Глава 8

Допирателно пространство на Зариски.

За произволно естествено число m разглеждаме митричната топология върху $\mathbb{C}^m$, индуцирана от ермитовото скаларно произведение $(x, y) = \sum_{i=1}^{m} x_i \overline{y_i}$ за $x, y \in \mathbb{C}^m$. Отворените подмножества относно тази топология са обединенията на отворени кълба. Нека $U \subseteq \mathbb{C}$ е околност на $a \in \mathbb{C}$, а

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : U \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

е холоморфна крива. Определяме допирателната права към графиката

$$\Gamma_\varphi = \{(x_0, \varphi(x_0)) \in \mathbb{C}^{n+1} \quad | \quad x_0 \in U\}$$

на φ в точката $A(a, \varphi(a))$ като границата L_A на секущите прави през $(a, \varphi(a))$ и $(b, \varphi(b))$ за $b \in U$, клонящо към a. Чрез комплексен параметър t задаваме секущите през $(a, \varphi(a))$ и $(b, \varphi(b))$ с уравненията

$$x_0 - a = t(b - a),$$

$$x_i - \varphi_i(a) = t[\varphi_i(b) - \varphi_i(a)] \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Заместваме $t = \frac{x_0 - a}{b - a}$ в последните равенства и получаваме

$$x_i - \varphi_i(a) = (x_o - a)\frac{\varphi_i(b) - \varphi_i(a)}{b - a} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq n.$$

Разглеждаме производните $\varphi_i'(a) = \lim_{b \to a} \frac{\varphi_i(b) - \varphi_i(a)}{b - a}$ на холоморфните функции $\varphi_i : U \to \mathbb{C}$ и $\varphi'(a) := (\varphi_1'(a), \ldots, \varphi_n'(a))$. Точките $P(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ от допирателната права L_A към графиката Γ_φ на $\varphi : U \to \mathbb{C}^n$ в $A(a, \varphi(a))$ се задават с векторното уравнение $\overrightarrow{AP} = (x_0 - a)v$, където $v = (1, \varphi_1'(a), \ldots, \varphi_n'(a))$. По този начин, $\varphi'(a)$ определя еднозначно допирателната права L_A към Γ_φ в A.
За да интерпретираме L_A по друг начин, разглеждаме двойките (W, f), където $W \subseteq \mathbb{C}^n$ е околност на $p = \varphi(a) \in \mathbb{C}^n$ относно метричната топология върху $\mathbb{C}^n$, а $f : W \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция. Казваме, че $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$ са еквивалентни, ако $f_1|_{W_1 \cap W_2} = f_2|_{W_1 \cap W_2}$. Непосредствено се установява, че $\sim$ е релация на еквивалентност. В множеството $\mathcal{O}_p$ на класовете на еквивалентност $\overline{(W, f)}$ на (W, f) въвеждаме събиране

$$\overline{(W_1, f_1)} + \overline{(W_2, f_2)} := \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 + f_2)}$$

и умножение

$$\overline{(W_1, f_1)} \ \ \overline{(W_2, f_2)} := \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 f_2)}.$$

Проверяваме коректността на тези определения, т.е. независимостта им от избора на представители (W_i, f_i) на $\overline{(W_i, f_i)}$ и доказваме, че $\mathcal{O}_p$ е локален пръстен относно въведените операции събиране и умножение. Локалността на $\mathcal{O}_p$ се дължи на това, че $\overline{(W, f)} \in \mathcal{O}_p$ е необратим в $\mathcal{O}_p$ точно когато $f(p) = 0$ и $\overline{(W, f)}$ се съдържа в идеала на p в $\mathcal{O}_p$. За $p = \varphi(a)$ разглеждаме изображението

$$d_p \varphi : \mathcal{O}_p \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$d_p\varphi\overline{(W,f)} = \frac{\partial(f\varphi)}{\partial x_0}|_{x_0=a} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_0}(a)\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \langle \mathrm{grad}(f)(p), \varphi'(a)\rangle.$$

Забелязваме, че $d_p\varphi$ се задава като вътрешно произведение на градиента

$$\mathrm{grad}(f)(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$$

на холоморфната функция $f : W \to \mathbb{C}$ в околност W на p и допирателния вектор $\varphi'(a) = (\varphi_1'(a), \dots, \varphi_n'(a))$. Непосредствено се вижда, че $d_p\varphi$ се определя еднозначно от $\varphi'(a)$ и $\varphi'(a)$ се определя еднозначно от $d_p\varphi$. Изображението $d_p\varphi$ е $\mathbb{C}$-диференциране на $\mathcal{O}_p$. По-точно, това означава, че $d_p\varphi$ е $\mathbb{C}$-линейно изображение, което се анулира върху константите $\mathbb{C} \subset \mathcal{O}_p$ и изпълнява условието

$$d_p\varphi(\overline{(W_1,f_1)(W_2,f_2)}) = f_1(p)d_p\varphi\overline{(W_2,f_2)} + f_2(p)d_p\varphi\overline{(W_1,f_1)} \quad \text{за} \quad \forall\overline{(W_i,f_i)} \in \mathcal{O}_p.$$

1. Определение за допирателно пространство на Зариски

Определение 8.1. *Нека X е квази-афинно многообразие над поле k, $p \in X$, а $\mathcal{O}_p(X)$ е локалният пръстен на p с максимален идеал $\mathfrak{M}_p(X)$. Казваме, че изображението $D : \mathcal{O}_p(X) \to k$ е k-диференциране на локалния пръстен $\mathcal{O}_p(X)$, ако*
(i) D е k-линейно изображение;
(ii) $D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f)$ за $\forall f, g \in \mathcal{O}_p(X)$;
(iii) $D(a) = 0$ за $\forall a \in k$.

За произволни k-диференцирания $D_1 : \mathcal{O}_p(X) \to k$ и $D_2 : \mathcal{O}_P(X) \to k$ определяме поточково събиране

$$D_1 + D_2 : \mathcal{O}_p(X) \longrightarrow k,$$
$$(D_1 + D_2)(f) = D_1(f) + D_2(f) \quad \text{за} \quad \forall f \in \mathcal{O}_p(X)$$

и умножение с $\lambda \in k$,

$$\lambda D_1 : \mathcal{O}_p(X) \longrightarrow k,$$
$$(\lambda D_1)(f) = \lambda D_1(f) \quad \text{за} \quad \forall f \in \mathcal{O}_p(X).$$

Непосредствено се проверява, че D_1+D_2 и λD_1 са k-диференцирания на $\mathcal{O}_p(X)$. По-точно, $D_1 + D_2$ и λD_1 са k-линейни изображения, които се анулират върху константите $k \subset \mathcal{O}_p(X)$. За произволни $f, g \in \mathcal{O}_p(X)$ имаме

$$(D_1 + D_2)(fg) = D_1(fg) + D_2(fg) =$$
$$= f(p)D_1(g) + g(p)D_1(f) + f(p)D_2(g) + g(p)D_2(f) =$$
$$= f(p)[D_1(g)+D_2(g)]+g(p)[D_1(f)+D_2(f)] = f(p)(D_1+D_2)(g)+g(p)(D_1+D_2)(f)$$

и

$$(\lambda D_1)(fg) = \lambda D_1(fg) = \lambda f(p)D_1(g)+\lambda g(p)D_1(f) = f(p)(\lambda D_1)(g)+g(p)(\lambda D_1)(f).$$

Да напомним, че множеството $Hom_k(\mathcal{O}_p(X), k)$ на k-линейните изображения $\mathcal{O}_p(X) \to k$ е линейно простренство над k относно поточково определените събиране и умножение със скалар. Множеството T_pX на k-диференциранията $D : \mathcal{O}_p(X) \to k$ е подмножество на $Hom_k(\mathcal{O}_p(X), k)$. Понеже T_pX е затворено относно събиране и умножение със скалар, T_pX е подпространство на $Hom_k(\mathcal{O}_p(X), k)$.

