Глава 7

Размерност. Лема на Noether за нормализация.

1. Размерност на афинно многообразие

Полето F е породено от своите елементи $\xi_1, \ldots, \xi_n$ над полето k, ако

$$F = k(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \left\{ \frac{f(\xi_1, \ldots, \xi_n)}{g(\xi_1, \ldots, \xi_n)} \,\Big|\, f, g \in k[\xi_1, \ldots, \xi_n] \right\}$$

е полето от частни на k-алгебрата $k[\xi_1, \ldots, \xi_n]$, породена от $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Ако $\xi_1, \ldots, \xi_d$ е максимално трансцендентно над k подмножество на $\xi_1, \ldots, \xi_n$, то за $\forall d+1 \leq i \leq n$ съществува нетъждествено нулев полином $f(x_1, \ldots, x_d, x_i) \in k[x_1, \ldots, x_d, x_i]$, зависещ от x_i с $f(\xi_1, \ldots, \xi_d, \xi_i) = 0$. По този начин, ξ_i се оказват алгебрични над полето $k(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ на рационалните функции на $\xi_1, \ldots, \xi_d$. Обратно, ако съществува $h_i \in k(\xi_1, \ldots, \xi_d)[x_i]$ с $h_i(\xi_i) = 0$, разглеждаме

$$g_i = \sum_{j=0}^{s} c_j(x_1, \ldots, x_d) x_i^j \in k(x_1, \ldots, x_d)[x_i]$$

с $c_j(x_1, \ldots, x_d) \in k(x_1, \ldots, x_d)$ и $g_i(\xi_1, \ldots, \xi_d, x_i) = h_i(x_i)$. След привеждане на $c_j(x_1, \ldots, x_d)$ под общ знаменател преставяме $g_i = \frac{f_i}{t_i}$ като частно на полиноми $f_i \in k[x_1, \ldots, x_d, x_i]$, $t_i \in k[x_1, \ldots, x_d]$ с $t_i(\xi_1, \ldots, \xi_d) \neq 0$. Сега

$$0 = h_i(\xi_i) = g_i(\xi_1, \ldots, \xi_d, \xi_i) = \frac{f_i(\xi_1, \ldots, \xi_d, \xi_i)}{t_i(\xi_1, \ldots, \xi_d)}$$

се свежда до $f_i(\xi_1, \ldots, \xi_d, \xi_i) = 0$, така че алгебричността на ξ_i над $k(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ е достатъчна за съществуването на нетривиална полиномиална зависимост $f(\xi_1, \ldots, \xi_d, \xi_i) = 0$.

Определение 7.1. *Нека $F \supset k$ е разширение на полета, породено от $\xi_1, \ldots, \xi_n$, т.е. $F = k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Ако $\xi_1, \ldots, \xi_d$ са трансцендентни в съвкупност (т.е. алгебрично независими) над k и всяко ξ_i с $d+1 \leq i \leq n$ е алгебрично над $k(\xi_1, \ldots, \xi_d)$, то $\xi_1, \ldots, \xi_d$ е базис на трансцендентност на F над k.*

Да отбележим, че $\xi_1, \ldots, \xi_d \in F = k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ е базис на трансцендентност на F над k тогава и само тогава, когато $\xi_1, \ldots, \xi_d$ са трансцендентни над k и F е крайно разширение на $F_o = k(\xi_1, \ldots, \xi_d)$, $[F : F_o] < \infty$. За $n = d$ твърдението е тривиално. Предполагаме, че $d < n$ и прилагаме индукция по броя n на пораждащите на F над k, за да проверим, че ако $\xi_1, \ldots, \xi_d$ е базис на трансцендентност на $F = k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ над k, то $[F : k(\xi_1, \ldots, \xi_d)] < \infty$. Непосредствено се вижда, че $k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n) = k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})(\xi_n)$, защото двете страни на това равенство са полета, $k[\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n] = k[\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}][\xi_n] \subseteq k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})(\xi_n)$ и всеки елемент на $k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})[\xi_n]$ може да се представи като частно на полином на $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n$ с полином на $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Ако $h_n(x_n) \in k(\xi_1, \ldots, \xi_d)[x_n]$ е минималният полином на ξ_n над $k(\xi_1, \ldots, \xi_d)$, то $h_n(x_n)$ е неразложим в пръстена $k(\xi_1, \ldots, \xi_d)[x_n]$ на полиномите на x_n с коефициенти от полето $k(\xi_1, \ldots, \xi_d)$. Всеки полином $g(x_n) \in k(\xi_1, \ldots, \xi_d)[x_n]$ с $g(\xi_n) \neq 0$ е взаимно прост с $h_n(x_n)$, така че съществуват полиноми $u, v \in k(\xi_1, \ldots, \xi_d)[x_n]$ с $uh_n + vg = 1$. Оттук

$g(\xi_n)^{-1} = v(\xi_n) \in k(\xi_1, \ldots, \xi_d)[\xi_n]$ и $k(\xi_1, \ldots, \xi_d)(\xi_n) \subseteq k(\xi_1, \ldots, \xi_d)[\xi_n]$. Комбинирайки с $k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})[\xi_n] \subseteq k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})(\xi_n)$ получаваме

$$F = k(\xi_1, \ldots, \xi_n) = k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})[\xi_n].$$

Съгласно алгебричността на ξ_n над $k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \supseteq k(\xi_1, \ldots, \xi_d)$, полето F е крайно мерно линейно пространство над $k(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$. Продължавайки по същия начин получаваме, че F е крайно разширение на $k(\xi_1, \ldots, \xi_j)$ за $\forall j \geq d$ и $[F : k(\xi_1, \ldots, \xi_d)] < \infty$. Обратно, ако $\xi_1, \ldots, \xi_d$ са трансцендентни над k и $[F = k(\xi_1, \ldots, \xi_n) : F_o = k(\xi_1, \ldots, \xi_d)] = m < \infty$, то за $\forall d+1 \leq i \leq n$ мономите $1, \xi_i, \ldots, \xi_i^m \in F$ са линейно зависими над F_o, съгласно $\dim_{F_o}(F) = m$. Това означава, че ξ_i са алгебрични над $F_o = k(\xi_1, \ldots, \xi_d)$ и $\xi_1, \ldots, \xi_d$ е базис на трансцендентност на $F = k(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ над k.

ЛЕМА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. *Нека полето $F = k(u_1, \ldots, u_n)$ е крайнопородено разширение на полето k с базис на трансцендентност $u_1, \ldots, u_m$ над k. Тогава:*
(i) всяко трансцендентно над k подмножество $\{w_1, \ldots, w_r\} \subset F$ има $r \leq m$ елемента;
(ii) всеки друг базис на трансцендентност $y_1, \ldots, y_l$ на F над k има $l = m$ елемента.
Броят на елементите m в един, а оттам и във всеки един базис на трансцендентност на $F = k(u_1, \ldots, u_n)$ над k се нарича степен на трансцендентност на F над k и се бележи с $\operatorname{tr}\deg_k(F)$.

Доказателство: (i) По определението за базис на трансцендентност $u_1, \ldots, u_m$ на F над k, w_1 е алгебрично над $k(u_1, \ldots, u_m)$, така че съществува полином $0 \not\equiv f_1(t, u_1, \ldots, u_m) \in k[t, u_1, \ldots, u_m]$ с $f_1(w_1, u_1, \ldots, u_m) = 0$. Възоснова на трансцендентността на w_1 над k, полиномът $f_1(t, u_1, \ldots, u_m)$ зависи от поне едно u_i, $1 \leq i \leq m$. След евентуална пермутация на $u_1, \ldots, u_m$ можем да считаме, че $f_1(t, u_1, \ldots, u_m)$ зависи от u_1 и $f_1(w_1, u_1, \ldots, u_m) = 0$ е алгебрична зависимост на u_1 над $k(w_1, u_2, \ldots, u_m)$. В резултат, степента

$$[k(w_1, u_1, \ldots, u_m) : k(w_1, u_2, \ldots, u_m)] < \infty$$

е крайна. Твърдим, че F е крайно разширение на $k(w_1, u_2, \ldots, u_m)$. Наистина,

$$[F : k(w_1, u_2, \ldots, u_m)] =$$

$$[F : k(w_1, u_1, \ldots, u_m)][k(w_1, u_1, \ldots, u_m) : k(w_1, u_2, \ldots, u_m)] < \infty,$$

защото $[F : k(u_1, \ldots, u_m)] < \infty$ по определението за базис на трансцендентност $u_1, \ldots, u_m$ на F над k и

$$[F : k(w_1, u_1, \ldots, u_m)] = \frac{[F : k(u_1, \ldots, u_m)]}{[k(w_1, u_1, \ldots, u_n) : k(u_1, \ldots, u_m)]} < \infty.$$

С индукция по $1 \leq i \leq \min(m, r)$ предполагаме, че полето F е алгебрично над своето подполе $k(w_1, \ldots, w_{i-1}, u_i, \ldots, u_m)$. Тогава съществува нетъждествено нулев полином $0 \not\equiv f_i(w_1, \ldots, w_{i-1}, t, u_i, \ldots, u_m) \in k[w_1, \ldots, w_{i-1}, t, u_i, \ldots, u_m]$ с

$$f_i(w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i, u_i, \ldots, u_m) = 0. \tag{7.1}$$

