{im}(L^*) \oplus (\ker(L))^*.$$

По определение, ко-ядрото на L^* е $\mathrm{co}\ker(L^*) = U^*/\mathrm{im}(L^*)$. От разлагането в директна сума $U^* = \mathrm{im}(L^*) \oplus (\ker(L))^*$ получаваме, че $\mathrm{co}\ker(L^*) \simeq (\ker(L))^*$. По този начин, $\ker(L) = 0$ тогава и само тогава, когато $\mathrm{im}(L^*) = U^*$. Прилагайки този факт към спрегнатото линейно изображение $L^* : V^* \to U^*$ на $L : U \to V$ стигаме до извода, че $\ker(L^*) = 0$ точно когато $\mathrm{im}((L^*)^*) = (V^*)^*$. Съгласно Лема 9.1 (ii), $\mathrm{im}((L^*)^*) = (V^*)^*$ тогава и само тогава, когато $\mathrm{im}(L) = V$, Q.E.D.

2. Координатно описание на допирателното пространство на Зариски чрез пораждащи на идеала на многообразието

Лема 9.3. *Нека $p = (p_1, \ldots, p_n) \in k^n$ е точка от n-мерното афинно пространство k^n над алгебрично затворено поле k, а $\mathcal{O}_p(k^n)$ е локалният пръстен на p в k^n с максимален идал $\mathfrak{M}_p(k^n)$. Тогава*

$$x_1 - p_1 + \mathfrak{M}_p(k^n)^2, \ldots, x_n - p_n + \mathfrak{M}_p(k^n)^2$$

е k-базис на линейното пространство $\mathfrak{M}_p(k^n)/\mathfrak{M}_p(k^n)^2$.

Доказателство: Максималният идеал $\mathfrak{M}_p \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ на точката p в афинния координатен пръстен $k[k^n] = k[x_1, \ldots, x_n]$ на k^n се поражда от полиномите $x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n$. Съгласно Лема 8.3, максималният идеал

$$\mathfrak{M}_p(k^n) = \langle x_1 - p_1, \ldots, x_n - p_n \rangle_{\mathcal{O}_p(k^n)}$$

на p в локалния пръстен $\mathcal{O}_p(X)$ се поражда от същите полиноми. По Следствие 8.12, оттук следва, че k-линейното пространство

$$\mathfrak{M}_p(k^n)/\mathfrak{M}_p(k^n)^2 = l_k(x_1 - p_1 + \mathfrak{M}_p(k^n)^2, \ldots, x_n - p_n + \mathfrak{M}_p(k^n)^2)$$

се поражда от своите елементи $x_1 - p_1 + \mathfrak{M}_p(k^n)^2, \ldots, x_n - p_n + \mathfrak{M}_p(k^n)^2$. Трябва да докажем k-линейната независимост на тези съседни класове. Ако

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - p_i + \mathfrak{M}_p(k^n)^2) = \mathfrak{M}_p(k^n)^2$$

за някакви $\lambda_i \in k$, то $f(x_1, \dots, x_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - p_i) \in \mathfrak{M}_p(k^n)^2$. Правим линейна смяна на променливите $y_i = x_i - p_i$ за $1 \leq i \leq n$, така че точката p да се трансформира в началото $\check{o} = (0, \dots, 0) \in k^n$. Тогава полиномът

$$g(y_1, \dots, y_n) = f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \in \mathfrak{M}_{\check{o}}(k^n)^2.$$

От $\mathfrak{M}_{\check{o}}(k^n) = \langle y_1, \dots, y_n \rangle_{\mathcal{O}_{\check{o}}(k^n)}$ следва, че идеалът

$$\mathfrak{M}_{\check{o}}(k^n)^2 = \langle y_i y_j \ \mid \ 1 \leq i \leq j \leq n \rangle_{\mathcal{O}_{\check{o}}(k^n)}$$

се поражда от мономите $y_i y_j$ с $1 \leq i \leq j \leq n$. Локалният пръстен

$$\mathcal{O}_{\check{o}}(k^n) = \left\{ \frac{h(y_1, \dots, y_n)}{t(y_1, \dots, y_n)} \ \middle| \ h, t \in k[y_1, \dots, y_n], \quad t(\check{o}) \neq 0 \right\} \subset k(y_1, \dots, y_n)$$

се състои от частни на полиноми, така че

$$g(y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} y_i y_j \frac{h_{ij}(y_1, \dots, y_n)}{t_{ij}(y_1, \dots, y_n)} \tag{9.1}$$

за подходящи $h_{ij}, t_{ij} \in k[y_1, \dots, y_n]$ с $t_{ij}(\check{o}) \neq 0$. Полиномът

$$t(y_1, \dots, y_n) = \prod_{1 \leq i \leq j \leq n} t_{ij}(y_1, \dots, y_n) \in k[y_1, \dots, y_n]$$

има стойност $t(\check{o}) \neq 0$. Привеждайки дясната страна на (9.1) към общ знаменател $t(y_1, \dots, y_n)$, получаваме

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i = \frac{\sum\limits_{1 \leq i \leq j \leq n} y_i y_j f_{ij}(y_1, \dots, y_n)}{t(y_1, \dots, y_n)}$$

за подходящи полиноми $f_{ij} \in k[y_1, \dots, y_n]$. Оттук

$$t(y_1, \dots, y_n) \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \right) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} y_i y_j f_{ij}(y_1, \dots, y_n).$$

Сравняването на хомогенните компоненти от степен 1 на двете страни дава

$$t(\check{o}) \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \right) \equiv 0 \in k[y_1, \dots, y_n].$$

Съгласно $t(\check{o}) \neq 0$, оттук следва $\lambda_i = 0$ за $\forall 1 \leq i \leq n$. Това доказва, че

$$x_1 - p_1 + \mathfrak{M}_p(k^n)^2, \dots, x_n - p_n + \mathfrak{M}_p(k^n)^2$$

са линейно независими над k, а оттам и базис на $\mathfrak{M}_p(k^n)/\mathfrak{M}_p(k^n)^2$, Q.E.D.

Определение 9.4. *Нека k е алгебрично затворено поле, $p = (p_1, \dots, p_n)$ е точка от афинното пространство k^n. Дуалният базис на*

$$x_i - p_i + \mathfrak{M}_p(k^n)^2 \in \mathfrak{M}_p(k^n)/\mathfrak{M}_p(k^n)^2, \quad 1 \leq i \leq n$$

ще означаваме с $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$, $1 \leq i \leq n$. По-точно, $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ са k-диференциранията

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \mathfrak{M}_p(k^n)/\mathfrak{M}_p(k^n)^2 \longrightarrow k,$$

които са еднозначно определени от действието си

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (x_j - p_j + \mathfrak{M}_p(k^n)^2) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за } i = j, \\ 0 & \text{за } i \neq j \end{cases}$$

върху k-базиса $x_j - p_j + \mathfrak{M}_p(k^n)^2$, $1 \leq j \leq n$ на $\mathfrak{M}_p(k^n)/\mathfrak{M}_p(k^n)^2$.

Сега ще определим формалните частни производни $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in k[x_1, \ldots, x_n]$ на полином $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ и ще докажем, че стойностите на k-диференциранията $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \mathcal{O}_p(X) \to k$ върху $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ съвпадат със стойностите на формалните частни производни $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ в p, т.е. $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$.