Определение 8.2. *Ако $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие, $p \in X$ и $\mathcal{O}_p(X)$ е локалният пръстен на p в X, то k-линейното пространство T_pX на k-диференциранията $D : \mathcal{O}_p(X) \to k$ се нарича допирателно пространство на Зариски към X в p.*

Можем да определим допирателното пространство на Зариски T_pX към квази-проективно многообразие $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ в точка $p \in X$ като k-линейното пространство на k-диференциранията $D : \mathcal{O}_p(X) \to k$ на локалния пръстен $\mathcal{O}_p(X)$ на p в X. Достатъчно е за изучим допирателното пространство на Зариски към квази-афинно многообразие. По-точно, за всяко стандартно афинно отворено подмножество $U_i \subset \mathbb{P}^n(k)$ с $X \cap U_i \neq \emptyset$ имаме съвпадение $\mathcal{O}_p(X) = \mathcal{O}_p(X \cap U_i)$ на локалните пръстени на p в X и $X \cap U_i$. Оттук следва съвпадението $T_pX = T_p(X \cap U_i)$ на допирателните пространства на Зариски към X и $X \cap U_i$ в p.
Преди да разгледаме някои свойства на допирателното пространство на Зариски T_pX, ще докажем следната

Лема 8.3. *Нека $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие над алгебрично затворено поле, а $p \in X$ е точка от X. Тогава локалният пръстен $\mathcal{O}_p(X)$ е ньотерова локална област.*
По-точно, всеки собствен идеал $I \lhd \mathcal{O}_p(X)$ е локализация $I = J_{I_X(p)}$ на идеал $J \subseteq I_X(p)$ в $k[X]$, съдържащ се в $I_X(p)$ и произволна пораждаща система $\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_m} \in k[X]$ на $J = \langle \overline{f_1}, \ldots, \overline{f_m} \rangle_{k[X]}$ като идеал в $k[X]$ е пораждаща система на $I = \langle \overline{f_1}, \ldots, \overline{f_m} \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$ като идеал в $\mathcal{O}_p(X)$.

Доказателство: Ако $J \lhd k[X]$ е идеал, съдържащ се в максималния идеал $I_X(p) \lhd k[X]$ на точката p в $k[X]$, то локализацията $J_{I_X(p)} = (k[X] \setminus I_X(p))^{-1}J$ на J относно $I_X(p)$ е собствен идеал в $\mathcal{O}_p = k[X]_{I_X(p)}$. Наистина, за произволни $j_1, j_2 \in J$ и $r_1, r_2 \in k[X] \setminus I_X(p)$ е в сила $\frac{j_1}{r_1} - \frac{j_2}{r_2} = \frac{j_1 r_2 - j_2 r_1}{r_1 r_2} \in (k[X] \setminus I_X(p))^{-1}J$, съгласно $j_1 r_2 - j_2 r_1 \in J \lhd k[X]$ и $r_1 r_2 \in k[X] \setminus I_X(p)$. Ако $\frac{j_1}{r_1} \in J_{I_X(p)}$ и $\frac{r_2}{r_3} \in k[X]_{I_X(p)} = \mathcal{O}_p(X)$ с $j_1 \in J$, $r_2 \in k[X]$, $r_1, r_3 \in k[X] \setminus I_X(p)$, то $\frac{j_1}{r_1} . \frac{r_2}{r_3} = \frac{j_1 r_2}{r_1 r_3} \in (k[X] \setminus I_X(p))^{-1}J$, защото $j_1 r_2 \in J \lhd k[X]$ и $r_1 r_3 \in k[X] \setminus I_X(p)$. Това доказва, че $J_{I_X(p)}$ е идеал в $k[X]_{I_X(p)} = \mathcal{O}_p(X)$. Ако идеалът $J_{I_X(p)} = \mathcal{O}_p(X)$ съвпада с целия локален пръстен, то $1 \in J_{I_X(p)}$. Следователно съществуват $j \in J$ и $r \in k[X] \setminus I_X(p)$ с $\frac{j}{r} = 1$. В резултат, $j = r \in J \subseteq I_X(p)$ е противоречие, доказващо $J_{I_X(p)} \subsetneq \mathcal{O}_p(X)$.
Твърдим, че за всеки собствен идеал I в $\mathcal{O}_p(X) = k[X]_{I_X(p)}$ съществува идеал $J \lhd k[X]$, съдържащ се в $I_X(p)$, така че $I = J_{I_X(p)} = (k[X] \setminus I_X(p))^{-1}J$ е локализацията на J относно $I_X(p)$. По-точно, за произволен идеал $I \lhd \mathcal{O}_p(X)$ разглеждаме множеството

$$J = \left\{ \overline{f} \in k[X] \ \middle| \ \exists \overline{g} \in k[X] \setminus I_X(p) \quad \text{с} \quad \frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in I \right\}$$

на числителите на елементите на I. Непосредствено се вижда, че $J \subseteq I$, защото от $\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in I$ и $\overline{g} \in k[X] \subset \mathcal{O}_p(X)$ следва $\overline{f} = \overline{g}\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in I$.
Проверяваме, че J е идеал в $k[X]$. Наистина, ако $\overline{f_1}, \overline{f_2} \in J \subseteq I$, то $\frac{\overline{f_1} - \overline{f_2}}{1_k} = \overline{f_1} - \overline{f_2} \in I$, така че $\overline{f_1} - \overline{f_2} \in J$. Ако $\overline{f} \in J$ и $\overline{h} \in k[X]$, то $\overline{f}\,\overline{h} \in J$, защото от $\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in I$ следва $\frac{\overline{h}\,\overline{f}}{\overline{g}} = \overline{h}\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in I \lhd \mathcal{O}_p(X)$. Това доказва, че J е идеал в $k[X]$.
Ако допуснем съществуването на $\overline{f} \in J \setminus I_X(p) \subseteq I \setminus I_X(p)$, то $\frac{1}{\overline{f}} \in \mathcal{O}_p(X)$ и $1 = \frac{1}{\overline{f}}\overline{f} \in I$. Това противоречи на $I \neq \mathcal{O}_p(X)$ и доказва, че $J \subseteq I_X(p)$.
Твърдим, че локализацията на J относно максималния идеал $I_X(p) \lhd k[X]$ е $J_{I_X(p)} = I$. Включването $I \subseteq J_{I_X(p)}$ следва от определението на J. Обратно, ако $\overline{f} \in J$, то съществува $\overline{g} \in k[X] \setminus I_X(p)$ с $\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in I$. Сега за $\forall \overline{h} \in k[X] \setminus I_X(p)$ частното $\frac{\overline{g}}{\overline{h}} \in k[X]_{I_X(p)} \simeq \mathcal{O}_p(X)$, така че $\frac{\overline{f}}{\overline{h}} = \frac{\overline{g}}{\overline{h}}\frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in I \lhd \mathcal{O}_p(X)$ и $J_{I_X(p)} \subseteq I$.
С това установихме, че произволен собствен идеал $I \lhd \mathcal{O}_p(X)$ е локализация $I = J_{I_X(p)}$ на идеал $J \subseteq I_X(p)$ в $k[X]$.