Полиномът $f_i(w_1, \ldots, w_{i-1}, t, u_i, \ldots, u_m)$ зависи от поне едно u_j с $i \leq j \leq m$, защото $w_1, \ldots, w_{i-1}, w_i$ са трансцендентни над k. Без ограничение на общността считаме, че f_i зависи от u_i и разглеждаме (7.1) като алгебрична зависимост на u_i над $k(w_1, \ldots, w_i, u_{i+1}, \ldots, u_m)$. В резултат, степента

$$[k(w_1, \ldots, w_i, u_i, \ldots, u_m) : k(w_1, \ldots, w_i, u_{i+1}, \ldots, u_m)] < \infty \tag{7.2}$$

е крайна. От друга страна, индукционното предположение за алгебричност на F над $k(w_1, \ldots, w_{i-1}, u_i, \ldots, u_m)$ гарантира крайността на степените

$$[F : k(w_1, \ldots, w_{i-1}, u_i, \ldots, u_m)] < \infty,$$
$$[k(w_1, \ldots, w_i, u_i, \ldots, u_m) : k(w_1, \ldots, w_{i-1}, u_i, \ldots, u_m)] < \infty,$$

а оттам и на тяхното частно

$$[F : k(w_1, \ldots, w_i, u_i, \ldots, u_m)] < \infty. \tag{7.3}$$

Умножавайки (7.2) с (7.3) получаваме, че

$$[F : k(w_1, \ldots, w_i, u_{i+1}, \ldots, u_m)] < \infty.$$

Ако допуснем, че $r > m$, то след краен брой стъпки ще получим, че F е алгебрично над $k(w_1, \ldots, w_m)$, което противоречи на трансцендентността на $w_1, \ldots, w_r$ над k. Следователно $r \leq m$.
(ii) Ако $u_1, \ldots, u_m$ и $y_1, \ldots, y_l$ са базиси на трансцендентност на F над k, то от (i) имаме $l \leq m$ и $m \leq l$, откъдето $l = m$, Q.E.D.
До края на настоящия въпрос ще предполагаме, че всички разглеждани афинни алгебрични множества $X \subseteq k^n$ са неприводими.

Определение 7.3. *Размерността на квази-афинно или квази-проективно многообразие X е степента на трансцендентност*

$$\dim X = \operatorname{tr} \deg_k k(X)$$

на полето на рационалните функции $k(X)$ на X над k.

Интуитивно, размерността на афинно многообразие е броят на алгебрично независимите променливи, параметризиращи това многообразие. Едномерните многообразия се наричат криви, а двумерните - повърхнини.

Твърдение 7.4. *Нека X е квази-афинно или квази-прокетивно многообразие, $\emptyset \neq Y \subseteq X$ е непразно подмногообразие, т.е. Y е неприводимо Зариски затворено подмножество на X. В такъв случай,* $\dim(Y) \leq \dim(X)$ *с равенство* $\dim(Y) = \dim(X)$ *тогава и само тогава, когато $Y = X$.*

Доказателство: Достатъчно е да докажем твърдението за квази-афинно многообразие X. Тогава за произволно квази-проективно многообразие $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ и произволно стандартно афинно Зариски отворено подмножество $U_i \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ с $Y \cap U_i \neq \emptyset$ имаме $X \cap U_i \neq \emptyset$, откъдето $k(Y) = k(Y \cap U_i)$, $k(X) = k(X \cap U_i)$. В резултат, $\dim(X) = \operatorname{tr}\ \deg_k k(X) = \operatorname{tr}\ \deg_k k(X \cap U_i) = \dim(X \cap U_i)$, $\dim(Y) = \dim(Y \cap U_i)$, откъдето

$$\dim(Y) = \dim(Y \cap U_i) \leq \dim(X \cap U_i) = \dim(X).$$

За произволно подмногообразиие $Y \subseteq X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ с $\dim(Y) = \dim(X)$ и произволно стандартно афинно Зариски отворено $U_i \subset \mathbb{P}^n(k)$ с $X \cap U_i \neq \emptyset$ твърдим, че $Y \cap U_i \neq \emptyset$. В противен случай,

$$Y \subseteq X \setminus U_i = \{x = [x_0 : \ldots : x_n] \in X \ \mid\ x_i = 0\} = H_i.$$

За всяко стандартно афинно отворено подмножество $U_j \subset \mathbb{P}^n(k)$ с $Y \cap U_j \neq \emptyset$ имаме $X \cap U_j \neq \emptyset$ и $\dim(X \cap U_j) = \dim(X) = \dim(Y) = \dim(Y \cap U_j)$, откъдето $X \cap U_j = Y \cap U_j \subseteq V\left(\frac{x_i}{x_j}\right)$. Следователно $X \cap U_j \subseteq H_i = \{x \in \mathbb{P}^n(k) \ \mid\ x_i = 0\}$ и Зариски затворената обвивка $\overline{X}$ на X в $\mathbb{P}^n(k)$ се съдържа в хиперравнината H_i, $\overline{X} = \overline{X \cap U_j} \subseteq H_i$. В частност, $X \subseteq H_i$ или $X \cap U_i = \emptyset$, противно на предположението $X \cap U_i \neq \emptyset$. Това доказва, че от $X \cap U_i \neq \emptyset$ следва $Y \cap U_i \neq \emptyset$, откъдето $X \cap U_i = Y \cap U_i$, съгласно верността на твърдението за квази-афинни многообразия. Прилагайки горното разсъждение за всички U_i с $X \cap U_i \neq \emptyset$ получаваме $Y = X$.

Отсега нататък предполагаме, че $X \subseteq k^n$, а оттам и $Y \subseteq X \subseteq k^n$ са квазиафинни многообразия. Тъждественото влагане $\mathrm{Id} : Y \hookrightarrow X$ индуцира обратното включване $I(X) \subseteq I(Y)$ на идеалите на тези афинни многообразия в $k[x_1, \ldots, x_n]$. В резултат получаваме епиморфизъм $\mathrm{Id}^* : k[X] \to k[Y]$ на афинните координатни пръстени с ядро $I(Y)/I(X)$. Класовете на афинните координати пораждат афинния координатен пръстен като k-алгебра и

$$\mathrm{Id}^* : k[X] = k[x_1 + I(X), \ldots, x_n + I(X)] \longrightarrow k[x_1 + I(Y), \ldots, x_n + I(Y)] = k[Y]$$

е естественият епиморфизъм с $\mathrm{Id}^*(x_i + I(X)) = x_i + I(Y)$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ и $\mathrm{Id}^*|_k = \mathrm{Id}_k$. След евентуална пермутация на $x_1, \ldots, x_n$ можем да считаме, че $x_1 + I(X), \ldots, x_d + (X)$ са трансцендентни над k и $x_i + I(X)$ е алгебрично над $k(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))$ за $\forall d + 1 \leq i \leq n$. Пропускайки произволна полиномиална зависимост на $x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X), x_i + I(X)$ над k по модул идеала $I(Y) \supseteq I(X)$ получаваме полиномиална зависимост на $x_1+I(Y), \ldots, x_d+I(Y), x_i+I(Y)$ над k. Оттук следва, че $x_i+I(Y)$ са алгебрични над $k(x_1+I(Y), \ldots, x_n+I(Y))$ за $\forall d+1 \leq i \leq n$. Следователно произволен базис на трансцендентност на $k(x_1 + I(Y), \ldots, x_d + I(Y))$ над k е базис на трансцендентност на $k(Y)$ над k. По този начин, $\dim(Y) = \operatorname{tr\,deg}_k k(Y) \leq d = \dim(X)$. Ако $\dim(Y) = \dim(X) = d$, то $x_1 + I(Y), \ldots, x_d + I(Y)$ са трансцендентни над k. В такъв случай е достатъчно да докажем, че

$$\mathrm{Id}^* : k[X] \to k[Y]$$

е изоморфизъм на k-алгебри, за да стигнем до извода, че $\mathrm{Id} : Y \to X$ е бирегулярно и $Y = X$. Вече видяхме, че $Im(\mathrm{Id}^*) = k[Y]$. Ако $\xi \in Ker(\mathrm{Id}^*)$, то използваме алгебричността на ξ над $k(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))$ за да получим полиномиалната зависимост

$$a_m \xi^m + a_{m-1} \xi^{m-1} + \ldots + a_1 \xi + a_0 = 0 \tag{7.4}$$

на ξ с коефициенти $a_i \in k(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X))$ за $\forall 0 \leq i \leq m$. Ако допуснем, че $\xi \neq 0$, то след евентуално деление на (7.4) с подходяща степен на ξ можем да предполагаме, че $a_0(x_1 + I(X), \ldots, x_d + I(X)) \neq 0$. Прилагайки Id^* към (7.4) получаваме $a_0(x_1 + I(Y), \ldots, x_d + I(Y)) = 0$. Това противоречи на трансцендентността на $x_1 + I(Y), \ldots, x_d + I(Y)$ над k и доказва, че $Ker(\mathrm{Id}^*) = \{0\}$. Следователно $\mathrm{Id}^* : k[X] \to k[Y]$ е изоморфизъм на k-алгебри и $Y = X$, Q.E.D.