Определение 9.5. *Ако*

$$f = \sum_{j=0}^{d} c_j(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n) x_i^j \in k[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n][x_i] = k[x_1, \ldots, x_n]$$

е полином на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от поле k, то формалната частна производна

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} := \sum_{j=1}^{d} j c_j(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) x_i^{j-1} \in k[x_1, \ldots, x_n].$$

Лема 9.6. *Формалните частни производни*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : k[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow k[x_1, \ldots, x_n]$$

са k-диференцирания за $\forall 1 \leq i \leq n$.

Доказателство: Непосредствено се проверява, че $\frac{\partial}{\partial x_i}$ са k-линейни изображения, които се анулират върху постоянните полиноми. По-точно,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{i=0}^{d} c_j x_i^j + \sum_{s=0}^{\delta} \zeta_s x_i^s\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{i=0}^{\max(\mathrm{d},\delta)} (c_j + \zeta_j) x_i^j\right) = \sum_{j=1}^{\max(\mathrm{d},\delta)} j(c_j + \zeta_j) x_i^{j-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{d} j c_j x_i^{j-1} + \sum_{s=1}^{\delta} s \zeta_s x_i^{s-1} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=0}^{d} c_j x_i^j\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{s=0}^{\delta} \zeta_s x_i^s\right)$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\lambda\left(\sum_{j=0}^{d} c_j x_i^j\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=0}^{d} (\lambda c_j) x_i^j\right) = \sum_{j=1}^{d} j(\lambda c_j) x_i^{j-1} =$$

$$= \lambda\left(\sum_{j=1}^{d} j c_j x_i^{j-1}\right) = \lambda \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=0}^{d} c_j x_i^j\right)$$

за $\forall c_j, \zeta_s \in k[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$, $\forall \lambda \in k$. Остава да проверим, че

$$\frac{\partial (fg)}{\partial x_i} = f \frac{\partial g}{\partial x_i} + g \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \text{за} \quad \forall f, g \in k[x_1, \ldots, x_n].$$

За целта представяме

$$f = \sum_{j=0}^{d} c_j x_i^j \quad \text{и} \quad g = \sum_{s=0}^{\delta} \zeta_s x_i^s$$

като полиноми на x_i с коефициенти $c_j, \zeta_s \in k[x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n]$. Тогава

$$f \frac{\partial g}{\partial x_i} + g \frac{\partial f}{\partial x_i} = \left(\sum_{j=0}^{d} c_j x_i^j\right)\left(\sum_{s=1}^{\delta} s \zeta_s x_i^{s-1}\right) + \left(\sum_{s=0}^{\delta} \zeta_s x_i^s\right)\left(\sum_{j=1}^{d} j c_j x_i^{j-1}\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{d} c_j x_i^j\right)\left(\sum_{s=0}^{\delta-1}(s+1)\zeta_{s+1}x_i^s\right) + \left(\sum_{s=0}^{\delta}\zeta_s x_i^s\right)\left(\sum_{j=0}^{d-1}(j+1)c_{j+1}x_i^j\right) =$$

$$= \sum_{j=0}^{d+\delta-1}\left(\sum_{p=0}^{j}(j+1-p)c_p\zeta_{j+1-p} + (p+1)c_{p+1}\zeta_{j-p}\right)x_i^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{d+\delta-1}\left(\sum_{p=0}^{j}(j+1-p)c_p\zeta_{j+1-p} + \sum_{p=1}^{j+1}pc_p\zeta_{j-p+1}\right)x_i^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{d+\delta-1}\left[(j+1)c_0\zeta_{j+1} + \sum_{p=1}^{j}(j+1)c_p\zeta_{j+1-p} + (j+1)c_{j+1}\zeta_0\right]x_i^j =$$

$$= \sum_{j=0}^{d+\delta-1}(j+1)\left(\sum_{p=0}^{j+1}c_p\zeta_{j+1-p}\right)x_i^j = \sum_{j=1}^{d+\delta} j\left(\sum_{p=0}^{j}c_p\zeta_{j-p}\right)x_i^{j-1} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=0}^{d+\delta}\left(\sum_{p=0}^{j}c_p\zeta_{j-p}\right)x_i^j\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left(\sum_{j=0}^{d}c_j x_i^j\right)\left(\sum_{s=0}^{\delta}\zeta_s x_s^i\right)\right) = \frac{\partial(fg)}{\partial x_i}.$$

Това завършва доказателството на лемата, Q.E.D.

Формалните частни производни $\frac{\partial}{\partial x_i} : k[x_1, \dots, x_n] \to k[x_1, \dots, x_n]$ имат еднозначно определени продължения $\frac{\partial}{\partial x_i} : k(x_1, \dots, x_n) \to k(x_1, \dots, x_n)$ върху чисто трансцендентното разширение $k(x_1, \dots, x_n)$ на k с $x_1, \dots, x_n$. Те се определят от равенствата $f = \left(\frac{f}{g}\right) g$ за полиноми $f, g \in k[x_1, \dots, x_n]$. По-точно, от

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f}{g}\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i}$$

извеждаме, че

$$\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i} = \frac{g\frac{\partial f}{\partial x_i} - f\frac{\partial g}{\partial x_i}}{g^2}.$$

Лема 9.7. *За произволна точка $p \in k^n$, произволен полином $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ и произволен индекс $1 \le i \le n$, стойността*

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p (f) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

на k-диференцирането $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : \mathcal{O}_p(k^n) \to k$ в $f \in k[x_1, \dots, x_n] \subset \mathcal{O}_p(k^n)$ съвпада със стойността на формалната частна производна $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$ на f в p.

Доказателство: Извършваме линейна смяна на променливите $y_j = x_j - p_j$ за $\forall 1 \le j \le n$, така че да трансформираме точката $p = (p_1, \dots, p_n)$ в началото $\check{o} = (0, \dots, 0) \in k^n$. Ако полиномът

$$f = \sum_{j=0}^{d} c_j(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) y_i^j$$

се представи като полином на y_i с коефициенти $c_j(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) \in k[y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n]$, то съгласно

$$\mathfrak{M}_{\check{o}}(k^n)^2 = \langle y_r y_s \mid 1 \le r \le s \le n\rangle_{\mathcal{O}_p(k^n)}$$

имаме

$$f + \mathfrak{M}_{\check{o}}(k^n)^2 = c_0 + c_1 y_i.$$

Непосредствено се вижда, че

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\check{o}} \left(\sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^{n-1}} \zeta_\alpha y_1^{\alpha_1} \dots y_{i-1}^{\alpha_{i-1}} y_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \dots y_n^{\alpha_n} \right) = 0$$

за $\forall \zeta_\alpha \in k$, така че

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\check{o}} (f) = \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\check{o}} (f + \mathfrak{M}_{\check{o}}(k^n)^2) = c_1(\check{o}')$$

за $\check{o}' = (0, \dots, 0) \in k^{n-1}$. От друга страна, формалната частна производна $\frac{\partial f}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{d} c_j y_i^{j-1}$ има стойност $\frac{\partial f}{\partial y_i}(\check{o}) = c_1(\check{o}')$, така че $\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\check{o}}(f) = c_1(\check{o}') = \frac{\partial f}{\partial y_i}(\check{o})$ за всички полиноми $f \in k[x_1, \dots, x_n]$, Q.E.D.

Твърдение 9.8. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е афинно многообразие с идеал $I(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle_{k[x_1,\dots,x_n]} \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$, а $p \in X$ е точка. Тогава допирателното пространство на Зариски $T_p X$ към X в p се влага в допирателното пространство на Зариски*

$$T_p k^n = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \ \middle| \ a_i \in k \right\} \simeq k^n$$

към k^n в p и

$$T_p X = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \ \middle| \ \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_p = 0 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq m \right\}$$

е подпространството на онези допирателни вектори към k^n в p, по протежение на които пораждащите $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ на $I(X) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ са постоянни.