Крайно породената алгебра $k[X]$ над поле k е ньотерова област, така че съществуват краен брой пораждащи $\overline{f_1}, \dots \overline{f_m} \in k[X]$ на $J = \langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_m} \rangle_{k[X]}$. Достатъчно е да докажем, че идеалът $I = \langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_m} \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$ в $\mathcal{O}_p(X)$ се поражда от $\overline{f_1}, \dots, \overline{f_m}$, за да получим, че всеки собствен идеал в $\mathcal{O}_p(X)$ е крайно породен и $\mathcal{O}_p(X)$ е ньотерова област. От $J \subseteq I$ следва, че $\overline{f_1}, \dots, \overline{f_m} \in I$ и $\langle \overline{f_1}, \dots \overline{f_m} \rangle_{\mathcal{O}_p(X)} \subseteq I$. За обратното включване забелязваме, че всеки елемент $\alpha = \frac{\overline{f}}{\overline{g}} \in I$ има числител $\overline{f} \in J = \langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_m} \rangle_{k[X]}$ и знаменател $\overline{g} \in k[X] \setminus I_X(p)$. Следователно

$$\alpha = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} \overline{f_i}\,\overline{h_i}}{\overline{g}} = \sum_{i=1}^{m} \overline{f_i} \frac{\overline{h_i}}{\overline{g}} \in \langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_m} \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$$

за някакви $\overline{h_i} \in k[X]$ и $I = \langle \overline{f_1}, \dots, \overline{f_m} \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$, Q.E.D.

Задача 8.4. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие и $p \in X$ е точка от X. Да се докаже, че размерността на Krull на локалния пръстен $\mathcal{O}_p(X)$ на p в X съвпада с размерността на Krull на афинния координатен пръстен $k[X]$ на X,*

$$\dim_{Krull}(\mathcal{O}_p(X)) = \dim_{Krull}(k[X]).$$

Упътване: Проверете, че локализацията на произволен прост идеал $\mathfrak{p} \subseteq I_X(p)$ в $k[X]$ е прост идеал $\mathfrak{p}_{I_X(p)}$ в $\mathcal{O}_p(X)$ и всеки прост идеал в $\mathcal{O}_p(X)$ е от този вид.

2. Ко-допирателното пространство на Зариски

Нека V е линейно пространство над поле k. Линейните изображения $\varphi : V \to k$ се наричат линейни функционали върху V. Въвеждаме поточково събиране

$$\varphi + \psi : V \longrightarrow k,$$

$$(\varphi + \psi)(v) = \varphi(v) + \psi(v) \quad \text{за } \forall v \in V$$

и умножение със скалар

$$\lambda\varphi : V \longrightarrow k,$$

$$(\lambda\varphi)(v) = \lambda\varphi(v) \quad \text{за } \forall v \in V.$$

Непосредствено се проверява, че множеството V^* на k-линейните функционали върху V е линейно пространство над k относно така въведените събиране и умножение със скалар $\lambda \in k$. Линейното пространство V^* над k се нарича дуално на V.

Лема 8.5. *Нека X е квази-афинно многообразие над алгебрично затворено поле k, $p \in X$, $\mathcal{O}_p(X)$ е локалният пръстен на p в X, а $\mathfrak{M}_p(X)$ е максималният идеал на $\mathcal{O}_p(X)$. Тогава допирателното пространство на Зариски*

$$T_pX \simeq \left(\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2\right)^*$$

може да се отъждестви с дуалното пространство на k-линейното пространство $\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$.
По-точно,
(i) ако $\mathfrak{M}_p(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ за $f_1, \dots, f_m \in I_X(p) \triangleleft k[X]$, то всяко k-диференциране $D : \mathcal{O}_p(X) \to k$ се определя еднозначно от $D(f_1), \dots, D(f_m)$;
(ii) всяко k-диференциране $D : \mathcal{O}_{p,X} \to k$ индуцира еднозначно определен k-линеен функционал

$$\overline{D} : \mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2 \longrightarrow k,$$

доколкото $\mathfrak{M}_p(X)^2 \subseteq Ker(D)$;

(iii) всеки линеен функционал $\overline{D} : \mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2 \to k$ определя еднозначно определено k-диференциране

$$D : \mathcal{O}_p(X) \to k.$$

Доказателство: (i) Произволна функция $f \in \mathcal{O}_p(X)$ се представя във вида $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(x)g_i(x) + f(p)$ с $g_i \in \mathcal{O}_p(X)$, защото $f(x) - f(p) \in \mathfrak{M}_p(X)$. Следователно

$$D(f) = \sum_{i=1}^{m} g_i(p)D(f_i) + f_i(p)D(g_i) + D(f(p)) = \sum_{i=1}^{m} g_i(p)D(f_i),$$

съгласно $f_i \in \mathfrak{M}_p(X)$ и $f(p) \in k$. Това показва, че $D(f)$ се определя от стойностите $D(f_1), \dots, D(f_m)$ на диференцирането D в пораждащите $f_1, \dots, f_m$ на максималния идеал $\mathfrak{M}_p(X)$ на $\mathcal{O}_p(X)$.
(ii) Факторът $\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$ е идеал в пръстена $\mathcal{O}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$. Да забележим, че полето $k \simeq (k+\mathfrak{M}_p(X)^2)/\mathfrak{M}_p(X)^2$ се влага изоморфно в $\mathcal{O}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$ и $\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$ може да се разглежда като линейно пространство над k.
Ако $f, g \in \mathfrak{M}_p(X)$, то $D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f) = 0$. Следователно D се анулира върху $\mathfrak{M}_p(X)^2 = \{\sum\limits_{i=1}^{s} f_i g_i \mid f_i, g_i \in \mathfrak{M}_p(X)\}$. Твърдим, че

$$\overline{D} : \mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2 \longrightarrow k,$$
$$\overline{D}(f + \mathfrak{M}_p(X)^2) = D(f) \text{ за } \forall f \in \mathfrak{M}_p(X)$$

е коректно определено изображение, защото D се анулира върху $\mathfrak{M}_p(X)^2$. Още повече, $\overline{D}$ е k-линейно съгласно

$$\overline{D}((f+\mathfrak{M}_p(X)^2)+(g+\mathfrak{M}_p(X)^2)) = \overline{D}(f+g+\mathfrak{M}_p(X)^2) = D(f+g) = D(f)+D(g) =$$
$$= \overline{D}(f + \mathfrak{m}_p(X)^2) + \overline{D}(g + \mathfrak{M}_p(X)^2)$$

и

$$\overline{D}(\lambda(f + \mathfrak{M}_p(X)^2)) = \overline{D}(\lambda f + \mathfrak{M}_p(X)^2) = D(\lambda f) = \lambda D(f) = \lambda\overline{D}(f + \mathfrak{M}_p(X)^2).$$

(iii) Линейният функционал $\overline{D} : \mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2 \to k$ може да се разглежда като линеен функционал $D : \mathfrak{M}_p(X) \to k$, анулиращ се върху $\mathfrak{M}_p(X)^2$. Поточно, изображението

$$D : \mathfrak{M}_p(X) \longrightarrow k,$$
$$D(f) = \overline{D}(f + \mathfrak{M}_p(X)^2) \quad \text{за} \quad \forall f \in \mathfrak{M}_p(X)$$

е коректно определено. Още повече, $D : \mathfrak{M}_p(X) \to k$ е k-линейно, защото

$$D(f + g) = \overline{D}(f + g + \mathfrak{M}_p(X)^2) = \overline{D}((f + \mathfrak{M}_p(X)^2) + (g + \mathfrak{M}_p(X)^2)) =$$
$$= \overline{D}(f + \mathfrak{M}_p(X)^2) + \overline{D}(g + \mathfrak{M}_p(X)^2) = D(f) + D(g)$$