Задача 7.5. *Нека k е алгебрично затворено поле, $f \in k[x_1, \ldots, x_n] \setminus k$ е неразложим полином. Да се докаже, че афинната хиперравнина $X = V(f) \subseteq k^n$ има размерност $\dim(X) = n - 1$.*

Упътване: Ако $f(x_1, \ldots, x_n)$ зависи от x_n, то можем да разглеждаме f като алгебрична зависимост на $\overline{x_n} \in k[X]$ над разширението $k(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{n-1}}) = k(x_1 + I(X), \ldots, x_{n-1} + I(X))$. Следователно произволен базис на транцендентност на $k(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{n-1}})$ над k е базис на трансцендентност на $K(X) = F(k[X])$ над k. Ако допуснем, че съществува нетривиална полиномиална зависимост $g(\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{n-1}}) = 0$, то

$$g(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in I(X) = IV(f) = r(\langle f \rangle) = \langle f \rangle.$$

Използвайте, че всеки нетъждествено нулев полином $fh \in \langle f \rangle$ зависи от x_n.

Задача 7.6. *Да се докаже, че ако афинният координатен пръстен $k[X]$ на афинно алгебрично множество $\emptyset \neq X \subseteq k^n$ е крайномерно линейно пространство над k, то X е крайно множество.*

Упътване: Използвайте, че $x_1 + I(X), \ldots, x_n + I(X)$ са цели над k.

Задача 7.7. *Да се докаже, че ако съществува доминантно рационално изображение* $\varphi : X \dashrightarrow Y$ *на квази-афинните или квази-проективните многообразия* X, Y, *то* $\dim(X) \geq \dim(Y)$. *Ако* $\mathcal{D}$ *е областта на регулярност на доминантното рационално изображение* $\varphi : X \dashrightarrow Y$, *то слоят на* φ *над обща точка на* $\varphi(\mathcal{D})$ *е краен тогава и само тогава, когато* $\dim(X) = \dim(Y)$.

2. Лема на Noether за нормализация

Определение 7.8. *Комутативният пръстен с единица* S *е цял над своя подпръстен с единица* R, *ако всеки елемент* $s \in S$ *е цял над* R, *т.е. за* $\forall s \in S$ *съществуват* $n \in \mathbb{N}$ *и* $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1} \in R$, *така че*

$$s^n + r_{n-1}s^{n-1} + \ldots + r_1 s + r_0 = 0.$$

Лема 7.9. *Нека* T *е комутативен пръстен с единица,* S *е подпръстен с единица на* T, *а* R *е подпръстен с единица на* S. *Ако* T *е цял над* S *и* S *е цял над* R, *то* T *е цял над* R.

Доказателство: За $\forall t \in T$ съществуват $n \in \mathbb{N}$ и $s_0, \ldots, s_{n-1} \in S$, така че

$$t^n + s_{n-1}t^{n-1} + \ldots + s_1 t + s_0 = 0.$$

Това позволява разглеждането на t като цял над $R[s_0, \ldots, s_{n-1}]$ елемент на T. Следователно $R[s_0, \ldots, s_{n-1}][t] = \sum\limits_{j=1}^{p} R[s_0, \ldots, s_{n-1}]\mu_j$ е крайно породен модул над $R[s_0, \ldots, s_{n-1}]$, съгласно Твърдение 2.27. По предположение, $s_0, \ldots, s_{n-1} \in S$ са цели над R, така че $R[s_0, \ldots, s_{n-1}] = \sum\limits_{i=1}^{q} R\lambda_i$ е крайно породен R-модул по Следствие 2.28. Оттук $R[s_0, \ldots, s_{n-1}] = \sum\limits_{i=1}^{q}\sum\limits_{j=1}^{p} R\lambda_i\mu_j$ е подпръстен с единица на T, който е крайно породен R-модул. Сега от $R[t] \subseteq R[s_0, \ldots, s_{n-1}, t]$ получаваме, че t е цял над R, прилагайки Твърдение 2.27. Това доказва, че пръстенът T е цял над своя подпръстен с единица R, Q.E.D.

Теорема 4. (Лема на Noether за нормализация) *Нека* k *е поле,* $A = k[\eta_1, \ldots, \eta_n]$ *е крайно породена* k*-алгебра без делители на нулата, която не е крайномерно линейно пространство над* k, *а* F *е полето от частни на* A. *Ако* F *е от степен на трансцендентност* $\operatorname{tr}\deg_k(F) = d$ *над* k, *то съществува базис на трансцендентност* $\xi_1, \ldots, \xi_d \in A$ *на* F *над* k, *така че* k*-алгебрата* $A = k[\eta_1, \ldots, \eta_n]$ *е цяла над* $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$.

Доказателство: Степента на трансцендентност d на F над k е максималният брой на трансцендентните над k елементи $\eta_1, \ldots, \eta_d$ на пораждащото множество $\eta_1, \ldots, \eta_n$ на $F = k(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ над k. Оттук, $d \leq n$. Ако $d = n$, то $\eta_1, \ldots, \eta_n$ е базис на трансцендентност на F над k с необходимите свойства.
Отсега нататък ще предполагаме, че $n > d$. Ще работим с индукция по броя на пораждащите n на A като k-алгебра. Съгласно алгебричността на $\eta_1, \ldots, \eta_n$ над k, съществува полином $0 \not\equiv f(t_1, \ldots, t_n) \in k[t_1, \ldots, t_n]$ с

$$0 = f(\eta_1, \ldots, \eta_n) = \sum_{\alpha} c_\alpha \eta_1^{\alpha_1} \ldots \eta_n^{\alpha_n},$$

където $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ и сумата е крайна.
Твърдим, че $\operatorname{tr}\deg_k(F) = d \geq 1$, защото в противен случай $[F : k] < \infty$ и $\eta_1, \ldots, \eta_n \in A \subseteq F$ са алгебрични, а оттам и цели над полето k. Тогава по Следствие 2.28, крайно породената k-алгебра $A = k[\eta_1, \ldots, \eta_n]$ е крайномерно линейно пространство над полето k, противно на предположението. Това доказва, че $\operatorname{tr}\deg_k(F) \geq 1$. След евентуална преномерация на $\eta_1, \ldots, \eta_n$ можем да считаме, че η_1 е трансцендентно над k.

Избираме достатъчно голямо естествено число N, така че $N > \alpha_i$ за $\forall \alpha$ с $c_\alpha \neq 0$ и $\forall 1 \leq i \leq n$. Полагаме

$$\zeta_i = \eta_i - \eta_1^{N^{i-1}} \quad \text{за } \forall 2 \leq i \leq n.$$

Въвеждаме обратната лексикографска наредба на мономи $x^\alpha >_{\text{invlex}} x^\beta$, съгласно която посоченото неравенство е в сила при $\alpha_n = \beta_n$, $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$, $\ldots$, $\alpha_{i+1} = \beta_{i+1}$, $\alpha_i > \beta_i$ за някое $1 \leq i \leq n$. Нека $c_\gamma \eta^\gamma$ е максималният относно обратната лексикографска наредба моном на f с ненулев коефициент $c_\gamma \neq 0$. Представяме

$$0 = f\left(\eta_1, \zeta_2 + \eta_1^N, \ldots, \zeta_n + \eta_1^{N^{n-1}}\right) = f\left(\eta_1, \eta_1^N, \ldots, \eta_1^{N^{n-1}}\right) + f_o(\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$$

чрез полином f_o на $\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, чиито всички мономи са кратни на поне един от елементите $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$. Твърдим, че мономите на

$$f\left(\eta_1, \eta_1^N, \ldots, \eta_1^{N^{n-1}}\right) = \sum_\alpha c_\alpha \eta_1^{\alpha_1 + \alpha_2 N + \ldots + \alpha_n N^{n-1}}$$

не могат да се унищожат. Поради трансцендентността на η_1 над k, унищожаването на мономи $c_\alpha \eta_1^{\alpha_1 + \alpha_2 N + \ldots + \alpha_n N^{n-1}}$ и $c_\beta \eta_1^{\beta_1 + \beta_2 N + \ldots + \beta_n N^{n-1}}$ се случва само при равенство $\alpha_1 + \alpha_2 N + \ldots + \alpha_n N^{n-1} = \beta_1 + \beta_2 N + \ldots + \beta_n N^{n-1}$ на степенните показатели на η_1. Оттук $(\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2)N + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)N^{n-1} = 0$ с $|\alpha_i \beta_i| \leq N - 1$ води до $\alpha_i = \beta_i$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ и доказва липсата на унищожения на мономи в $f\left(\eta_1, \eta_1^N, \ldots, \eta_1^{N^{n-1}}\right)$. В частност, $c_\gamma \eta_1^{\gamma_1 + \gamma_2 N + \ldots + \gamma_n N^{n-1}}$ е старшият член на $f\left(\eta_1, \eta_1^N, \ldots, \eta_1^{N^{n-1}}\right)$. Степенните показатели на η_1 в мономите на $f_o(\eta_1, \zeta_2, \ldots \ldots, \zeta_n)$ са строго по-малки от $\gamma_1 + \gamma_2 N + \ldots + \gamma_n N^{n-1}$, така че можем да разглеждаме полинома $f\left(\eta_1, \zeta_2 + \eta_1^N, \ldots, \zeta_n + \eta_1^{N^{n-1}}\right) = 0$ като цяла зависимост на η_1 над $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ след деление с $c_\gamma \in k^*$.