Ако

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

е Якобиевата матрица на $f_1, \dots, f_m$ относно $x_1, \dots, x_n$ в $p \in X$ и положим $a = (a_1, \dots, a_n)^t \in M_{n \times 1}(k)$, то $\sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p X$ точно когато a е решение на хомогенната линейна система уравнения с матрица $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(p)$.

Доказателство: От $p \in X \subseteq k^n$ следва обратното включване на полиномиалните идеали

$$I(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle_{k[x_1,\dots,x_n]} \subseteq \mathfrak{M}_p = \langle x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n \rangle_{k[x_1,\dots,x_n]} \triangleleft k[x_1, \dots, x_n].$$

Съгласно Лема 8.3, идеалът

$$I(X)_{\mathfrak{M}_p} = (k[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathfrak{M}_p)^{-1} I(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle_{\mathcal{O}_p(k^n)}$$

на X в локалния пръстен $\mathcal{O}_p(k^n)$ на p в k^n се поражда от $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$, а максималният идеал

$$\mathfrak{M}_p(k^n) = \langle x_1 - p_1, \dots, x_n - p_n \rangle_{\mathcal{O}_p(k^n)}$$

се поражда от линейните полиноми $x_i - p_o \in k[x_1, \dots, x_n]$. Афинният координатен пръстен $k[X] = k[x_1, \dots, x_n]/I(X)$ на X е фактор-пръстенът на $k[k^n] = k[x_1, \dots, x_n]$ по идеала $I(X) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$. Да разгледаме епиморфизма на пръстени

$$\pi_1 : k[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow k[X]$$

с ядро $\ker(\pi_1) = I(X)$. Той се продължава до епиморфизъм

$$\pi_2 : \mathcal{O}_p(k^n) = k[x_1, \dots, x_n]_{\mathfrak{M}_p} \longrightarrow k[X]_{I_X(p)} = \mathcal{O}_p(X)$$

на съответните локални пръстени с ядро

$$\ker(\pi_2) = I(X)_{\mathfrak{M}_p} = (k[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathfrak{M}_p)^{-1} I(X).$$

Ограничението

$$\pi_3 : \mathfrak{M}_p(k^n) = (k[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathfrak{M}_p)^{-1} \mathfrak{M}_p \longrightarrow (k[X] \setminus I_X(p))^{-1} I_X(p) = \mathfrak{M}_p(X)$$

на π_2 върху съответните максимални идеали е сюрективно k-линейно изображение с ядро $\ker(\pi_3) = \ker(\pi_2) = I(X)_{\mathfrak{M}_p} = (k[x_1, \dots, x_n] \setminus \mathfrak{M}_p)^{-1} I(X)$, защото $\ker(\pi_2) \subseteq \mathfrak{M}_p(k^n)$. То индуцира сюрективно k-линейно изображение

$$\pi_4 : \mathfrak{M}_p(k^n)/\mathfrak{M}_p(k^n)^2 \longrightarrow \mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$$

на съответните ко-допирателни пространства в точка p с ядро

$$\ker(\pi_4) = I(X)_{\mathfrak{M}_p} + \mathfrak{M}_p(k^n)^2/\mathfrak{M}_p(k^n)^2 = \langle f_1, \dots, f_m \rangle_{\mathcal{O}_p(k^n)} + \mathfrak{M}_p(k^n)^2/\mathfrak{M}_p(k^n)^2.$$

Съгласно Лема 9.2, спрегнатото k-линейно изображение

$$\pi_4^* : T_pX = (\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2)^* \longrightarrow \left(\mathfrak{M}_p(k^n)/\mathfrak{M}_p(k^n)^2\right)^* = T_pk^n$$

е влагане. Това ни дава възможност да отъждествяваме k-диференциранията $D : \mathcal{O}_p(X) \to k$ с k-диференциранията $\pi_4^* D = D\pi_2 : \mathcal{O}_p(k^n) \to k$, по протежение на комутативните диаграми

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_p(k^n) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[dr, "\pi_4^* D"'] & \mathcal{O}_p(X) \arrow[d, "D"] \\ & k \end{tikzcd} .$$

Тогава ко-ядрото на π_4^* е

$$\begin{aligned} T_pk^n/T_pX = \operatorname{co}\ker(\pi_4^*) \simeq (\ker(\pi_4))^* = \left(I(X)_{\mathfrak{M}_p} + \mathfrak{M}_p(k^n)^2/\mathfrak{M}_p(k^n)^2\right)^* = \\ = \left(\langle f_1, \dots, f_m \rangle_{\mathcal{O}_p(k^n)} + \mathfrak{M}_p(k^n)^2/\mathfrak{M}_p(k^n)^2\right)^*. \end{aligned} \tag{9.2}$$

Разглеждаме k-линейната проекция

$$\pi : T_pk^n \longrightarrow T_pk^n/T_pX.$$

Допирателният вектор $v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_pk^n$ е в ядрото $\ker(\pi) = T_pX$ точно когато $v + T_pX = T_pX$ и линейният функционал

$$v \equiv \mathbb{O} : I(X)_{\mathfrak{M}_p} + \mathfrak{M}_p(k^n)^2/\mathfrak{M}_p(k^n)^2 \longrightarrow k$$

е тъждествено нулевият. Произволен елемент на

$$I(X)_{\mathfrak{M}_p} = \langle f_1, \dots, f_m \rangle_{\mathcal{O}_p(k^n)} \subset \mathfrak{M}_p(k^n)$$

е от вида $f = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i g_i$ за някакви $g_i \in \mathcal{O}_p(X)$. Вземайки предвид, че разликите $g_i - g_i(p) \in \mathfrak{M}_p(X)$ получаваме, че

$$f + \mathfrak{M}_p(k^n)^2 = \sum_{i=1}^{m} g_i(p) f_i + \mathfrak{M}_p(k^n)^2 = \sum_{i=1}^{m} g_i(p)(f_i + \mathfrak{M}_p(k^n)^2).$$

По този начин, условието

$$0 = \mathbb{O}(f + \mathfrak{M}_p(k^n)^2) = v(f + \mathfrak{M}_p(k^n)^2) = \sum_{i=1}^{m} g_i(p) v(f_i + \mathfrak{M}_p(k^n)^2) = \sum_{i=1}^{m} g_i(p) v(f_i)$$

за всички $g_i(p) \in k$ е енвивалентно на $v(f_1) = \ldots = v(f_m) = 0$ и

$$T_pX = \left\{ v = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \quad \Big| \quad v(f_i) = \sum_{j=1}^{n} a_j \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_p = 0 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq m \right\},$$

Q.E.D.

Задача 9.9. *Нека $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ е полином от нечетна степен, а*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \ \mid \ y^2 = f(x)\}.$$

Да се докаже, че:
(i) ако $p_1 \in \mathbb{C}$ не е кратен корен на $f(x)$, то допирателното пространство на Зариски T_pX към X в $p = (p_1, p_2) \in X$ е с размерност 1;
(ii) ако $p_1 \in \mathbb{C}$ е кратен корен на $f(x)$, то $T_{(p_1,p_2)}X \simeq \mathbb{C}^2$.