и

$$D(\lambda f) = \overline{D}(\lambda f + \mathfrak{M}_p(X)^2) = \lambda\overline{D}(f + \mathfrak{M}_p(X)^2) = \lambda D(f).$$

Линейният функционал $\overline{D} : \mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2 \to k$ изпраща нулевия вектор $\mathfrak{M}_p(X)^2 \in \mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$ в $\overline{D}(\mathfrak{M}_p(X)^2) = 0 \in k$. Оттук, за $\forall \alpha \in \mathfrak{M}_p(X)^2$ имаме $D(\alpha) = \overline{D}(\alpha + \mathfrak{M}_p(X)^2) = \overline{D}(\mathfrak{M}_p(X)^2) = 0$ и $D|_{\mathfrak{M}_p(X)^2} = 0$.
Продължаваме D до изображение

$$D : \mathcal{O}_p(X) \longrightarrow k,$$
$$D(f) = D\left([f - f(p)] + f(p)\right) = D(f - f(p)),$$

вземайки предвид, че $f - f(p) \in \mathfrak{M}_p(X)$. Проверяваме k-линейността на D,

$$D(f+g) = D(f+g-(f+g)(p)) = D([f-f(p)]+[g-g(p)]) = D(f-f(p))+D(g-g(p)),$$

$$D(\lambda f) = D(\lambda f - (\lambda f)(p)) = D(\lambda(f - f(p))) = \lambda D(f - f(p)).$$

Ясно е, че $D(a) = 0$ за $\forall a \in k$. Остава да установим равенството

$$D(fg) = f(p)D(g) + g(p)D(f) \quad \text{за} \quad \forall f, g \in \mathcal{O}_p(X).$$

Разлагаме

$$fg = [(f - f(p)) + f(p)][(g - g(p)) + g(p)] =$$
$$= [f - f(p)][g - g(p)] + f(p)[g - g(p)] + g(p)[f - f(p)] + f(p)g(p)$$

с $[f - f(p)][g - g(p)] \in \mathfrak{M}_p(X)^2$ и $f(p)[g - g(p)], g(p)[f - f(p)] \in \mathfrak{M}_p(X)$. Следователно $D([f - f(p)][g - g(p)]) = 0$ и

$$D(fg) = D(f(p)[g - g(p)]) + D(g(p)[f - f(p)]) =$$
$$f(p)D(g - g(p)) + g(p)D(f - f(p)) = f(p)D(g) + g(p)D(f),$$

Q.E.D.
За да докажем, че $\mathfrak{M}_p(X)^n/\mathfrak{M}_p(X)^{n+1}$ са крайномерни линейни пространства над k, ни трябва следната

Лема 8.6. *Нека R е локален пръстен с максимален идеал $\mathfrak{M}$ и поле от остатъци $k = R/\mathfrak{M}$.*
(i) Ако $\mathfrak{a} \triangleleft R$ е идеал в R с $\mathfrak{M}^{n+1} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{M}^n$ за някое $n \geq 0$, то $(\mathfrak{A}, +)$ е подгрупа на $(\mathfrak{M}^n, +)$ и $\mathfrak{a}/\mathfrak{M}^{n+1}$ е линейно пространство над k.
(ii) Ако $(\mathfrak{a}, +)$ е подгрупа на $(\mathfrak{M}^n, +)$, съдържаща $(\mathfrak{M}^{n+1}, +)$ и фактор-групата $(\mathfrak{a}/\mathfrak{M}^{n+1}, +)$ е линейно пространство над k, то $\mathfrak{a} \triangleleft R$ е идеал в R.

Доказателство: (i) Подгрупата $(\mathfrak{M}^{n+1}, +)$ на абелевата група $(\mathfrak{a}, +)$ е нормална и можем да образуваме фактор-групата $(\mathfrak{a}/\mathfrak{M}^{n+1}, +)$. Изображението

$$(R/\mathfrak{M}) \times (\mathfrak{a}/\mathfrak{M}^{n+1}) \longrightarrow \mathfrak{a}/\mathfrak{M}^{n+1},$$
$$(r + \mathfrak{M})(a + \mathfrak{M}^{n+1}) = ra + \mathfrak{M}^{n+1} \quad \text{за} \quad \forall r \in R, \quad \forall a \in \mathfrak{a}$$

е коректно зададено. По-точно, от $r + \mathfrak{M} = r' + \mathfrak{M}$ и $a + \mathfrak{M}^{n+1} = a' + \mathfrak{M}^{n+1}$ следва

$$ra' - ra = (r'a' - r'a) + (r'a - ra) = r'(a' - a) + (r' - r)a \in \mathfrak{M}^{n+1},$$

защото $a' - a \in \mathfrak{M}^{n+1}$, $r' - r \in \mathfrak{M}$, $a \in \mathfrak{M}^n$, откъдето $(r' - r)a \in \mathfrak{M}^{n+1}$. Така зададеното умножение със скалари от $k = R/\mathfrak{M}$ превръща $(\mathfrak{a}/\mathfrak{M}^{n+1}, +)$ в линейно пространство над k, съгласно

- $$[(r_1 + \mathfrak{M}) + (r_2 + \mathfrak{M})](a + \mathfrak{M}^{n+1}) = (r_1 + r_2 + \mathfrak{M})(a + \mathfrak{M}^{n+1}) =$$
  $$= (r_1 + r_2)a + \mathfrak{M}^{n+1} = (r_1 a + \mathfrak{M}^{n+1}) + (r_2 a + \mathfrak{M}^{n+1}) =$$
  $$= (r_1 + \mathfrak{M})(a + \mathfrak{M}^{n+1}) + (r_2 + \mathfrak{M})(a + \mathfrak{M}^{n+1}),$$

- $$(r + \mathfrak{M})[(a_1 + \mathfrak{M}^{n+1}) + (a_2 + \mathfrak{M}^{n+1})] = (r + \mathfrak{M})(a_1 + a_2 + \mathfrak{M}^{n+1}) =$$
  $$= r(a_1 + a_2) + \mathfrak{M}^{n+1} = (ra_1 + \mathfrak{M}^{n+1}) + (ra_2 + \mathfrak{M}^{n+1}) =$$
  $$= (r + \mathfrak{M})(a_1 + \mathfrak{M}^{n+1}) + (r + \mathfrak{M})(a_2 + \mathfrak{M}^{n+1}),$$

- $$[(r_1 + \mathfrak{M})(r_2 + \mathfrak{M})](a + \mathfrak{M}^{n+1}) = (r_1 r_2 + \mathfrak{M})(a + \mathfrak{M}^{n+1}) =$$
  $$= (r_1 r_2)a + \mathfrak{M}^{n+1} = r_1(r_2 a) + \mathfrak{M}^{n+1} = (r_1 + \mathfrak{M})(r_2 a + \mathfrak{M}^{n+1}) = (r_1 + \mathfrak{M})[(r_2 + \mathfrak{M})(a + \mathfrak{M}^{n+1})],$$

- $$(1 + \mathfrak{M})(a + \mathfrak{M}^{n+1}) = 1.a + \mathfrak{M}^{n+1} = a + \mathfrak{M}^{n+1}.$$

(ii) Ако $(\mathfrak{a}, +)$ е подгрупа на $(\mathfrak{M}^n, +)$, съдържаща $(\mathfrak{M}^{n+1}, +)$ и фактор-групата $(\mathfrak{a}/\mathfrak{M}^{n+1}, +)$ е линейно пространство над k, то $\mathfrak{a}$ издържа умножения с $r \in R$ и е идеал в R. По-точно, за $\forall r \in R$ и $\forall a \in \mathfrak{a}$ имаме

$$(r + \mathfrak{M})(a + \mathfrak{M}^{n+1}) = ra + \mathfrak{M}^{n+1} \in \mathfrak{A}/\mathfrak{M}^{n+1}.$$

Следователно съществува $a' \in \mathfrak{a}$ с $ra + \mathfrak{M}^{n+1} = a' + \mathfrak{M}^{n+1}$, откъдето

$$ra - a' \in \mathfrak{M}^{n+1} \subseteq \mathfrak{a}.$$

В резултат, $ra = (ra - a') + a' \in (\mathfrak{a}, +)$ и $R\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$. Това доказва, че $\mathfrak{a}$ е идеал в пръстена R, Q.E.D.