По индукционно предположение имаме базис на трансцендентност $\xi_1, \ldots, \xi_d \in k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ на $k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ над k, така че $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ е цял над $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. Да отбележим, че $k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n] = k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$, съгласно $\eta_i = \zeta_i + \eta_1^{N^{i-1}} \in k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ за $\forall 2 \leq i \leq n$ и $\zeta_i = \eta_i - \eta_1^{N^{i-1}} \in k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]$ за $\forall 2 \leq i \leq n$. В резултат, $F = k(\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ съвпада с полето от частни на $k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$. От алгебричността на η_1 над $k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ следва, че базисът на трансцендентност $\xi_1, \ldots, \xi_d$ на $k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ над k е и базис на тарнсцендентност на $F = k(\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ над k. По предположение,

$$\xi_1, \ldots, \xi_d \in k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n] \subset k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n] = k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n].$$

Пръстенът $A = k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ е цял над $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$. По-точно, за $\forall a \in A$ алгебрата $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n][a]$ се съдържа в пръстена с единица $A = k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n][\eta_1]$. Елементът $\eta_1 \in A$ е цял над $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$, така че A е крайно породен $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$-модул. Прилагайки Твърдение 2.27 получаваме, че всеки елемент a на A е цял над $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$. Сега от Лема 7.9 следва, че A е цял над $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$, защото A е цял над $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ и $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ е цял над $k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$, Q.E.D.

Следствие 7.10. *Произволно квази-афинно многообразие $X \subseteq k^n$ с размерност $\dim(X) = d$ има крайно регулярно доминантно изображение $\xi : X \to k^d$ върху d-мерно афинно пространство.*

Доказателство: Афинният координатен пръстен $k[X]$ е крайно породена k-алгебра без делители на нулата. Прилагайки Лемата на Ньотер за нормализация получаваме базис на трансцендентност $\xi_1, \ldots, \xi_d$ на полето $k(X)$ на рационалните функции върху X, така че $\xi_1, \ldots, \xi_d \in k[X]$ и $k[X]$ е цял над

$k[\xi_1, \dots, \xi_d]$. Тъждественото влагане $k[\xi_1, \dots, \xi_d] \hookrightarrow k[X]$ индуцира доминантното регулярно изображение

$$\xi : X \longrightarrow k^d,$$
$$\xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_d(x)) \text{ за } \forall x \in X.$$

Изображението ξ е крайно, защото полето на рационалните функции $k(X) = k(x_1 + I(X), \dots, x_n + I(X))$ на X е крайно разширение на полето на рационалните функции $k(k^d) = k(\xi_1, \dots, \xi_d)$ на k, Q.E.D.

Задача 7.11. *Да се докаже, че ако квази-афинно или квази-прективно многообразие X има крайно доминантно рационално изображение $\varphi : X \dashrightarrow k^d$, то X е с размерност d.*

Задача 7.12. *Нека X е квази-проективно многообразие с размерност* $\dim(X) = d$. *Да се докаже, че съществува крайно доминантно рационално изображение $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^d(k)$.*

3. Повдигане и спускане на идеали

Нека R е подпръстен с единица на комутативния пръстен с единица S, $\mathfrak{p} \triangleleft R$, $\mathfrak{q} \triangleleft S$ са идеали. Ако $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$, то казваме, че $\mathfrak{q}$ лежи над $\mathfrak{p}$.
Непосредствено се вижда, че ако $\mathfrak{q}$ е прост идеал в S, то $\mathfrak{q} \cap R$ е прост идеал в R. По-точно, хомоморфизмът на пръстени $\pi : R \to S/\mathfrak{q}$, $\pi(a) = a + \mathfrak{q}$ има ядро $\ker(\pi) = R \cap \mathfrak{q}$, така че образът $\mathrm{im}(\pi) \simeq R/\ker(\pi) = R/R \cap \mathfrak{q}$ е подпръстен на областта $S/\mathfrak{q}$ и няма делители на нулата. Оттук идеалът $\mathfrak{q} \cap R \triangleleft R$ е прост.

Лема 7.13. *Нека R е подпръстен с единица на комутативната област с единица S, а $\mathfrak{p} \triangleleft R$ е прост идеал. В такъв случай, S съдържа прост идеал $\mathfrak{q} \triangleleft S$, лежащ над $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$, тогава и само тогава, когато $\mathfrak{p}S$ лежи над $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}S \cap R = \mathfrak{p}$.*

Доказателство: Ако $\mathfrak{q} \triangleleft S$ е прост идеал, лежащ над $\mathfrak{p}$, то от

$$\mathfrak{p}S \cap R \subseteq \mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}S \cap R$$

следва $\mathfrak{p}S \cap R = \mathfrak{p}$.
Обратно, нека $\mathfrak{p}S \cap R = \mathfrak{p}$. Допълнението $R \setminus \mathfrak{p}$ на простия идеал $\mathfrak{p}$ е мултипликативно затворено подмножество на S, така че можем да образуваме локализацията $S_\mathfrak{p} = (R \setminus \mathfrak{p})^{-1}S$ на S. От $\mathfrak{p}S \cap (R \setminus \mathfrak{p}) = \emptyset$ следва, че $1 \notin \mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$, защото в противен случай съществува $r \in R \setminus \mathfrak{p}$ с $r = r.1 \in \mathfrak{p}S_\mathfrak{p} \cap (R \setminus \mathfrak{p})$. Следователно съществува максимален идеал $\mathfrak{p}S_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{M} \triangleleft S_\mathfrak{p}$. Нека $\mathfrak{q} = \mathfrak{M} \cap S$. Тогава $S/\mathfrak{q} = S/(\mathfrak{M} \cap S)$ е подпръстен на полето $S_\mathfrak{p}/\mathfrak{M}$, така че $S/\mathfrak{q}$ е област на цялост и идеалът $\mathfrak{q} \triangleleft S$ е прост.
От $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{M}$ следва $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{M} \cap R = (\mathfrak{M} \cap S) \cap R = \mathfrak{q} \cap R$. От друга страна, максималният идеал $\mathfrak{M} \triangleleft S_\mathfrak{p}$ е собствен и не пресича множеството $R \setminus \mathfrak{p}$ на обратимите елементи на $S_\mathfrak{p}$. В резултат, $\mathfrak{q} \cap R = (\mathfrak{M} \cap S) \cap R = \mathfrak{M} \cap R \subseteq \mathfrak{p}$, така че $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$ и простият идеал $\mathfrak{q} \triangleleft S$ лежи над простия идеал $\mathfrak{p} \triangleleft R$, Q.E.D.
Да разгледаме геометричен пример за дадената ситуация. Нека $f : X \to Y$ е регулярно доминантно изображение на афинни многообразия $X \subseteq k^n$, $Y \subseteq k^m$ над алгебрично затворено поле k. Изображението $f = (f_1, \dots, f_m)$ е съставено от регулярни функции $f_i : X \to k$. Втората канонична проекция $\pi_2 : \Gamma_f \to Y$ на графика $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ на f е доминантно регулярно изображение, индуциращо тъждественото влагане

$$k[Y] \hookrightarrow k[\Gamma_f]$$

на афинните координатни пръстени. За произволно подмногообразие $Z \subseteq \Gamma_f$ твърдим, че $I_{\Gamma_f}(Z) \cap k[Y] = I_Y(\pi_2(Z))$. Ще проверим последното равенство без да предполагаме, че Z е неприводимо. От една страна, ако полином

$g \in k[y_1, \ldots, y_m]$ се анулира във всички точки $(x, f(x)) \in Z$m то g се анулира върху $\pi_2(x, f(x)) = f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in \pi_2(Z)$ за всички точки $\pi_2(x, f(x)) \in \pi_2(Z)$. От друга страна, ако полином $g(y_1, \ldots, y_m)$ се анулира върху $\pi_2(Z)$, можем да разглеждаме g като полином на $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$, анулиращ се върху Z. Това проверява равенството $I_{\Gamma_f}(Z) \cap k[Y] = I_Y(\pi_2(Z))$. Простият идеал $I_{\Gamma_f}(Z) \cap k[Y] = I_Y(S)$ отговаря на подмногообразие $S \subseteq Y$. От $I_Y(\pi_2(Z)) = I_Y(S)$ следва $I(\pi_2(Z)) = I(S)$ за съответните идеали в полиномиалния пръстен $k[y_1, \ldots, y_m]$. В резултат,

$$\overline{\pi_2(Z)} = VI(\pi_1(Z)) = VI(S) = \overline{S}.$$

Нека сега разгледаме прост идеал в $k[Y]$. Той е от вида $I_Y(S)$ за някакво пдомногообразие $S \subseteq Y$. Съгласно Лема 7.13, достатъчно условие за повдигането на $I_Y(S)$ до прост идеал $I_{\Gamma_f}(Z) \triangleleft k[\Gamma_f]$ над $I_{\Gamma_f}(Z) \cap k[Y] = I_Y(S)$ е $I_Y(S)k[\Gamma_f] \cap k[Y] = I_Y(S)$. Включването $I_Y(S) \subseteq I_Y(S)k[\Gamma_f] \cap k[Y]$ е ясно. За обратното включване забелязваме, че $I_Y(S)k[\Gamma_f] \subseteq I_{\Gamma_f}(\pi_2^{-1}(S))$. Следователно

$$I_Y(S)k[\Gamma_f] \cap k[Y] \subseteq I_{\Gamma_f}(\pi_2^{-1}(S)) \cap k[Y] = I_Y(\pi_2\pi_2^{-1}(S)) = I_Y(S)$$

и $I_Y(S)k[\Gamma_f] \cap k[Y] = I_Y(S)$. Ако простият идеал $I_{\Gamma_f}(Z)$ над $I_{\Gamma_f}(Z) \cap k[Y] = I_Y(S)$ отговаря на подмногообразие $Z \subseteq \Gamma_f$, то Зариски затворените обвивки $\overline{\pi_2(Z)} = \overline{S}$ съвпадат, така че $\pi_2(Z) \subseteq \overline{S}$ и $Z \subseteq \pi_2^{-1}(\overline{S})$ е неприводима компонента на праобраза $\pi_2^{-1}(\overline{S})$ на афинното многоборазие $\overline{S} \subseteq \overline{Y} \subseteq k^m$ в графика Γ_f.