Задача 9.10. *Нека $X = V(f, g) \subset \mathbb{C}^3$ е афинното многообразие, зададено с полиномите*

$$f = x_1^2 + 2x_2x_3 - x_1x_3 \quad \text{и} \quad g = x_1^3 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3 + 1 \in \mathbb{C}[x_1, x_2, x_3].$$

Да се докаже, че $\dim(X) = 1$ и във всяка точка $p \in X$ допирателното пространство на Зариски $T_pX \simeq \mathbb{C}$ към X в p е 1-мерно.

Упътване: Използвайки пораждащите $f, f + g$ на $I(X)$ проверете, че X не пресича координатните равнини $V(x_1)$, $V(x_3)$ и опишете допирателните пространства на Зариски.

3. Гладки и особени точки

Съгласно Твърдение 9.8, допирателното пространство на Зариски T_pX към афинно многообразие $X \subseteq k^n$ над алгебрично затворено поле k в точка $p \in X$ може да се отъждестви с пространството от решения на хомогенната линейна система с матрица но коефициентите $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(p)$, за произволна пораждаща система от полиноми $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ на идеала $I(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle_{k[x_1,\ldots,x_n]}$. Съществува неотрицателно цяло число r, така че Якобиевата матрица $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ на формалните частни производни на $f_1, \ldots, f_m$ относно $x_1, \ldots, x_n$ има минор от r-ти ред извън $I(X)$ и всички минори на $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ от ред $r + 1$ принадлежат на идеала $I(X)$ на X. Следователно, в обща точка $p \in X$, рангът на Якобиевата матрица е $\mathrm{rk}\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(p) = r$ и $\dim_k T_pX = n - r$. В произволна точка $p \in X$ имаме $\mathrm{rk}\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(p) \leq r$ и $\dim_k T_pX \geq n - r$.

Определение 9.11. *Точката p на афинното многообразие $X \subseteq k^n$ е гладка, ако допирателното пространство на Зариски T_pX към X в p има минимална размерност $\dim_k T_pX = n - r$. В противен случай, точката p се нарича особена.*
Множеството на гладките точки се означава с X^{smooth}, а множеството на особените точки - с X^{sing}.

Лема 9.12. *Множеството X^{sing} на особените точки на афинно многообразие $X \subseteq k^n$ над алгебрично затворено поле k е собствено, Зариски затворено подмножество на X.*

Доказателство: Нека $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ са пораждащи на идеала $I(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle_{k[x_1,\ldots,x_n]}$ на X. За произволни мулти-индекси $i = (i_1, \ldots, i_k)$ с $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m$ и $j = (j_1, \ldots, j_k)$ с $1 \leq j_1 < \ldots < j_k \leq n$ означаваме с $\Delta_{i,j}$ минорът на $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ от ред k, който е равен на детерминантата на матрицата, образувана при пресичане на редовете на $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$ с номера $i_1,\dots,i_k$ и стълбовете с номера $j_1,\dots,j_k$. Ако съществува минор $\Delta_{i,j}\not\in I(X)$ от ред $r\in\mathbb{Z}^{\geq 0}$ и всички минори на $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$ от ред $r+1$ принадлежат на $I(X)$, то множеството на особените точки

$$X^{\rm sing}=X\cap V(\Delta_{i,j}\ \mid\ \forall 1\leq i_1<\ldots<i_r\leq m,\ \ \forall 1\leq j_1<\ldots<j_r\leq n)$$

е сечението на X с нулите на всички минори на $\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}$ от ред r. Следователно $X^{\rm sing}$ е Зариски затворено подмножество на X.
При това, $X^{\rm sing}\subsetneq X$ точно когато допълнението $X^{\rm smooth}=X\setminus X^{\rm sing}\neq\emptyset$ е непразно. Но ако съществува минор $\Delta_{i,j}\not\in I(X)$ от ред r, то съществува точка $p\in X$ с $\Delta_{i,j}(p)\neq 0$, така че $p\in X^{\rm smooth}$ и $X^{\rm smooth}\neq\emptyset$, Q.E.D.
За да докажем, че размерността на допирателното пространство на Зариски в обща точка е равна на размерността на афинното многоборазие, ще използваме, че всяко квази-афинно или квази-проективно многообразие е бирационално на хиперповърхнина. Бирационалните изображения са бирегулярни в обща точка и индуцират изоморфизми на съответните локални пръстени, а оттам и k-линейни изоморфизми на допирателните пространства на Зариски.

Определение 9.13. *Полиномът $f(x)\in k[x]\setminus k$ се нарича сепарабелен, ако няма кратни корени.*
Елементът $a\in F$ е сепарабелен над k, ако минималният му полином над K е сепарабелен.
Алгебрично разширение $F\supset k$ е сепарабелно над k, ако всеки елемент на F е сепарабелен над k.

Алгебричен над k елемент $\alpha\in F$ е несепарабелен над k точно когато минималният полином $f(x)\in k[x]\setminus k$ на α над k има тъждествено нулева формална производна. По-точно, $f(x)$ има кратен корен тогава и само тогава, когато има общ корен с формалната си производна $f'(x)\in k[x]$ или най-големият общ делител $d(x)=(f(x),f'(x))\not\equiv x\in k^*$. Съгласно неразложимостта на $f(x)$ над k, имаме $d(x)=x_of(x)$ за някое $x_o\in k^*$ и $f(x)$ дели $f'(x)$. Понеже $\deg(f'(x))<\deg(f(x))$, оттук следва $f'(x)\equiv 0$ или

$$f(x)=\sum_s a_{ps}x^{ps}=\left(\sum_s\sqrt[p]{a_{ps}}x^s\right)^p\in k(\sqrt[p]{a_{ps}}|s)[x]$$

за краен брой естествени s и простото число $p=char(k)$. В частност, ако k е поле с характеристика $char(k)=0$, то всеки алгебричен над k елемент $\alpha\in F$ е сепарабелен над k.
Съществуват несепарабелни алгебрични разширения. Например, нека $F=\mathbb{F}_p(x)$ е полето на рационалните функции на трансцендентна над $\mathbb{F}_p$ променлива x. Множеството

$$F^p=\left\{\frac{f^p(x)}{g^p(x)}\ \Big|\ f(x),g(x),\in\mathbb{F}_p[x],\ \ g(x)\not\equiv 0\right\},$$

на p-тите степени на елементите на F е подполе на F. По-точно, за произволни

$$\frac{f_1(x)^p}{g_1(x)^p},\frac{f_2(x)^p}{g_2(x)^p}\in F^p$$

с нетъждествено нулеви $g_1(x),f_2(x),g_2(x)\in\mathbb{F}_p[x]$ е изпълнено

$$\frac{f_1(x)^p}{g_1(x)^p}-\frac{f_2(x)^p}{g_2(x)^p}=\left(\frac{f_1(x)}{g_1(x)}-\frac{f_2(x)}{g_2(x)}\right)^p\in F^p,$$

$$\left(\frac{f_1(x)^p}{g_1(x)^p}\right):\left(\frac{f_2(x)^p}{g_2(x)}\right)=\left(\frac{f_1(x)g_2(x)}{g_1(x)f_2(x)}\right)^p\in F^p.$$

Твърдим, че алгебричното разширение $F \supset F^p$ не е сепарабелно. Например, $x \in F$ не е сепарабелен над F^p. Нека $f(y) \in F^p[y]$ е минималният полином на $x \in F$ над F^p. Полиномът $g(y) = y^p - x^p = (y-x)^p \in F^p[y]$ се дели на $f(y)$, защото $g(x) = 0$. Ако допуснем, че $f(y) = (y-x)^r$ за някое естествено $1 \leq r \leq p-1$, то $x^r \in F^p$ изисква съществуване на полиноми $h_1(x), h_2(x) \in \mathbb{F}_p[x]$, $h_2(x) \not\equiv 0$ с $x^r = \frac{h_1(x)^p}{h_2(x)^p}$. Оттук получаваме $x^r h_2^p(x) = h_1^p(x)$ в пръстена $\mathbb{F}_p[x]$ на полиномите на трансцендентна над $\mathbb{F}_p$ променлива x. Сравняването на степените на двете страни на последното равенство дава $r + p\deg(h_2) = p\deg(h_1)$ с $\deg(h_j) \in \mathbb{Z}$, $\deg(h_j) \geq 0$ и изисква r да се дели на p. Противоречието доказва, че $f(y) = (y-x)^p$ с $f'(y) \equiv 0 \in F^p$ и $x \in F$ не е сепарабелно над F^p.