Следствие 8.7. *Нека R е ньотеров локален пръстен с максимален идеал $\mathfrak{M}$ и поле от остатъци $k = R/\mathfrak{M}$. Тогава k-линейните пространства $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ са крайномерни за всички цели $n \geq 0$.*

Доказателство: Ако допуснем, че линейното пространство $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ над k е безкрайномерно, то съществува безкрайна строго растяща редица

$$0 \subsetneqq V_1 \subsetneqq V_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq V_l \subsetneqq V_{l+1} \subsetneqq \ldots$$

от k-линейни подпространства на V_l на $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$. Адитивните подгрупи $(V_l, +)$ на $(\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}, +)$ се повдигат до адитивни подгрупи

$$(\mathfrak{a}_l, +) := (\{x \in \mathfrak{M}^n \ \ | \ \ x + \mathfrak{M}^{n+1} \in V_l\}, +)$$

на $(\mathfrak{M}^n, +)$ с $(\mathfrak{a}_l/\mathfrak{M}^{n+1}, +) = (V_l, +)$. Наистина, подмножествата $\mathfrak{a}_l$ на $\mathfrak{M}^n$ са адитивни подгрупи, защото за произволни $x, y \in \mathfrak{a}_l$ имаме

$$x - y + \mathfrak{m}^{n+1} = (x + \mathfrak{M}^{n+1}) - (y + \mathfrak{M}^{n+1}) \in (V_l, +),$$

откъдето $x - y \in \mathfrak{a}_l$. Равенството $(\mathfrak{a}_l/\mathfrak{M}^{n+1}, +) = (V_l, +)$ следва от това, че $x \in \mathfrak{a}_l$ точно когато $x + \mathfrak{M}^{n+1} \in V_l$. Това позволява разглеждането на $\mathfrak{a}_l/\mathfrak{M}^{n+1}$ като линейни пространства над k и прилагането на Лема 8.6 (ii). В резултат получаваме безкрайна строго растяща редица

$$0 \subsetneqq \mathfrak{a}_1 \subsetneqq \mathfrak{a}_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{a}_l \subsetneqq \mathfrak{a}_{l+1} \subsetneqq \ldots$$

от идеали в R, защото допускането $\mathfrak{a}_l = \mathfrak{a}_{l+1}$ води до съвпадение

$$V_l = \mathfrak{a}_l/\mathfrak{M}^{n+1} = \mathfrak{a}_{l+1}/\mathfrak{M}^{n+1} = V_{l+1},$$

противно на $V_l \subsetneqq V_{l+1}$. Това противоречи на ньотеровостта на R и доказва, че $\mathfrak{M}^n/\mathfrak{M}^{n+1}$ е крайномерно линейно пространство над k, Q.E.D.

Нека $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие, $p \in X$, $\mathcal{O}_p(X)$ е локалният пръстен на p в X и $\mathfrak{M}_p(X)$ е максималният идеал в $\mathcal{O}_p(X)$. Тогава полето от остатъци $\mathcal{O}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X) = k$ съвпада с полето от константи k.

По-точно, остойностяващото изображение

$$\mathcal{E}_p : \mathcal{O}_p(X) \longrightarrow k,$$

$$\mathcal{E}_p(f) = f(p)$$

в точката $p \in X$ е хомоморфизъм на пръстени, съгласно

$$\mathcal{E}_p(f + g) = (f + g)(p) = f(p) + g(p) = \mathcal{E}_p(f) + \mathcal{E}_p(g)$$

и

$$\mathcal{E}_p(fg) = (fg)(p) = f(p)g(p) = \mathcal{E}_p(f)\mathcal{E}_p(g).$$

Образът $\mathrm{im}(\mathcal{E}_p) = k$. Вземайки предвид, че

$$\mathcal{O}_p(X) = k[X]_{I_X(p)} = (k[X] \setminus I_X(p))^{-1}k[X]$$

е локализацията на афинния координатен пръстен $k[X]$ по максималния идеал $I_X(p) \triangleleft k[X]$ на точката p в $k[X]$, а $\mathfrak{M}_p(X) = (k[X] \setminus I_X(p))^{-1} I_X(p)$ е локализацията на $I_X(p)$ относно $I_X(p)$, забелязваме, че

$$\mathfrak{M}_p(X) = \{f \in \mathcal{O}_p(X) \ \mid \ f(p) = 0\} = \ker(\mathcal{E}_p).$$

По теоремата за хомоморфизмите на пръстени, $\mathcal{E}_p$ индуцира изоморфизъм на пръстени

$$\mathcal{O}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X) = \mathcal{O}_p(X)/\ker(\mathcal{E}_p) \simeq \mathrm{im}(\mathcal{E}_p) = k.$$

В Лема 8.3 доказахме, че над алгебрично затворено поле k, локалният пръстен $\mathcal{O}_p(X)$ е ньотерова локална област. Прилагаме Следствие 8.7 и получаваме, че факторите $\mathfrak{M}_p(X)^n/\mathfrak{M}_p(X)^{n+1}$ са крайномерни линейни пространства над k.
Да напомним, че ако V е крайномерно линейно пространство над поле k, то дуалното пространство V^* е крайномерно и има същата размерност $\dim(V) = \dim(V^*)$. По-точно, всеки базис $e_1, \dots e_n$ на V над k отговаря на базис $e_1^*, \dots, e_n^*$ на V^* над k, който се нарича дуален на $e_1, \dots, e_n$. Линейните функционали $e_i^* : V \to k$ се задават еднозначно с действието си

$$e_i^*(e_j) = \begin{cases} 1 & \text{за } i = j, \\ 0 & \text{за } i \neq j \end{cases}$$

върху базисните вектори e_j, $1 \leq j \leq n$ на V. За линейната независимост на $e_1^*, \dots, e_n^*$ да предположим, че $\sum\limits_{i=1}^n \lambda_i e_i^* = \mathbb{O}$ е нулевият линеен функционал $\mathbb{O} : V \to \{0_V\}$ за някакви $\lambda_i \in k$. Тогава за $\forall 1 \leq j \leq n$ имаме

$$0_V = \mathbb{O}(e_j) = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^* \right)(e_j) = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i^*(e_j) = \lambda_j$$

и $e_1^*, \dots, e_n^*$ са линейно независими над полето k. Произволен линеен функционал $\varphi : V \to k$ се представя като линейна комбинация $\varphi = \sum\limits_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$ на $e_1^*, \dots, e_n^*$ с коефициенти $\varphi(e_i) \in k$. По-точно,

$$\left(\sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^* \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \varphi(e_i) x_j e_i^*(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \varphi(e_j) = \varphi \left(\sum_{j=1}^n x_j e_j \right)$$

за всеки вектор $\sum\limits_{j=1}^n x_j e_j \in V$.
С това доказахме следното

Следствие 8.8. *Нека X е квази-афинно многообразие над алгебрично затворено поле k, $p \in X$ е точка и $\mathfrak{M}_p(X)$ е максималният идеал на локалния пръстен $\mathcal{O}_p(X)$. Тогава полето от остатъци $\mathcal{O}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X) = k$ съвпада с полето k от константи и факторите*

$$\mathfrak{M}_p(X)^n/\mathfrak{M}_p(X)^{n+1}$$

са крайномерни линейни пространства над k за всяко цяло неотрицателно число n.
В частност, допирателното пространство на Зариски

$$T_p X \simeq \left(\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2 \right)^*$$

е крайномерно линейно пространство над k.