Лема 7.14. *Нека S е комутативен пръстен с единица, R е подпръстен с единица на S, S е цял над R и $\mathfrak{q}$ е прост идеал в S. В такъв случай, идеалът $\mathfrak{q} \triangleleft S$ е максимален тогава и само тогава, когато идеалът $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap R$ е максимален.*

Доказателство: Ще докажем, че $R/\mathfrak{p}$ е поле тогава и само тогава, когато $S/\mathfrak{q}$ е поле. За целта да забележим, че фактор-пръстенът $S/\mathfrak{q}$ е цял над фактор-пръстена $R/\mathfrak{p}$. По-точно, за $\forall s \in S$ с цяла зависимост

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_{n-1}s + a_n = 0$$

над $R \ni a_1, \ldots, a_n$ получаваме равенството

$$(s + \mathfrak{q})^n + (a_1 + \mathfrak{q})(s + \mathfrak{q})^{n-1} + \ldots + (a_{n-1} + \mathfrak{q})(s + \mathfrak{q}) + (a_n + \mathfrak{q}) = 0. \qquad (7.5)$$

Понеже $R/\mathfrak{p} = R/\mathfrak{q} \cap R$ е подпръстен на $S/\mathfrak{q}$, можем да отъждествим $a_i + \mathfrak{q}$ с $a_i + \mathfrak{p}$ за $a_i \in R$ и да разглеждаме (7.5) като цяла зависимост на $s + \mathfrak{q}$ над $R/\mathfrak{p}$.
Да допуснем, че $R/\mathfrak{p}$ е поле и да разгледаме произволен ненулев елемент $y \in (S/\mathfrak{q}) \setminus \{\mathfrak{q}\}$. Ако

$$y^n + \alpha_1 y^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} y + \alpha_n = 0$$

е цялата зависимост на y над $R/\mathfrak{p} \ni \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ от минимална степен, то почленното умножение с $\alpha_n^{-1} y^{-1}$ за $\alpha_n^{-1} \in R/\mathfrak{p}$ дава

$$y^{-1} = -\alpha_n^{-1}(y^{n-1} + \alpha_1 y^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1}) \in S/\mathfrak{q}.$$

Следователно y е обратим в $S/\mathfrak{q}$ и $S/\mathfrak{q}$ е поле.
Обратно, ако $S/\mathfrak{q}$ е поле и $x \in (R/\mathfrak{p}) \setminus \{\mathfrak{p}\}$ е произволен ненулев елемент, то съществува $x^{-1} \in S/\mathfrak{q}$. Нека

$$x^{-m} + c_1 x^{-m+1} + \ldots + c_{m-1} x^{-1} + c_m = 0$$

е цяла зависимост на x^{-1} над $R/\mathfrak{p} \ni c_1, \ldots, c_m$. Умножавайки почленно с x^{m-1} получаваме

$$x^{-1} = -(c_1 + c_2 x + \ldots + c_m x^{m-1}) \in R/\mathfrak{p}.$$

Това доказва, че x е обратим в $R/\mathfrak{p}$ и $R/\mathfrak{p}$ е поле, Q.E.D.

Лема 7.15. *Нека S е комутативна област с единица, R е подпръстен с единица на S, S е цял над R и $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$ са различни прости идеали в S. Тогава*

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap R \subsetneq \mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2$$

са различни прости идеали в R.

Доказателство: Да допуснем, че $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}$ за различни прости идеали $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$ в S. Локализацията

$$S_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{s}{r} \ \middle| \ s \in S, \quad r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$$

относно $\mathfrak{p}$ или $R \setminus \mathfrak{p}$ е цяла над локализацията

$$R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{r_1}{r} \ \middle| \ r_1 \in R, \quad r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\},$$

защото произволна цяла зависимост

$$s^m + r_1 s^{m-1} + \ldots + r_{m-1} s + r_m = 0$$

на $s \in S$ над $R \ni r_1, \ldots, r_m$ индуцира цяла зависимост

$$\left(\frac{s}{r}\right)^m + \rho_1 \left(\frac{s}{r}\right)^{m-1} + \ldots + \rho_{m-1}\left(\frac{s}{r}\right) + \rho_m = 0$$

на $\frac{s}{r}$ над $R_{\mathfrak{p}} \ni \rho_1, \ldots, \rho_m$ след почленно умножение с r^{-m} за $r \in R \setminus \mathfrak{p}$.
Твърдим, че локализациите $(\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \lhd S_{\mathfrak{p}}$ на $\mathfrak{q}_j \lhd S$ относно $\mathfrak{p}$ са прости идеали, лежащи над локализацията $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \lhd R_{\mathfrak{p}}$ на $\mathfrak{p} \lhd R$ относно $\mathfrak{p}$. За простотата на $(\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \lhd S_{\mathfrak{p}}$ да предположим, че $\frac{s_1}{r_1}\frac{s_2}{r_2} \in (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}}$ с $s_1, s_2 \in S$, $r_1, r_2 \in R \setminus \mathfrak{p}$. Тогава от $s_1 s_2 \in \mathfrak{q}_j$ следва $s_1 \in \mathfrak{q}_j$ или $s_2 \in \mathfrak{q}_j$. В резултат, $\frac{s_1}{r_1} \in (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}}$ или $\frac{s_2}{r_2} \in (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}}$ и идеалът $(\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \lhd S_{\mathfrak{p}}$ е прост. Относно $(\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \cap R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ забелязваме, че от $\mathfrak{p} = \mathfrak{q}_j \cap R \subseteq \mathfrak{q}_j$ следва $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \subseteq (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}}$. Включванията $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \subseteq R_{\mathfrak{p}}$ и $R_{\mathfrak{p}} \subseteq S_{\mathfrak{p}}$ дават $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \subseteq S_{\mathfrak{p}}$, а оттам и $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} \subseteq (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \cap S_{\mathfrak{p}}$. Обратно, ако $\frac{s}{r_1} = \frac{r_2}{r_3} \in (\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \cap R_{\mathfrak{p}}$ с $s \in \mathfrak{q}_j$, $r_1, r_3 \in R \setminus \mathfrak{p}$, $r_2 \in R$, то $x := sr_3 = r_1 r_2 \in \mathfrak{q}_j \cap R = \mathfrak{p}$. В резултат, $\frac{r_2}{r_3} = \frac{x}{r_1 r_3} \in \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ и $(\mathfrak{q}_j)_{\mathfrak{p}} \cap R_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$. Това доказва, че $(\mathfrak{q}_1)_{\mathfrak{p}} \cap R_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{q}_2)_{\mathfrak{p}} \cap R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ за простите идеали $(\mathfrak{q}_1)_{\mathfrak{p}}$, $(\mathfrak{q}_2)_{\mathfrak{p}}$ в $S_{\mathfrak{p}}$.
Пръстенът $R_{\mathfrak{p}}$ е локален с единствен максимален идеал $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$. Съгласно Лема 7.14, простите идеали $(\mathfrak{q}_1)_{\mathfrak{p}} \subseteq (\mathfrak{q}_2)_{\mathfrak{p}}$ над $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ са максимални идеали в $S_{\mathfrak{p}}$, защото $S_{\mathfrak{p}}$ е цял над $R_{\mathfrak{p}}$. Следователно $(\mathfrak{q}_1)_{\mathfrak{p}} = (\mathfrak{q}_2)_{\mathfrak{p}}$ съвпадат. Сега за произволно $s_2 \in \mathfrak{q}_2 \setminus \mathfrak{q}_1$ съществуват $s_1 \in \mathfrak{q}_1$ и $r \in R \setminus \mathfrak{p}$, така че $s_2 = \frac{s_1}{r}$. Оттук, $s_2 r = s_1 \in \mathfrak{q}_1$ за простия идеал $\mathfrak{q}_1 \lhd S$ с $s_2 \notin \mathfrak{q}_1$ и $r \in R \setminus \mathfrak{p} \subseteq S \setminus \mathfrak{q}_1$ е противоречие, доказващо $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \mathfrak{p}_2$ за $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2$, Q.E.D.
Ако S е комутативна област с единица, R подпръстен с единица на S и $\mathfrak{p}$ е прост идеал в R, то локализацията $S_{\mathfrak{p}} := (R \setminus \mathfrak{p})^{-1} S$ на S относно $\mathfrak{p}$ не винаги е локален пръстен. Следващата задача дава геометричен пример за това.