Теорема-Определение 9.14. (Теорема за примитивния елемент) *Нека $F \supset k$ е разширение на полета, $\alpha \in F$ е алгебричен над k, а $\beta \in F$ е сепарабелен над k. Тогава съществува $\theta \in k(\alpha, \beta)$, така че $k(\alpha,\beta) = k(\theta)$.*
Казваме, че θ е примитивен елемент на $k(\alpha,\beta) = k(\theta)$ над k.

Доказателство: Ако $k = \mathbb{F}_q$ е крайно поле, то крайно породеното алгебрично разширение $\mathbb{F}_q(\alpha,\beta) \supset \mathbb{F}_q$ е крайно и $\mathbb{F}_q(\alpha,\beta) = \mathbb{F}_{q^n}$ за някое $n \in \mathbb{N}$. Всеки пораждащ ζ на мултипликативната група $\mathbb{F}_{q^n}^*$ на $\mathbb{F}_{q^n}$ е примитивен елемент на $\mathbb{F}_{q^n} = \mathbb{F}_q(\zeta)$ над $\mathbb{F}_q$.
Отсега нататък ще считаме, че k е безкрайно поле. Нека

$$f_\alpha(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i) \in k[x] \setminus k$$

е минималният полином на $\alpha = \alpha_1$ над k, а

$$f_\beta(x) = \prod_{j=1}^{m}(x - \beta_j) \in k[x] \setminus k$$

е минималният полином на $\beta = \beta_1$ над k. За произволни $1 \leq i_1, i_2 \leq n$ и $1 \leq j_1 \neq j_2 \leq m$ образуваме

$$\gamma_{(j_1,j_2)}^{(i_1,i_2)} := \frac{\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}}{\beta_{j_1} - \beta_{j_2}} \in k(\alpha,\beta)$$

и избираме

$$c \in k \setminus \left\{ \gamma_{(j_1,j_2)}^{(i_1,i_2)} \ \mid \ 1 \leq i_1, i_2 \leq n, \ \ 1 \leq j_1 \neq j_2 \leq m \right\}.$$

Елементите $\gamma_{(j_1,j_2)}^{(i_1,i_2)} \in k(\alpha,\beta)$ са краен брой, така че безкрайността на полето k осигурява съществуването на c.
Твърдим, че $\theta := \alpha + c\beta \in k(\alpha,\beta)$ е примитивен елемент на $k(\alpha,\beta)$ над k. Включването $k(\theta) \subseteq k(\alpha,\beta)$ е ясно. За обратното включване да разгледаме най-големия общ делител

$$d(x) := (f_\alpha(\theta - cx), f_\beta(x))$$

на полиномите $f_\alpha(\theta - cx), f_\beta(x) \in k(\theta)[x]$. От една страна, $d(x) \in k(\theta)[x]$ е полином с коефициенти от $k(\theta)$, защото може да се получи чрез последователни деления на полиноми от $k(\theta)[x]$ по алгоритъма на Евклид. От друга страна, корените на $d(x)$ са общите корени на $f_\alpha(\theta - cx)$ и $f_\beta(x)$. Вземайки предвид $f_\alpha(\theta - c\beta_1) = f_\alpha(\alpha) = 0$ и $f_\alpha(\theta - c\beta_j) = f_\alpha(\alpha_1 + c(\beta_1 - \beta_j)) \neq 0$ за $\forall 2 \leq j \leq m$, $\alpha_1 + c(\beta_1 - \beta_j) \notin \{\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ имаме $d(x) = a_o(x - \beta) \in k(\theta)[x]$ за някое $a_o \in k(\theta)^*$. Следователно $\beta \in k(\theta)$ и $\alpha = \theta - c\beta \in k(\theta)$, откъдето $k(\alpha,\beta) \subseteq k(\theta)$ и $k(\alpha,\beta) = k(\theta)$, Q.E.D.

Следствие 9.15. *Ако $F = k(a_1, \dots, a_n)$ е крайно разширение на поле k, породено от сепарабелни над k елементи $a_1, \dots, a_n$, то съществува сепарабелен над k примитивен елемент θ на $F = k(\theta)$ над k и всеки елемент $\rho \in F = k(\theta)$ е сепарабелен над k.*

Доказателство: С индукция по броя n на пораждащите на $F = k(a_1, \dots, a_n)$ над k ще докажем съществуването на сепарабелен над k примитивен елемент θ на $F = k(\theta)$ над k. Ако $F = k(\alpha, \beta)$ за сепарабелни над k елементи $\alpha, \beta \in F$, то по Теорема 9.14 съществува примитивен елемент $\theta = \alpha + c\beta$, $c \in k$ на $k(\alpha, \beta) = k(\theta)$ над k. За да докажем сепарабелността на θ над k да разгледаме минималния полином $f_\alpha(x) \in k[x]$ на α над k с корени $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и минималния полином $f_\beta(x) \in k[x]$ на β над k с корени $\beta_1 = \beta, \dots, \beta_m$. Образуваме полинома

$$g(x) = \prod_{j=1}^{m} f_\alpha(x - c\beta_j) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(x - \alpha_i - c\beta_j).$$

Непосредствено се вижда, че $\theta = \alpha_1 + c\beta_1$ е корен на $g(x)$. Твърдим, че $g(x)$ е с коефициенти от k. Преди всичко, $g(x)$ е с коефициенти от $k[\beta_1, \dots, \beta_m]$. Понеже полиномът $g(x)$ остава на място под действие на произволна пермутация на $\beta_1, \dots, \beta_m$, коефициентите на $g(x)$ са симетрични полиноми на $\beta_1, \dots, \beta_m$. По Основната теорема за симетричните полиноми, коефициентите на $g(x)$ са от $k[e_1, \dots, e_m]$, където $e_1, \dots, e_m$ са елементарните симетрични полиноми на $\beta_1, \dots, \beta_m$. По формулите на Виет, $(-1)^i e_i$ съвпадат с коефициентите на $f_\beta(x) \in k[x]$, така че $g(x) \in k[x]$ е полином с коефициенти от k. Следователно минималният полином $f_\theta(x) \in k[x]$ на θ над k дели $g(x)$. Достатъчно е да проверим, че $g(x)$ е сепарабелен полином, за да получим, че $f_\theta(x)$ е сепарабелен полином и примитивният елемент $\theta = \alpha_1 + c\beta_1$ на $k(\alpha, \beta) = k(\theta)$ над k е сепарабелен над k. Да допуснем, че $\alpha_{i_1} + c\beta_{j_1} = \alpha_{i_2} + c\beta_{j_2}$ за някои $1 \leq i_1, i_2 \leq n$, $1 \leq j_1, j_2 \leq m$. Ако $j_1 \neq j_2$, то $\beta_{j_1} \neq \beta_{j_2}$ и $c = \gamma_{j_1, j_1}^{i_1, i_2}$, противно на избора на c в доказателството на Теорема 9.14. За $j_1 = j_2$ получаваме $i_1 = i_2$, така че $\alpha_{i_1} + c\beta_{j_1} = \alpha_{i_2} + c\beta_{j_2}$ тогава и само тогава, когато $i_1 = i_2$ и $j_1 = j_2$. По този начин доказахме, че $g(x)$, а оттам и $f_\theta(x)$ са сепарабелни полиноми.
В общия случай, по индукционно предположение съществува сепарабелен над k примитивен елемент θ_1 на $k(a_1, \dots, a_{n-1}) = k(\theta_1)$ над k. Тогава $k(a_1, \dots, a_n) = k(\theta_1, a_n)$ се поражда от два сепарабелни над k елемента - θ_1 и a_n. Съгласно доказания случай $n = 2$ съществува сепарабелен над k примитивен елмент θ на $k(a_1, \dots, a_n) = k(\theta_1, a_n) = k(\theta)$ над k.
Да допуснем, че съществува елемент $\rho \in k(\theta)$, който не е сепарабелен над k. Тогава минималният полином на ρ над k е