От една страна, идеалът $\mathfrak{M}_p(X)$ в ньотеровата област $\mathcal{O}_p(X)$ е крайнопороден. Ако идеалът $\mathfrak{M}_p(X) = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ се поражда от $f_1, \dots, f_s \in \mathcal{O}_p(X)$, то съседните класове $f_1 + \mathfrak{M}_p(X)^2, \dots, f_s + \mathfrak{M}_p(X)^2$ пораждат линейното пространство $\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$ над k. По-точно, всеки елемент на фактора $\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$ е от вида

$$\sum_{i=1}^{s} f_i g_i + \mathfrak{M}_p(X)^2 = \sum_{i=1}^{s} (f_i + \mathfrak{M}_p(X)^2)(g_i + \mathfrak{M}_p(X)^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} (f_i + \mathfrak{M}_p(X)^2)(g_i - g_i(p) + \mathfrak{M}_p(X)^2) + \sum_{i=1}^{s} (f_i + \mathfrak{M}_p(X)^2)(g_i(p) + \mathfrak{M}_p(X)^2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} g_i(p)(f_i + \mathfrak{M}_p(X)^2) \in l_k(f_1 + \mathfrak{M}_p(X)^2, \dots, f_s + \mathfrak{M}_p(X)^2).$$

защото $f_i, g_i - g_i(p) \in \mathfrak{M}_p(X)$. С помощта на следващата Лема на Накаяма ще установим, че произволен базис на $\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$ над k се повдига до система от пораждащи на максималния идеал $\mathfrak{M}_p(X)$.

Лема 8.9. (Лема на Nakayama) *Нека R е локален пръстен с максимален идеал $\mathfrak{M}$ и поле от остатъци $k = R/\mathfrak{M}$.*
(i) Ако M е крайнопороден R-модул и N е подмодул на M, изпълняващ равенството $\mathfrak{M}M + N = M$, то $M = N$.
(ii) Ако M е крайнопороден R-модул, то $M/\mathfrak{M}M$ е линейно пространство над полето $k = R/\mathfrak{M}$. Ако $x_1 + \mathfrak{M}M, \dots, x_n + \mathfrak{M}M$ с $x_1, \dots, x_n \in M$ пораждат линейното пространство $M/\mathfrak{M}M$ над k, то $x_1, \dots, x_n$ пораждат

$$M = Rx_1 + \ldots + Rx_n$$

като R-модул.

Доказателство: (i) Нека $N = 0$ и $\mathfrak{M}M = M$. За да установим, че $M = 0$, допускаме противното, $M \neq 0$ и избираме минимално множество от пораждащи $u_1, \dots, u_r$ на M като R-модул. Съгласно $u_r \in M = \mathfrak{M}M$ съществуват $m_i \in \mathfrak{M}$, така че $u_r = \sum\limits_{i=1}^{r} m_i u_i$. Следователно $(1 - m_r)u_r = \sum\limits_{i=1}^{r-1} m_i u_i$, където $1 - m_r \in R \setminus \mathfrak{M} = R^*$ е обратим елемент на R. Умножавайки почленно с $(1 - m_r)^{-1} \in R$ получаваме $u_r \in Ru_1 + \ldots + Ru_{r-1}$, което противоречи на минималността на системата пораждащи $u_1, \dots, u_r$ на R-модула M. Това доказва, че $M = N = 0$ в случая $N = 0$.
В общия случай ще изведем, че $M/N = 0$. За целта трябва да докажем, че от $\mathfrak{M}M + N = M$ следва $\mathfrak{M}(M/N) = M/N$. Наистина, за $\forall \mu \in \mathfrak{M}$ и $\forall x \in M$ имаме $\mu(x + N) = \mu x + N \in M/N$, така че $\mathfrak{M}(M/N) \subseteq M/N$. За да проверим обратното включване избираме пораждаща система $u_1, \dots, u_r \in M$ на $M = Ru_1 + \ldots + Ru_r$ като R-модул и забелязваме, че $\mathfrak{M}M = \mathfrak{M}u_1 + \ldots + \mathfrak{M}u_r$, $M/N = R(u_1 + N) + \ldots + R(u_r + N)$, $\mathfrak{M}(M/N) = \mathfrak{M}(u_1 + N) + \ldots + \mathfrak{M}(u_r + N)$. Сега за $\forall x \in M = \mathfrak{M}M + N$ съществуват $\mu_i \in \mathfrak{M}$, $1 \leq i \leq r$ и $y \in N$, така че $x = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i u_i + y$. Следователно $x + N = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i u_i + N = \sum\limits_{i=1}^{r} \mu_i (u_i + N) \in \mathfrak{M}(M/N)$ и $M/N \subseteq \mathfrak{M}(M/N)$. Това доказва, че $\mathfrak{M}(M/N) = M/N$. Съгласно частния случай, оттук следва $M/N = 0$, което е еквивалентно на $M = N$.
(ii) Понеже $\mathfrak{m}M$ е R-подмодул на M, факторът $M/\mathfrak{M}M$ е R-модул. Твърдим, че R-линейната структура се спуска до k-линейна структура. Изображението

$$(R/\mathfrak{M}) \times (M/\mathfrak{M}M) \longrightarrow M/\mathfrak{M}M,$$

$$(r + \mathfrak{M})(x + \mathfrak{M}M) = rx + \mathfrak{M}M \quad \text{за} \quad \forall r \in R, \ \ \forall x \in M$$

е коректно зададено. По-точно, за произволни $r + \mathfrak{M} = r' + \mathfrak{M}$ и $x + \mathfrak{M}M = x' + \mathfrak{M}M$ твърдим, че $rx + \mathfrak{M}M = r'x' + \mathfrak{M}M$. Разглеждаме

$$r'x' - rx = (r'x' - r'x) + (r'x - rx) = r'(x' - x) + (r' - r)x.$$

От $r' \in R$, $x' - x \in \mathfrak{M}M$ и $R(\mathfrak{M}M) \subseteq \mathfrak{M}M$ следва, че $r'(x' - x) \in \mathfrak{M}M$. Предположенията $r' - r \in \mathfrak{M}$ и $x \in M$ водят до $(r' - r)x \in \mathfrak{M}M$. Следователно $r'x' - rx \in \mathfrak{M}M$ и $M/\mathfrak{M}M$ има коректно зададено умножение с елементи от k. Това умножение превръща $(M/\mathfrak{M}M, +) = (M, +)/(\mathfrak{M}M, +)$ в линейно пространство над k, съгласно