Задача 7.16. *Нека $f \in k[x_1]$ е полином от нечетна степен,*

$$X = \{(x_1, x_2) \in k^2 \ \mid \ x_2^2 = f(x_1)\},$$

$f(0) = a^2$ за някое $a \in k^* = k \setminus \{0\}$. Да се докаже, че:
(i) X е афинно многообразие;
(ii) афинният координатен пръстен $k[X]$ на X е цял над полиномиалния пръстен $k[x_1]$;
(iii) подпръстенът

$$k[X]_{\langle x_1 \rangle} = \left\{ \frac{g(\overline{x_1}, \overline{x_2})}{t(\overline{x_1})} \ \middle| \ g \in k[x_1, x_2], \quad h \in k[x_1], \quad h(0) \neq 0, \quad \overline{x_i} = x_i + I(X) \right\}$$

на функционалното поле

$$k(X) = \left\{ \frac{g(\overline{x_1}, \overline{x_2})}{h(\overline{x_1}, \overline{x_2})} \ \middle| \ g, h \in k[x_1, x_2], \quad \overline{x_i} = x_i + I(X) \right\}$$

не е локален. По-точно, ако $I_X((0,a)) \triangleleft k[X]$ и $I_X((0,-a)) \triangleleft k[X]$ са максималните идеали на точките $(0,a),(0,-a) \in X$, то $\mathfrak{M}_1 := (k[x_1] \setminus \langle x_1 \rangle)^{-1} I_X((0,a))$ и $\mathfrak{M}_2 := (k[x_1] \setminus \langle x_1 \rangle)^{-1} I_X((0,-a))$ са различни максимални идеали в $k[X]_{\langle x_1 \rangle}$.

Твърдение 7.17. *Нека комутативната област с единица S е цял над своя подпръстен с единица R, а $\mathfrak{p}$ е прост идеал в R. Тогава съществува прост идеал $\mathfrak{q} \triangleleft S$ над $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p}$.*

Доказателство: Локализацията $S_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{s}{r} \ \middle| s \in S, \ \ r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$ на S относно $\mathfrak{p}$ е цяла над локализацията $R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{r_1}{r} \ \middle| \ r_1 \in R, \ \ r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$ на R, съгласно доказателството на Лема 7.15. Разглеждаме комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & S \arrow[d, "\beta"] \\ R_{\mathfrak{p}} \arrow[r] & S_{\mathfrak{p}} \end{tikzcd}$$

от влагания на области. Произволен максимален идеал $\mathfrak{N} \triangleleft S_{\mathfrak{p}}$ лежи над максимален идеал $\mathfrak{N} \cap R_{\mathfrak{p}} \triangleleft R_{\mathfrak{p}}$, съгласно Лема 7.14. Пръстенът $R_{\mathfrak{p}}$ е локален, така че

$$\mathfrak{N} \cap R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{r_1}{r} \ \middle| \ r_1 \in \mathfrak{p}, \ \ r \in R \setminus \mathfrak{p} \right\}$$

съвпада с единствения максимален идеал $\mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$ на $R_{\mathfrak{p}}$.
Твърдим, че $\mathfrak{q} := \mathfrak{N} \cap S$ е прост идеал в S, защото фактор-пръстенът $S/\mathfrak{q}$ е подпръстен на полето $S_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{N}$. Остава да проверим, че $\mathfrak{q} \triangleleft S$ лежи над $\mathfrak{q} \cap R = \mathfrak{p} \triangleleft R$. Ако $r \in \mathfrak{N} \cap R \subseteq \mathfrak{N} \cap R_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}}$, то съществуват $r_1 \in \mathfrak{p}$ и $r_0 \in R \setminus \mathfrak{p}$, така че $r = \frac{r_1}{r_0}$. В резултат, $r_1 = r r_0 \in \mathfrak{p}$ с $r_0 \notin \mathfrak{p}$ дава $r \in \mathfrak{p}$ за простия идеал $\mathfrak{p} \triangleleft R$. Това доказва включването $\mathfrak{N} \cap R \subseteq \mathfrak{p}$. За обратното включване използваме, че $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}_{\mathfrak{p}} = \mathfrak{N} \cap R_{\mathfrak{p}} \subseteq \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{p} \subseteq R$. Това доказва $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{N} \cap R$ и $\mathfrak{p} = \mathfrak{N} \cap R = \mathfrak{q} \cap R$, Q.E.D.

Следствие 7.18. *Нека комутативната област с единица S е цяла над своя подпръстен с единица R и $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_m$ е редица от прости идеали в R. Тогава съществува редица от прости идеали $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_m$ в S, така че $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ за $\forall 1 \leq i \leq m$.*

Доказателство: Твърдение 7.17 дава съществуването на прост идеал $\mathfrak{q}_1 \triangleleft S$ над $\mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{p}_1$. В доказателството на Лема 7.14 проверихме, че комутативната област с единица $S/\mathfrak{q}_1$ е цяла над комутативната област с единица $R/\mathfrak{p}_1$. Влагането на $R/\mathfrak{p}_1$ в $S/\mathfrak{q}_1$ е по правилото

$$R/\mathfrak{p}_1 \longrightarrow R + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1,$$
$$r + \mathfrak{p}_1 \mapsto r + \mathfrak{q}_1 \quad \text{за} \quad \forall r \in R.$$

Следователно съществува прост идеал $\overline{\mathfrak{q}_2} \triangleleft S/\mathfrak{q}_1$ над $\overline{\mathfrak{q}_2} \cap (R + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1$. Идеалът $\overline{\mathfrak{q}_2} = \mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1$ е фактор на прост идеал $\mathfrak{q}_2 \triangleleft S$, съдържащ $\mathfrak{q}_1$. Твърдим, че от $(\mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1) \cap (R + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1$ следва $\mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2$. Наистина, за $\forall x \in \mathfrak{p}_2$ имаме $x + \mathfrak{q}_1 \in \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1$, така че съществува $y \in \mathfrak{q}_2$ с $x + \mathfrak{q}_1 = y + \mathfrak{q}_1$. От $x - y \in \mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$ и $y \in \mathfrak{q}_2$ следва $x \in \mathfrak{q}_2$ и $\mathfrak{p}_2 \subseteq \mathfrak{q}_2 \cap R$. Обратно, $\forall r \in \mathfrak{q}_2 \cap R$ индуцира елемент $r + \mathfrak{q}_1 \in (\mathfrak{q}_2/\mathfrak{q}_1) \cap (R + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1) = \mathfrak{p}_2 + \mathfrak{q}_1/\mathfrak{q}_1$. Следователно съществува $r_o \in \mathfrak{p}_2$ с $r + \mathfrak{q}_1 = r_o + \mathfrak{q}_1$. Оттук $r - r_o \in \mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ и $r \in \mathfrak{p}_2$. Това доказва $\mathfrak{q}_2 \cap R \subseteq \mathfrak{p}_2$ и $\mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2$. Простият идеал $\mathfrak{q}_2 \triangleleft S$ съдържа строго простия идеал $\mathfrak{q}_1 \triangleleft S$, защото от $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$ следва $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{q}_1 \cap R = \mathfrak{q}_2 \cap R = \mathfrak{p}_2$. Продължавайки по същия начин повдигаме строго растящата редица $\mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_m$ от прости идеали в R до строго растяща редица $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_m$ от прости идеали в S с $\mathfrak{q}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$ за $\forall 1 \leq i \leq m$, Q.E.D.

4. Топологична размерност. Размерност на Krull.

Определение 7.19. *Размерността на неприводимо топологично пространство X е супремумът на неотрицателните цели n, за които съществува строго растяща редица*

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_n = X$$

от непразни, неприводими, затворени подмножества $Z_i \subseteq X$.
Ако топологичното пространство $X = \cup_{\alpha \in A} X_\alpha$ е обединение на неприводими подпространства X_α, то размерността на X е супремумът

$$\dim(X) = \sup_{\alpha \in A} \dim(X_\alpha)$$

на размерностите на неприводимите компоненти α.