$$f_\rho(x) = \prod_{s=1}^{r}(x - \rho_s)^{d_s}$$

за различни $\rho_1 = \rho, \rho_1, \dots, \rho_r$ и поне едно $d_i \geq 2$. Разглеждаме разширенията $k \subset k(\rho) \subseteq k(\theta)$ и означаваме $d := [k(\rho) : k] = \sum\limits_{s=1}^{r} d_s$, $m := [k(\theta) : k(\rho)]$. Тогава $[k(\theta) : k] = [k(\theta) : k(\rho)][k(\rho) : k] = md$. Минималният полином на θ над $k(\rho)$ е от вида

$$h_\theta(\rho, x) = \sum_{i=0}^{m} c_i(\rho) x^i$$

за някои $c_i(\rho) \in k(\rho)$. Понеже ρ е алгебричен над k от степен на алгебричност d, разширението $k(\rho) = k[\rho] = l_k(1, \rho, \dots, \rho^{d-1})$ съвпада с k-линейната обвивка на мономите $1, \rho, \ldots, \rho^{d-1}$ и $c_i(\rho) = \sum\limits_{j=0}^{d-1} c_{i,j}\rho^j$ с $c_{i,j} \in k$. Следователно

$$h_\theta(\rho, x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{d-1} c_{i,j}\rho^j x^i.$$

За произволен корен ρ_s на $f_\rho(x) \in k[x]$ определяме

$$h_\theta(\rho_s, x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{d-1} c_{i,j}\rho_s^j x^i$$

и разглеждаме полинома

$$h(x) := \prod_{s=1}^{r} h_\theta(\rho_s, x)^{d_s}.$$

От $h_\theta(\rho, \theta) = 0$ следва, че θ е корен на $h(x) = 0$. Твърдим, че $h(x)$ е с коефициенти от полето k. За целта въвеждаме променливи $\rho_{s,t}$ за $\forall 1 \leq s \leq r$, $\forall 1 \leq t \leq d_s$ и разглеждаме полиномите

$$H(x) = \prod_{s=1}^{r}\prod_{t=1}^{d_s} h_\theta(\rho_{s,t}, x) \quad \text{и} \quad F(x) = \prod_{s=1}^{r}\prod_{t=1}^{d_s}(x - \rho_{s,t}).$$

При полаганията $\rho_{s,t} = \rho_s$ за $\forall 1 \leq t \leq d_s$, $\forall 1 \leq s \leq r$, получаваме $H(x)|_{\rho_{s,t}=\rho_s} = h(x)$ и $F(x)|_{\rho_{s,t}=\rho_s} = f_\rho(x)$. Коефициентите на $H(x)$ са симетрични полиноми на $\{\rho_{s,t} \ |1 \leq t \leq d_s, \ 1 \leq s \leq r\}$ и се изразяват като полиноми на елементарните симетрични полиноми на тези елементи, а оттам и като полиноми на коефициентите на $F(x)$. При полаганията $\rho_{s,t} = \rho_s$ коефициентите на $F(x)|_{\rho_{s,t}=\rho_s} = f_\rho(x)$ приемат стойности от полето k, така че полиномът $H(x)|_{\rho_{s,t}=\rho_s} = h(x)$ има коефициенти от k. Оттук следва, че минималният оплином $f_\theta(x) \in k[x]$ на θ над k дели полинома $h(x)$. Но $h(x)$ и $f_\theta(x)$ имат равни степени

$$\deg(g) = m\left(\sum_{s=1}^{r} d_s\right) = md = [k(\theta) : k] = \deg(f_\theta)$$

и старши коефициенти 1, така че $h(x) = f_\theta(x)$ съвпадат. По построение, $h(x)$ има поне един кратен корен, докато $f_\theta(x)$ е сепарабелен. Противоречието доказва, че всеки елемент $\rho \in k(\theta)$ е сепарабелен над k, Q.E.D.

Теорема 6. *Нека $F = k(a_1, \ldots, a_n)$ е крайно породено разширение на алгебрично затворено поле k, което не е чисто трансцендентно над k. Тогава съществува базис на трансцендентност $b_1, \ldots, b_d$ на F над k и сепарабелен над $k(b_1, \ldots, b_d)$ елемент $\theta \in F$, така че $F = k(b_1, \ldots, b_d, \theta)$.*

Доказателство: Нека $d = \operatorname{tr}\deg(F)$ е степента на трансцендентност на полето $F = k(a_1, \ldots, a_n)$ над k, т.е. максималният брой алгебрично независими над k елементи на F. Ще докажем теоремата с индукция по $n - d \geq 1$. Ако полето $F = k(a_1, \ldots, a_d, a_{d+1}) \supseteq k$ е крайно породено над k, то съществува максимална алгебрично независима над k подсистема $t_1, \ldots, t_d \in \{a_1, \ldots, a_d, a_{d+1}\}$, т.е., базис на трансцендентност $t_1, \ldots, t_d$ на F над k, съдържащ се в пораждащата система $a_1, \ldots, a_d, a_{d+1}$ на F над k. Фиксираме полином $f(t_1, \ldots, t_d, x_{d+1}) \in k[t_1, \ldots, t_d][x_{d+1}]$ от минимална степен относно x_{d+1} с корен t_{d+1}. Без ограничение на общността можем да считаме, че $f(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1})$ е неразложим, защото в противен случай се дели на нетъждествено нулев полином на $x_1, \ldots, x_d$, които не се анулира в $t_1, \ldots, t_d$. Ако $f(t_1, \ldots, t_d, x_{d+1}) \in k[t_1, \ldots, t_d][x_{d+1}]$ няма кратни корени като полином на x_{d+1} с коефициенти от $k[t_1, \ldots, t_d]$, то $t_{d+1} \in F$ е сепарабелен над $F_0 = k(t_1, \ldots, t_d)$ и теоремата е доказана. Ако $f(t_1, \ldots, t_d, x_{d+1})$