- $$[(r_1 + \mathfrak{M}) + (r_2 + \mathfrak{M})](x + \mathfrak{M}M) = (r_1 + r_2 + \mathfrak{M})(x + \mathfrak{M}M) = (r_1 + r_2)x + \mathfrak{M}M =$$ $$= (r_1x + \mathfrak{M}M) + (r_2x + \mathfrak{M}M) = (r_1 + \mathfrak{M})(x + \mathfrak{M}M) + (r_2 + \mathfrak{M})(x + \mathfrak{M}M),$$
- $$(r + \mathfrak{M})[(x + \mathfrak{M}M) + (y + \mathfrak{M}M)] = (r + \mathfrak{M})(x + y + \mathfrak{M}M) = r(x + y) + \mathfrak{M}M =$$ $$= (rx + \mathfrak{M}M) + (ry + \mathfrak{M}M) = (r + \mathfrak{M})(x + \mathfrak{M}M) + (r + \mathfrak{M})(y + \mathfrak{M}M),$$
- $$[(r + \mathfrak{M})(s + \mathfrak{M})](x + \mathfrak{M}M) = (rs + \mathfrak{M})(x + \mathfrak{M}M) = (rs)x + \mathfrak{M}M =$$ $$= r(sx) + \mathfrak{M}M = (r + \mathfrak{M})(sx + \mathfrak{M}M) = (r + \mathfrak{M})[(s + \mathfrak{M})(x + \mathfrak{M}M)],$$
- $$(1 + \mathfrak{M})(x + \mathfrak{M}M) = 1.x + \mathfrak{M}M = x + \mathfrak{M}M.$$

За R-подмодула $N = Rx_1 + \ldots + Rx_n$ на M твърдим, че $\mathfrak{M}M + N = M$. Включването $\mathfrak{M}M + N \subseteq M$ е ясно. За $\forall x \in M$ знаем, че

$$x + \mathfrak{M}M \in M/\mathfrak{M}M = l_k(x_1 + \mathfrak{M}M, \ldots, x_n + \mathfrak{M}M).$$

Следователно съществуват $r_1, \ldots, r_n \in R$ с

$$x + \mathfrak{M}M = \sum_{i=1}^{n} (r_i + \mathfrak{M})(x_i + \mathfrak{M}M) = \left(\sum_{i=1}^{n} r_i x_i \right) + \mathfrak{M}M.$$

В резултат, $y := x - \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i \in \mathfrak{M}M$ и $x = y + \sum\limits_{i=1}^{n} r_i x_i \in \mathfrak{M}M + N$. Това доказва $M \subseteq \mathfrak{M}M + N$, откъдето и $M = \mathfrak{M}M + N$. Съгласно (i), оттук получаваме, че $M = N = Rx_1 + \ldots Rx_n$, Q.E.D.

Задача 8.10. *Да се докаже, че ако R е локален пръстен с максимален идеал $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^2$, то $\mathfrak{M} = 0$ и R е поле.*

Упътване: Приложете Лема 8.9 на Nakayama за $M = \mathfrak{M}$, $N = 0$.

Задача 8.11. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие с размерност $\dim(X) \geq$ и $p \in X$ е точка от X. Да се докаже, че допирателното пространство на Зариски T_pX към X в p не е нулево.*

Следствие 8.12. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие, $p \in X$ е точка, $\mathcal{O}_p(X)$ е локалният прастен на p в X и $\mathfrak{M}_p(X)$ е максималният идеал на $\mathcal{O}_p(X)$ с поле от остатъци $\mathcal{O}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X) = k$. В такъв случай, $f_1, \ldots, f_s \in \mathfrak{M}_p(X)$ пораждат максималния идеал*

$$\mathfrak{M}_p(X) = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \triangleleft \mathcal{O}_p(X)$$

на локалния пръстен $\mathcal{O}_p(X)$ *тогава и само тогава, когато съседните класове* $f_1 + \mathfrak{M}_p(X)^2, \ldots, f_s + \mathfrak{M}_p(X)^2 \in \mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$ *пораждат линейното пространство*

$$\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2 = l_k(f_1 + \mathfrak{M}_p(X)^2, \ldots, f_s + \mathfrak{M}_p(X)^2)$$

над полето k.

Доказателство: Ако $\mathfrak{M}_p(X) = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$, то всеки елемент на $\mathfrak{M}_p(X)$ е от вида $f = \sum\limits_{i=1}^{s} f_i g_i$ за някакви $g_i \in \mathcal{O}_p(X)$. Представяме $g_i = [g_i - g_i(p)] + g_i(p)$ като суми на елементи $g_i - g_i(p) \in \mathfrak{M}_p(X)$ на максималния идеал на $\mathcal{O}_p(X)$ и $g_i(p) \in k$. Тогава

$$f + \mathfrak{M}_p(X)^2 = \sum_{i=1}^{s} f_i[g_i - g_i(p)] + \sum_{i=1}^{s} f_i g_i(p) + \mathfrak{M}_p(X)^2 = \sum_{i=1}^{s} g_i(p) f_i + \mathfrak{M}_p(X)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{s} g_i(p)(f_i + \mathfrak{M}_p(X)^2) \in l_k(f_1 + \mathfrak{M}_p(X)^2, \ldots, f_s + \mathfrak{M}_p(X)^2),$$

защото $f_i[g_i - g_i(p)] \in \mathfrak{M}_p(X)^2$ за $\forall 1 \leq i \leq s$. Това доказва $\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2 = l_k(f_1 + \mathfrak{M}_p(X)^2, \ldots, f_s + \mathfrak{M}_p(X)^2)$.
Нека $\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2 = l_k(f_1 + \mathfrak{M}_p(X)^2, \ldots, f_s + \mathfrak{M}_p(X)^2)$. Прилагаме Лема 8.9 на Nakayama към крайно породения $\mathcal{O}_p(X)$-модул $\mathfrak{M}_p(X)$ и получаваме, че максималният идеал

$$\mathfrak{M}_p(X) = \mathcal{O}_p(X) f_1 + \ldots + \mathcal{O}_p(X) f_s = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$$

се поражда от $f_1, \ldots, f_s$, Q.E.D.

Определение 8.13. *Квази-афинните или квази-проективните многообразия* X *с размерност* $\dim(X) = 1$ *се наричат криви.*

Задача 8.14. *Нека* k *е алгебрично затворено поле,* $X \subseteq k^n$ *е квази-афинно многообразие, а* $p \in X$ *е точка. Да се докаже, че ако допирателното пространство на Зариски* T_pX *към* X *в* p *е с размерност* $\dim_k(T_pX) = 1$, *то* $\dim(X) = 1$, *т.е.* X *е крива.*

Упътване: При допускане на противното съществува строго растяща редица

$$\{0\} \subseteq \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{M}_p(X)$$

от три прости идеала в $\mathcal{O}_p(X)$. Максималният идеал $\mathfrak{M}_p(X) = \langle t \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$ е главен, така че ненулевият прост идеал $\mathfrak{p}_1 = \langle t^m \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$ се поражда от t^m за някое естествено $m \geq 2$.

Задача 8.15. *Нека* $X \subseteq k^n$ *е афинна крива над алгебрично затворено поле* k, *а* $f \in \mathfrak{M}_p(X) \setminus \{0\}$ *е такъв неразложим елемент на максималния идеал на локалния пръстен* $\mathcal{O}_p(X)$ *на точка* $p \in X$, *че всяко* $g \in \mathcal{O}_p(X)$ *се представя във вида* $g = f^m h$ *за някое* $m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ *и някое* $h \in \mathcal{O}_p(X)^*$. *Да се докаже, че* X *е крива.*

Упътване: Проверете, че f поражда максималния идеал $\mathfrak{M}_p(X) = \langle f \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$, така че $\dim_k(T_pX) = 1$.

3. Диференциал на регулярно изображение в точка

Следващото твърдение описва някои зависимости между регулярни изображения на квази-афинни многообразия и допирателните пространства на Зариски.