Размерността на квази-афинно или квази-проективно алгебрично множество X относно топологията на Зариски се нарича топологична размерност на X и се бележи с $\dim_{Zar}(X)$. Ще докажем, че над алгебрично затворено поле k, размерността $\dim(X) = \operatorname{tr}\deg_k(k(X))$ на квази-афинно или квази-проективно многообразие X съвпада с топологичната размерност $\dim_{Zar}(X)$.
Твърдим, че всяко квази-афинно или квази-проективно многообразие X има топологична размерност $\tau = \dim_{Zar}(X) \leq \dim(X) = d$ и съществува строго растяща редица

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_\tau = X$$

от непразни, неприводими, Зариски затворени подмножества с дължина $\tau + 1$.
По-точно, по Твърдение 7.4, всяка строго растяща редица

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_m = X \tag{7.6}$$

от непразни, неприводими, Зариски затворени подмножества $Z_i \subseteq X$ има строго растяща редица от размерности

$$0 \leq \dim(Z_0) < \dim(Z_1) < \ldots < \dim(Z_{m-1}) < \dim(X).$$

Сега от $\dim(Z_i) \in \{0, 1, \ldots, d\}$ за $\forall 0 \leq i \leq m$ следва $m + 1 \leq d + 1$ и $d \geq \tau = \dim_{Zar}(X)$. Ако допуснем, че не съществува строго растяща редица (7.6) с $m + 1 = \tau + 1$ члена, то всички редици от вида (7.6) са с дължина $\leq \tau$ и $\dim_{Zar}(X) \leq \tau - 1$, противно на избора на $\tau = \dim_{Zar}(X)$. Следователно съществува редица (7.6) с $\tau + 1$ члена. Всяка такава редица е неуплътняема и в нея Z_0 е точка.
Размерността на квази-афинно или квази-проективно алгебрично множество X е крайна, защото $X = X_1 \cup \ldots \cup X_l$ е обединение на краен брой неприводими компоненти X_i с крайни топологични размерности $\dim_{Zar}(X_i) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.
За да докажем равенството $\dim(X) = \dim_{Zar}(X)$ ще преминем към афинно Зариски отворено подмножество $X_o \subseteq X$, за да сравним $\dim(X_o)$ и $\dim_{Zar}(X_o)$ с размерността на Krull на афинния координатен пръстен $k[X_o]$ на X_o.

Определение 7.20. *Размерността на Krull $\dim_{Krull}(R)$ на комутативен пръстен с единица R е супремъмът на неотрицателните цели числа n, за които съществува строго растяща редица*

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_m \tag{7.7}$$

от прости идеали $\mathfrak{p}_i \triangleleft R$.

Ако пръстенът R е ньотеров, то всяка строго растяща редица от идеали е крайна. Следователно всяка строго растяща редица от прости идеали е крайна и ньотеровите пръстени имат крайна размерност на Krull.

Твърдим, че ако $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие над алгебрично затворено поле k, то размерността на Krull на афинния координатен пръстен $\kappa = \dim_{Krull}(k[X]) \leq \dim(X) = d$ не надминава размерността на многообразието и съществува строго растяща редица

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_\kappa$$

от $\kappa + 1$ прости идеали в $k[X]$. Наистина, всяка строго растяща редица

$$\mathfrak{p}_0 \subsetneqq \mathfrak{p}_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq \mathfrak{p}_m \triangleleft k[X] \tag{7.8}$$

от прости идеали в $k[X]$ е от вида $\mathfrak{p}_i = I_X(Y_i) = I(Y_i)/I(X)$ за полиномиалните идеали $I(X) \subseteq I(Y_i) \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ на неприводими подмногообразия $Y_i \subseteq X$. Редицата (7.8) се повдига до строго растяща редица

$$I(Y_0) \subsetneqq I(Y_1) \subsetneqq \ldots \subsetneqq I(Y_m) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$$

от прости идеали в $k[x_1, \ldots, x_n]$ и на строго намаляваща редица

$$Y_m \subsetneqq Y_{m-1} \subsetneqq \ldots \subsetneqq Y_1 \subsetneqq Y_0 \subseteq X$$

от неприводими, Зариски затворени подмножества на X. Съответната редица от размерности

$$0 \leq \dim(Y_m) < \dim(Y_{m-1}) < \ldots < \dim(Y_1) < \dim(Y_0) \leq \dim(X)$$

е строго растяща по Твърдение 7.8. Следователно тя се състои от $m+1 \leq d+1$ члена и $\kappa = \dim_{Krull}(k[X]) \leq \dim(X)$. Супремумът $\kappa+1$ за дължина на редица от вида (7.8) се достига за $\kappa \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$.
Във всяка строго растяща редица от прости идеали на $k[X]$ с $\kappa + 1$ члена минималният идеал $\mathfrak{p}_0 = \{0\}$ е нулевият, защото в областта $k[X]$ нулевият идеал е прост и ако $\mathfrak{p}_0 \neq \{0\}$, то тази редица може да се уплътни до редица с $\geq \kappa + 2$ члена. Аналогично, във всяка редица прости идеали на $k[X]$ с $\kappa + 1$ члена, последният идеал $\mathfrak{p}_\kappa$ е максимален, защото в противен случай редицата може да се уплътни с още един член.

Лема 7.21. *Ако $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие над алгебрично затворено поле k, то топологичната размерност*

$$\dim_{Zar}(X) = \dim_{Krull}(k[X])$$

на X съвпада с размерността на Krull на афинния координатен пръстен $k[X]$ на X.

Доказателство: Да означим $\tau = \dim_{Zar}(X)$, $\kappa = \dim_{Krull}(k[X])$. Всяка строго растяща редица

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneqq Z_1 \subsetneqq \ldots \subsetneqq Z_\tau$$

от непразни, неприводими, Зариски затворени подмножества $Z_i \subseteq X$ отговаря на строго намаляваща редица

$$I_X(Z_\tau) \subsetneqq \ldots I_X(Z_1) \subsetneqq I_X(Z_0)$$

от прости идеали в $k[X]$. Следователно $\tau \leq \kappa$. Обратно, всяка строго растяща редица

$$\{0\} = I_X(Y_0) \subsetneqq I_X(Y_1) \subsetneqq \ldots I_X(Y_\kappa) \subsetneqq k[X]$$

от прости идеали в $k[X]$ отговаря на строго намаляваща редица

$$\emptyset \neq Y_\kappa \subsetneqq \ldots \subsetneqq Y_1 \subsetneqq Y_0 = X$$

от непразни, неприводими, Зариски затворени подмножества на X. Следователно $\kappa \leq \tau$ и $\kappa = \tau$, Q.E.D.

Лема 7.22. *Нека $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие над алгебрично затворено поле k. Тогава размерността*

$$\dim(X) = \dim_{Krull}(k[X])$$

на X ъсвпада с размерността на Krull на афинния кооридънатен пръстен $k[X]$ на X.

Доказателство: Съгласно Следствие 7.10 от Лемата на Noehter за нормализация, съществува крайно, регулярно, доминантно изображение

$$\varphi : X \longrightarrow k^d$$

за $d = \dim(X) := \operatorname{tr}\deg_k(k(X))$. Функционалното поле $k(k^d) = k(x_1, \ldots, x_d)$ на афинното пространство k^d е чисто трансцендентно разширение на k от степен d. Достатъчно е да докажем, че

$$\dim_{Krull}(k[X]) = \dim_{Krull}(k[x_1, \ldots, x_d]) = d,$$

за да установим верността на лемата.
За целта да отбележим, че идеалите $\mathfrak{p}_i = \langle x_1, \ldots, x_i \rangle \triangleleft k[x_1, \ldots, x_d]$ са прости за $\forall 1 \leq i \leq d$, защото съответните им афинни алгебрични подмножества $V(\mathfrak{p}_i) = k^{d-i}$ в k^d са неприводими. Твърдим, че строго растящата редица

$$\{0\} = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 = \langle x_1 \rangle \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_d = \langle x_1, \ldots, x_d \rangle \subsetneq k[x_1, \ldots, x_d] \qquad (7.9)$$

от $d+1$ прости идеала в полиномиалния пръстен $k[x_1, \ldots, x_d]$ е неуплътняема и $\dim_{Krull}(k[x_1, \ldots, x_d]) = d$. В противен случай съществува прост идеал $\mathfrak{p} \triangleleft k[x_1, \ldots, x_d]$, така че $\mathfrak{p}_i \subsetneq \mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p}_{i+1}$ за някое $0 \leq i \leq d-1$. Съответните афинни алгебрични подмножества в k^d изпълняват строгите включвания

$$V(\mathfrak{p}_{i+1}) = k^{d-i-1} \subsetneq V(\mathfrak{p}) \subsetneq V(\mathfrak{p}_i) = k^{d-i}.$$

По Твърдение 7.4, размерностите на тези многообразия образуват строго растяща редица $d-i-1 < \dim V(\mathfrak{p}) < d-i$. Това противоречи на $\dim(V(\mathfrak{p}) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ и доказва неуплътняемостта на редицата от прости идеали (7.9), а оттам и равенството $\dim_{Krull}(k[x_1, \ldots, x_d]) = d$.
За $\dim_{Krull}(k[X]) = \dim_{Krull}(k[x_1, \ldots, x_d])$ да отбележим, че комутативната област с единица $k[X]$ е цяла над своя подпръстен с единица $k[x_1, \ldots, x_d]$, съгласно доказателството на Следствие 7.10. Неуплътняемата строго растяща редица (7.9) от прости идеали в $k[x_1, \ldots, x_d]$ се повдига до строго растяща редица

$$\{0\} = \mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_d$$

от прости идеали в $k[X]$ с $\mathfrak{q}_i \cap k[x_1, \ldots, x_d] = \mathfrak{p}_i$. Следователно $d \leq \tau = \dim_{Krull}(k[X])$. Вече споменахме, че $\tau = \dim_{Krull}(k[X]) \leq \dim(X) = d$. В резултат, $\dim_{Krull}(k[X]) = \tau = d$, Q.E.D.

Теорема 5. *Ако X е квази-афинно или квази-проективно многоборазие над алгебрично затворено поле k, то размерността*

$$\dim(X) = \dim_{Zar}(X)$$

на X съвпада с топологичната размерност $\dim_{Zar}(X)$ на X.