има кратен корен като полином на x_{d+1} с коефициенти от $k[t_1,\dots,t_d]$, то $f(t_1,\dots,t_d,x_{d+1})$ и $\frac{\partial f}{\partial x_{d+1}} \in k[t_1,\dots,t_d][x_{d+1}]$ имат общ корен t_{d+1}. Следователно $f(t_1,\dots,t_d,x_{d+1})$ и $\frac{\partial f}{\partial x_{d+1}}(t_1,\dots,t_d,x_{d+1})$ имат най-голям общ делител $GCD\left(f,\frac{\partial f}{\partial x_{d+1}}\right) \not\in k^*$ като полиноми на x_{d+1}. Полиномът $f \in k[t_1,\dots,t_d][x_{d+1}]$ е неразложим над $k[t_1,\dots,t_d]$, така че най-големият общ делител

$$GCD\left(f,\frac{\partial f}{\partial x_{d+1}}\right) = f$$

и $\frac{\partial f}{\partial x_{d+1}}(t_1,\dots,t_d,x_{d+1}) \equiv 0$, съгласно $\deg_{x_{d+1}} \frac{\partial f}{\partial x_{d+1}} < \deg_{x_{d+1}} f$. В такъв случай твърдим, че $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_d,x_{d+1}) \not\equiv 0$ за някое $1 \leq i \leq d$. При допускане на противното, степенните показатели на всички променливи от всички мономи на f с ненулеви коефициенти се делят на $p = \mathrm{char}(k)$ и

$$f(x_1,\dots,x_d,x_{d+1}) = g(x_1,\dots,x_d,x_{d+1})^{p^l}$$

за някакъв полином $g(x_1,\dots,x_d,x_{d+1}) \in k[x_1,\dots,x_d][x_{d+1}]$ и някакво естествено число l. Това противоречи на неразложимостта на f над $k[x_1,\dots,x_d]$ и доказва $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_d,x_{d+1}) \not\equiv 0$ за някое $1 \leq i \leq d$. Ще проверим, че ако $\frac{\partial f}{\partial x_i} \not\equiv 0$, то $t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_{d+1}$ е базис на трансцендентност на F над k. Наистина, ако допуснем, че $t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_{d+1}$ са алгебрично зависими над k и присъединим алгебричния над $k(t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_{d+1})$ елемент t_i, то получаваме система $t_1,\dots,t_d,t_{d+1}$ с не повече от $d-1$ алгебрично независими над k елемента. Това противоречи на трансцендентността на $t_1,\dots,t_d$ над k и доказва трансцендентността на $t_1,\dots,t_{i-1},t_{i+1},\dots,t_{d+1}$ над k.

В общия случай, за $n-d \geq 2$ избираме базис на трансцендентност $t_1,\dots,t_d$ измежду пораждащите $a_1,\dots,a_{n-1}$ на $F = k(a_1,\dots,a_n)$ над k. Представяме $F = k(t_1,\dots,t_d,t_{d+1},\dots,t_n)$ и забелязваме, че $t_1,\dots,t_d$ е базис на трансцендентност и на $F_1 = k(t_1,\dots,t_d,t_{d+1},\dots,t_{n-1})$. По индукционно предположение съществува базис на трансцендентност $s_1,\dots,s_d$ на F_1 над k и сепарабелен над $F_0 = k(t_1,\dots,t_d)$ елемент $s_{d+1} \in F_1$, така че

$$F_1 = k(t_1,\dots,t_{n-1}) = k(s_1,\dots,s_d,s_{d+1}).$$

В резултат, $F = k(s_1,\dots,s_d,s_{d+1},t_n)$ за сепарабелен над $k(s_1,\dots,s_d)$ елемент s_{d+1} и алгебричен над $k(s_1,\dots,s_d)$ елемент t_n. Съгласно Теорема-Определение 9.14, съществува примитивен елемент θ на F над $F_0 = k(s_1,\dots,s_d)$, така че $F = k(s_1,\dots,s_d,\theta) \supset k(s_1,\dots,s_d)$ е алгебрично разширение. Ако алгебричният над $F_0 = k(s_1,\dots,s_d)$ елемент θ е сепарабелен, то теоремата е доказана. Ако θ не е сепарабелен над $F_0 = k(s_1,\dots,s_d)$, то повтаряме разсъжденията от случая $n-d=1$ и получаваме базис на трансцендентност $s_1,\dots,s_{i-1},s_{i+1},\dots,s_d,\theta$ на F над k, така че s_i е сепарабелен над $k(s_1,\dots,s_{i-1},s_{i+1},\dots,s_d,\theta)$, Q.E.D.

Следствие 9.16. *(i) Нека k е алгебрично затворено поле, а $\emptyset \subsetneq V(f) \subsetneq k^n$ е неприводима хиперповърхнина с функционално поле $k(V(f))$. Тогава съществува базис на трансцендентност $b_1,\dots,b_{n-1}$ на $k(V(f))$ над k и сепарабелен над $k(b_1,\dots,b_{n-1})$ елемент $b_n \in k(V(f))$, така че $k(V(f)) = k(b_1,\dots,b_{n-1},b_n)$.*
(ii) Нека k е алгебрично затворено поле, а $F = k(b_1,\dots,b_d,b_{d+1})$ е крайно разширение на k с базис на трансцендентност $b_1,\dots,b_d$ над k и сепарабелен над $k(b_1,\dots,b_d)$ елемент $b_{d+1} \in F$. Тогава съществува неприводима хиперповърхнина $V(f) \subset k^{d+1}$ с функционално поле $k(V(f)) = F$.

Доказателство: (i) Без ограничение на общността можем да считаме, че полиномът $f \in k[x_1,\dots,x_n]$ е неразложим. По-точно, ако $f = f_1 \dots f_r$ е разлагането на $f \in k[x_1,\dots,x_n]$ в произведение на (необезателно различни) неразложими множители $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$, то $V(f) = V(f_1, \dots f_r) = V(f_1) \cup \dots \cup V(f_r)$. Поради неприводимостта на $V(f)$ съществува $1 \leq i \leq r$ с $V(f) = V(f_i)$. За неразложим полином $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ идеалът

$$IV(f) = IV(\langle f \rangle) = r(\langle f \rangle) = \langle f \rangle,$$

поради простотата на идеала $\langle f \rangle \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$. След евентуална пермутация на променливите можем да считаме, че f зависи от x_n. Следователно $\overline{x_n} = x_n + \langle f \rangle \in k[V(f)] \subset k(V(f))$ е алгебричен над $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}} \in k(V(f))$ и произволен базис на трансцендентност на $k(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}})$ над k е базис на трансцендентност на $k(V(f))$ над k. Ако допуснем, че съществува нетъждествено нулев полином $g(x_1, \dots, x_{n-1}) \in k[x_1, \dots, x_{n-1}]$ с $g(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}) = 0 \in k[V(f)] \subset k(V(f))$, то $g \in IV(f) = \langle f \rangle$ и съществува полином $h \in k[x_1, \dots, x_n]$ с $g(x_1, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, \dots, x_n)h(x_1, \dots, x_n)$. Но за $fh \not\equiv 0 \in k[x_1, \dots, x_n]$, произведението $f(x_1, \dots, x_n)h(x_1, \dots, x_n)$ зависи от x_n, докато $g(x_1, \dots, x_{n-1})$ не зависи от x_n. Противоречието доказва, че не съществува алгебрична зависимост на $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}$ над k и $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}$ е базис на трансцендентност на $k(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}})$ и $k(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_{n-1}}, \overline{x_n}) = k(V(f))$ над k. Прилагаме Теорема 6 към крайно породеното разширение $k(V(f))$ на алгебрично затвореното поле k от степен на трансцендентност $\mathrm{tr}\deg_k k(V(f)) = n-1$ и получаваме базис на трансцендентност $b_1, \dots, b_{n-1}$ на $k(V(f))$ над k и сепарабелен над $k(b_1, \dots, b_{n-1})$ елемент $b_n \in k(V(f))$, така че $k(V(f)) = k(b_1, \dots, b_{n-1}, b_n)$.
(ii) Нека $F = k(b_1, \dots, b_d, b_{d+1})$ има базис на трансцендентност $b_1, \dots, b_d$ над k и b_{d+1} е сепарабелен над k. Избираме полином $f \in k[x_1, \dots, x_d, x_{d+1}]$ от минимална ненулева степен относно x_{d+1} с $f(b_1, \dots, b_d, b_{d+1}) = 0$. Тогава f е неразложим и хиперповърхнината $V(f) \subset k^{d+1}$ е неприводима, защото нейният идеал $IV(f) = IV(\langle f \rangle) = r(\langle f \rangle) = \langle f \rangle$ е прост. Съгласно (i), функционалното поле $k(V(f))$ на $V(f)$ има базис на трансцендентност $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_d}$ над k и $f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_d}, \overline{x_{d+1}}) = 0$ е алгебрична зависимост на $\overline{x_{d+1}}$ над $k(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_d})$ от минимална ненулева степен относно x_{d+1}. Следователно