ТВЪРДЕНИЕ-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.16. *(i) Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е афинно многообразие, а $Y \subseteq k^m$ е квази-афинно многообразие. Тогава произволно регулярно изображение $\varphi : X \to Y$ индуцира k-линейни изображения*

$$(d\varphi)_p : T_p X \to T_{\varphi(p)} Y,$$

за всички точки $p \in X$, които се наричат диференциали на φ в p.
(ii) Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ и $Y \subseteq k^m$ са афинни многообразия, а $Z \subseteq k^l$ е квази-афинно многообразие. Ако $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to Z$ са регулярни изображения, то

$$(d(\psi\varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)}(d\varphi)_p$$

във всяка точка $p \in X$.
(iii) Тъждественото изображение $\mathrm{Id} : X \to X$ на афинно многообразие X над алгебрично затворено поле k индуцира тъждествените изображения

$$(d(\mathrm{Id}))_p = \mathrm{Id} : T_p X \longrightarrow T_p X$$

на всички допирателни пространства на Зариски $T_p X$.
(iv) Ако $\varphi : X \to Y$ е бирегулярно изображение на афинни многообразия над алгебрично затворено поле k, то във всяка точка $p \in X$ диференциалът

$$(d\varphi)_p : T_p X \longrightarrow T_{\varphi(p)} Y$$

е k-линеен изоморфизъм.

Доказателство: (i) По определение, регулярното изображение

$$\varphi : X \longrightarrow Y \subseteq k^m$$

се задава с наредена m-торка $\varphi = (f_1, \ldots, f_m)$ от регулярни функции

$$f_i : X \longrightarrow k.$$

Съгласно Твърдение 5.14, регулярните функции f_i върху афинното многообразие X над алгебрично затворено поле k принадлежат на афинния координатен пръстен. Следователно $\varphi = (f_1, \ldots, f_m) : X \to Y$ индуцира хомоморфизъм

$$\varphi^* : k[Y] \longrightarrow k[X]$$

на съответните афинни координатни пръстени с

$$\varphi^*(\overline{g}) = \overline{g}(f_1, \ldots, f_m) \quad \text{за} \quad \forall \overline{g} \in k[Y].$$

При това, максималният идеал $I_Y(\varphi(p)) \triangleleft k[Y]$ на $\varphi(p) \in Y$ в Y се изобразява в максималния идеал $\varphi^*(I_Y(\varphi(p))) \subseteq I_X(p) \triangleleft k[X]$. По-точно, ако $\overline{g} \in I_Y(\varphi(p))$, то $\varphi^*(\overline{g}) \in I_X(p)$, защото $\varphi^*(\overline{g})(p) = \overline{g}(\varphi(p)) = 0$. Допълнението $k[Y] \setminus I_Y(\varphi(\varphi(p)))$ се трансформира в допълнението $\varphi^*(k[Y] \setminus I_Y(p)) \subseteq k[X] \setminus I_X(p)$, защото ако $\varphi^*(\overline{g}) \in \varphi^*(k[Y] \setminus I_Y(p)) \cap I_X(p)$, то $0 = \varphi^*(\overline{g}) = \overline{g}(\varphi(p))$ противоречи на $g \notin I_Y(\varphi(p))$. Следователно φ^* се продължава до хомоморфизъм

$$\varphi^* : \mathcal{O}_{\varphi(p)}(Y) = (k[Y] \setminus I_Y(p))^{-1} k[Y] \longrightarrow (k[X] \setminus I_X(p)) k[X] = \mathcal{O}_p(X)$$

на съответните локални пръстени. Ако

$$D : \mathcal{O}_p(X) \longrightarrow k$$

е k-диференциране, то

$$D\varphi^* : \mathcal{O}_{\varphi(p)}(Y) \longrightarrow k$$

е k-диференциране. Наистина, композицията $D\varphi^*$ на k-линейните изображения φ^* и D е k-линейно изображение. За $\forall f, g \in \mathcal{O}_{\varphi(p),Y}$ е в сила

$$D\varphi^*(fg) = D(\varphi^*(f)\varphi^*(g)) = \varphi^*(f) D\varphi^*(g) + \varphi^*(g) D\varphi^*(f).$$

Накрая, за всяка константа $a \in k$ имаме $D\varphi^*(a) = D(a) = 0$, така че $D\varphi^*$ е диференциране на $\mathcal{O}_{\varphi(p),Y}$.

Изображението

$$(d\varphi)_p : T_pX \longrightarrow T_{\varphi(p)}Y$$
$$(d\varphi)_p(D) = D\varphi^*$$

е k-линейно, защото

$$(d\varphi)_p(D_1 + D_2) = (D_1 + D_2)\varphi^* = (D_1\varphi^*) + (D_2\varphi^*) = (d\varphi)_p(D_1) + (d\varphi)_p(D_2) \text{ и}$$
$$(d\varphi)_p(aD) = (aD)\varphi^* = a(D\varphi^*) = a[d\varphi_p(D)].$$

(ii) Нека $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to Z$ са регулярни изображения на афинни многообразия, индуциращи хомоморфизмите

$$\varphi^* : k[Y] \longrightarrow k[X] \quad \text{и} \quad \psi^* : k[Z] \longrightarrow k[Y]$$

на k-алгебри. За произволно диференциране $D : \mathcal{O}_{p,X} \to k$ пресмятаме, че

$$d(\psi\varphi)_p(D) = D(\psi\varphi)^* = D\varphi^*\psi^* = (d\psi)_{\varphi(p)}(d\varphi)_p.$$

(iii) Тъждественото изображение $\mathrm{Id} : X \to X$ на афинно многообразие X индуцира тъждествения хомоморфизъм

$$\mathrm{Id}^* : k[X] \longrightarrow k[X],$$
$$\mathrm{Id}^*(f) = f\mathrm{Id} = f$$

на афинния координатен пръстен. Следователно за всяко k-диференциране $D : \mathcal{O}_{p,X} \to k$ е изпълнено $d(\mathrm{Id})_p(D) = D\mathrm{Id}^* = D$ и $D(\mathrm{Id})_p = \mathrm{Id} : T_pX \to T_pX$.
(iv) Ако $\varphi : X \to Y$ е бирегулярно изображение, то $\varphi^{-1} : Y \to X$ е регулярно и $\varphi^{-1}\varphi = \mathrm{Id}_X$, $\varphi\varphi^{-1} = \mathrm{Id}_Y$. Вземайки предвид (iii) и (ii) пресмятаме

$$\mathrm{Id}_{T_pX} = (d(\mathrm{Id}_X))_p(d(\varphi^{-1}\varphi))_p = (d\varphi^{-1})_{\varphi(p)}(d\varphi)_p,$$
$$\mathrm{Id}_{T_{\varphi(p)}Y} = (d(\mathrm{Id}_Y))_{\varphi(p)} = (d(\varphi\varphi^{-1}))_{\varphi(p)} = (d\varphi)_p(d\varphi)^{-1}_{\varphi(p)}$$

и стигаме до извода, че $(d\varphi)_p : T_pX \to T_{\varphi(p)}Y$ и $(d\varphi)^{-1}_{\varphi(p)} : T_{\varphi(p)}Y \to T_pX$ са взаимно обратни k-линейни изоморфизми, Q.E.D.

Задача 8.17. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^{n+1}$ е квази-афинно многообразие,*

$$\varphi : X \longrightarrow k^n,$$
$$\varphi(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, x_n)$$

е проекцията върху първите n компоненти, $Y = \overline{\varphi(X)}$ е Зариски затворената обвивка на образа $\varphi(X)$ на X в k^n и $p \in X$. Да се докаже, че:
(i) $\varphi^* : \mathcal{O}_{\varphi(p)}(Y) \to \mathcal{O}_p(k^{n+1})$ е тъждественото влагане;
(ii) $(d\varphi)_p : T_pX \to T_{\varphi(p)}Y$ е ограничението на k-диференциранията на $\mathcal{O}_p(X)$ до k-диференцирания на $\mathcal{O}_{\varphi(p)}(Y)$.