$$k(V(f)) = k(b_1, \dots, b_d, b_{d+1}) = F,$$

Q.E.D.
Нека $V(f) \subset k^{d+1}$ е неприводима хиперповърхнина с размерност d над алгебрично затворено поле k. Наличието на чисто трансцендентно разширение $k(b_1, \dots, b_d) \supset k$, което е подполе на $k(V(f))$ е еквивалентно на съществуването на доминантно рационално изображение

$$b = (b_1, \dots, b_d) : V(f) \dashrightarrow k^d.$$

Всяка точка $p \in V(f)$ се определя еднозначно от стойностите $b_1(p), \dots, b_d(p)$, $b_{d+1}(p)$ на $b_1, \dots, b_d, b_{d+1}$ в p, така че слоят $b^{-1}(b_1(p), \dots, b_d(p))$ е изоморфен на множеството на корените на $f(b_1(p), \dots, b_d(p), x_{d+1}) = 0$. Съгласно сепарабелността на b_{d+1} над $k(b_1, \dots, b_d)$, крайното рационално доминантно изображение $b : V(f) \dashrightarrow k^d$ е неразклонено в обща точка.

Следствие 9.17. *Всяко алгебрично многообразие X над алгебрично затворено поле k е бирационално на афинно пространство k^d, $d = \dim(X)$ или на неприводима хиперповърхнина $V(f) \subset k^{d+1}$ в афинно пространство.*

Доказателство: Съгласно Теорема 6, крайно породеното разширение $k(X) = k(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_d})$ на алгебрично затвореното поле k е изоморфно на чисто трансцендентно разширение $k(x_1, \dots, x_d) \supset k$ или съществува базис на трансцендентност $b_1, \dots, b_d$ на $k(X)$ над k и сепарабелен над k елемент $b_{d+1} \in k(X)$, така че $k(X) = k(b_1, \dots, b_d, b_{d+1})$. Ако $k(X) = k(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_d})$ е чисто трансцендентно разширение на k, то $k(X)$ съвпада с полето на рационалните функции на афинното пространство k^d и съществува бирационално изображение $\varphi : X \dashrightarrow k^d$.

Ако $k(X) = k(b_1, \dots, b_d, b_{d+1})$ за базис на трансцендентност $b_1, \dots, b_d$ на $k(X)$ над k и сепарабелен над $k(b_1, \dots, b_d)$ елемент $b_{d+1} \in k(X)$, то съгласно Следствие 9.16 (ii), съществува неразложим полином $f \in k[x_1, \dots, x_{d+1}]$, така че $V(f) \subset k^{d+1}$ е неприводима хиперповърхнина с функционално поле $k(V(f)) = k(b_1, \dots, b_d, b_{d+1}) = k(X)$. Оттук следва наличието на бирационално изображение $\varphi : X \dashrightarrow V(f)$, Q.E.D.

Следствие 9.18. *Ако $X \subseteq k^n$ е афинно многообразие над алгебрично затворено поле k, то в обща точка $p \in X$ допирателното пространство на Зариски T_pX към X в p е с размерност*

$$\dim_k T_pX = \dim(X),$$

равна на размерността на X.

Доказателство: Ако $\varphi : X \dashrightarrow Y$ е бирационално изображение, то за обща точка $q \in Y$ съществува точка $p \in X$ от областта на регулярност на φ и φ индуцира изоморфизъм на k-алгебри $\varphi^* : \mathcal{O}_q(Y) \to \mathcal{O}_p(X)$. Оттук следва, че диференциалът $(d\varphi)_p : T_pX \to T_qY$ на φ в точката p е k-линеен изоморфизъм. Понеже $\dim(X) = \dim(Y)$, достатъчно е да докажем, че $\dim_k T_qY = \dim(Y)$, за да получим, че $\dim_k T_pX = \dim(X)$. Съгласно Следствие 9.17, X е бирационално на афинно пространство $Y = k^d$ за $d = \dim(X)$ или X е бирационално на неприводима хиперповърхнина $Y = V(f) \subset k^{d+1}$. За $\forall q \in Y = k^d$ знаем, че $\dim_k T_qY = \dim_k T_qk^d = d$. Вземайки предвид, че $\dim(V(f)) = d$, свеждаме доказателството на следствието към $\dim_k T_qV(f) = d$ за обща точка $q \in V(f)$. Идеалът $IV(f) = \langle f \rangle$ се поражда от неразложимия полином $f \in k[x_1, \dots, x_d, x_{d+1}]$, съгласно доказателството на Следствие 9.16(i). Следователно

$$T_qV(f) = \left\{ v = \sum_{i=1}^{d+1} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_q \;\middle|\; v(f) = \sum_{i=1}^{d+1} a_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_q = 0 \right\}$$

е с размерност $\dim_k T_qV(f) = d$ точно когато градиентътт

$$\operatorname{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_d}, \frac{\partial f}{\partial x_{d+1}} \right)$$

не се анулира в $q \in V(f)$. Избираме полином $g \in IV(f) = \langle f \rangle$ от минимална ненулева степен относно x_{d+1}. Тогава $\frac{\partial g}{\partial x_{d+1}} \not\in I(V(f))$ и в обща точка $q \in V(f)$ е изпълнено $\frac{\partial f}{\partial x_{d+1}}(q) \neq 0$. Но $g = fh$ за полином $h \in k[x_1, \dots, x_d]$, така че $0 \neq \frac{\partial g}{x_{d+1}}(q) = h(q)\frac{\partial f}{x_{d+1}}(q)$ в обща точка $q \in Y$, откъдето $\frac{\partial f}{x_{d+1}}(q) \neq 0$ и $\operatorname{grad}(f)(q) \neq 0$, Q.E.D.

Задача 9.19. *Да се докаже, че*

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad x^2 + y^2 = 0\}$$

е приводимо афинно алгебрично множество с $\dim Y = 1$ и две неприводими компоненти, които се пресичат в единствената особена точка на Y. Да се намери тази особена точка.

Задача 9.20. *Нека $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ е полином от нечетна степен $n = 2k + 1$, а $X = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \quad | \quad y^2 = f(x)\}$ е кривата от задача 9.9. Да се докаже, че X има най-много $\deg(f) - 1$ особени точки. Да се опишат полиномите $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, за които кривата X е особена, т.е. $X^{\text{sing}} \neq \emptyset$.*