Доказателство: Достатъчно е да докажем теоремата за квази-афинно многобразие. По-точно, произволно квази-проективно многообразие $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ има афинно отворено подмножество $X \cap U_i$ със същото функционално поле $k(X \cap U_i) = k(X)$. Оттук $\dim(X) = \dim(X \cap U_i)$. Твърдим, че топологичните размерности $\dim_{Zar}(X) = \dim_{Zar}(X \cap U_i)$ съвпадат. Означаваме $\tau = \dim_{Zar}(X)$, $\tau_o = \dim_{Zar}(X \cap U_i)$. Съгласно Твърдение 4.30(i), всяка строго растяща редица

$$\emptyset \neq W_0 \subsetneq W_1 \subsetneq \ldots \subsetneq W_{\tau_o} = X \cap U_i$$

от непразни, неприводими, относително затворени подмножества $W_j \subseteq X \cap U_i$ индуцира строго растяща редица

$$\emptyset \neq \overline{W_0} \subsetneq \overline{W_1} \subsetneq \ldots \subsetneq \overline{W_{\tau_o}} = X$$

от подмногообразия на X, така че $\tau_o \leq \tau$. По Твърдение 4.30(ii), всяка строго растяща редица

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_\tau = X$$

от непразни, неприводими, Зариски затоверни подмножества на X пресича някакво стандартно афинно отворено подмножество U_i, т.е. съществува $U_i \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ с $Z_0 \cap U_i \neq \emptyset$. Тогава

$$\emptyset \neq Z_0 \cap U_i \subsetneq Z_1 \cap U_i \subsetneq \ldots \subsetneq Z_{tau} \cap U_i = X \cap U_i$$

е строго растяща редица от подмногообразия на $X \cap U_i$, така че $\tau \leq \tau_o$. Следователно $\tau = \tau_o$, т.е. $\dim_{Zar}(X) = \dim_{Zar}(X \cap U_i)$.
За квази-афинно многообразие $X \cap U_i \subseteq U_i \simeq k^n$ над алгебрично затворено поле k знаем, че

$$\dim_{Zar}(X \cap U_i) = \dim_{Krull}(k[X \cap U_i])$$

по Лема 7.21 и

$$\dim_{Krull}(k[X]) = \dim(X \cap U_i)$$

по Лема 7.22. Следователно

$$\dim_{Zar}(X \cap U_i) = \dim(X \cap U_i),$$

откъдето $\dim_{Zar}(X) = \dim_{Zar}(X \cap U_i) = \dim(X \cap U_i) = \dim(X)$, Q.E.D.

Задача 7.23. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие, $Y \subseteq X$ е подмногообразие. Да се докаже, че локалният пръстен $\mathcal{O}_Y(X)$ на Y в X има размерност на Krull $\dim_{Krull} \mathcal{O}_Y(X) \geq \dim(X) - \dim(Y)$.*

Упътване: Да означим $d = \dim(Y)$, $d + k = \dim(X)$. Тогава $\dim_{Krull} k[Y] = d$ и съществува неуплътняема строго растяща редица от $d + 1$ прости идеала

$$\mathfrak{q}_0 = I(Y) \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_d \subsetneq k[x_1, \ldots, x_n],$$

съдържащи полиномиалния идеал $I(Y)$ на Y. От $Y \subseteq X$ следва $I(X) \subseteq I(Y)$. Нека

$$I(X) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_m = I(Y)$$

е неуплътняема строго растяща редица от прости идеали, съдържащи $I(X)$ и съдържащи се в $I(Y)$. Тогава

$$I(X) = \mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{p}_m = I(Y) = \mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \ldots \subsetneq \mathfrak{q}_d \subsetneq k[x_1, \ldots, x_n]$$

е неуплътняема строго растяща редица от прости идеали в $k[x_1, \ldots, x_n]$, съдържащи $I(X)$. Съгласно $\dim_{Krull} k[X] = \dim(X) = d + k$, в тази редица участват точно $m + 1 + d = d + k + 1$ идеала. Следователно $m = k$.
Ако $I(X) \subsetneq \mathfrak{p} \subseteq I(Y)$ е прост идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$, съдържащ строго $I(X)$ и съдържащ се в $I(Y)$, то локализацията

$$J = (\mathfrak{p}/I(X))_{I_X(Y)} = (k[X] \setminus I_X(Y))^{-1}(\mathfrak{p}/I(X))$$

на фактора $\mathfrak{p}/I(X)$ е прост идеал в $k[X]_{I_X(Y)} = \mathcal{O}_Y(X)$. По-точно, ако $r_1, r_2 \in k[X]$, $s_1, s_2 \in k[X] \setminus I_X(Y)$ и $\frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} \in J$, то съществуват елементи $r \in \mathfrak{p}/I(X)$ и $s \in k[X] \setminus I_X(Y)$ с $\frac{r_1 r_2}{s_1 s_2} = \frac{r}{s}$. Оттук $r_1 r_2 s = r s_1 s_2 \in \mathfrak{p}/I(X)$ за простия идеал $\mathfrak{p}/I(X) \triangleleft k[X]$. Ако допуснем, че $s \in \mathfrak{p}/I(X)$, то $s \in I(Y)/IX() = I_X(Y)$, противно на избора на s. Следователно $r_1 r_2 \in \mathfrak{p}/I(X)$, откъдето $r_1 \in \mathfrak{p}/I(X)$ или $r_2 \in \mathfrak{p}/I(X)$. С това установихме, че J е прост идеал в $\mathcal{O}_Y(X)$.

Може да се докаже, че всеки идеал в локализацията $k[X]_{I_X(Y)}$ на $k[X]$ по простия идеал $I_X(Y)$ е локализация на прост идеал в $k[X]$, съдържащ се в $I_X(Y)$. Оттук следва, че $\dim_{Krull}(\mathcal{O}_Y(X)) = \dim(X) - \dim(Y)$.

Задача 7.24. *Нека k е алгебрично затворено поле, $k[a_1, \dots, a_n]$ е крайно породена k-алгебра без делители на нулата с размерност на Krull*

$$\dim_{Krull}(k[a_1, \dots, a_n]) = d,$$

а $\mathfrak{M} \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$ е максимален идеал в $k[a_1, \dots, a_n]$. Да се докаже, че съществува строго растяща редица

$$0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \mathfrak{q}_{d-1} \subsetneq \mathfrak{q}_d = \mathfrak{M}$$

от прости идеали $\mathfrak{q}_i \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$ с $\mathfrak{q}_d = \mathfrak{M}$.

Упътване: По Лемата на Noehter за нормализация, съществува базис на трансцендентност $b_1, \dots, b_d \in k[a_1, \dots, a_n]$ на полето от частни

$$k(a_1, \dots, a_n) = F(k[a_1, \dots, a_n])$$

на областта $k[a_1, \dots, a_n]$, така че $k[a_1, \dots, a_n]$ е цял над полиномиалния пръстен $k[b_1, \dots, b_d] \simeq k[x_1, \dots, x_d]$. Идеалът $\mathfrak{N} := \mathfrak{M} \cap k[b_1, \dots, b_d]$ е максимален. Поточно, фактор-пръстенът $k[b_1, \dots, b_d]/\mathfrak{N}$ е подпръстен на полето

$$k[a_1, \dots, a_n]/\mathfrak{M} \simeq k.$$

Но $k \simeq k + \mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ е подпръстен на $k[b_1, \dots, b_d]/\mathfrak{N}$, така че $k[b_1, \dots, b_d]/\mathfrak{N} = k$ и $\mathfrak{N} \triangleleft k[b_1, \dots, b_d]$ е максимален идеал. Нека $\mathfrak{N} = \langle b_1 - s_1, \dots, b_d - s_d \rangle_{k[b_1, \dots, b_d]}$ се поражда от $b_i - s_i$ за някакви $s_i \in k$, $1 \leq i \leq d$. Тогава

$$\mathfrak{p}_i := \langle b_1 - s_1, \dots, b_i - s_i \rangle_{k[b_1, \dots, b_d]} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq d$$

образуват строго растяща редица

$$0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_{d-1} \subsetneq \mathfrak{p}_d = \mathfrak{N} = \mathfrak{M} \cap k[b_1, \dots, b_d]$$

от прости идеали в $k[b_1, \dots, b_d]$. Разгледайте редицата

$$0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{d-1} \subsetneq \mathfrak{q}_d = \mathfrak{M}$$

от повдигания на $\mathfrak{p}_i \triangleleft k[x_1, \dots, x_d]$ до прости идеали $\mathfrak{q}_i \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$.

Задача 7.25. *Нека k е алгебрично затворено поле, а $X \subseteq k^n$ е d-мерно афинно многообразие над k. Да се докаже, че всяка точка $a \in X$ се съдържа в строго растяща редица*

$$\{a\} \subsetneq Z_1 \subsetneq \dots \subsetneq Z_{d-1} \subsetneq Z_d = X$$

от подмногообразия $Z_i \subseteq X$ с размерност $\dim(Z_i) = i$ за $1 \leq i \leq d-1$.

Задача 7.26. *Нека k е поле, $k[a_1, \dots, a_n]$ е крайно породена k-алгебра без делители на нулата с размерност ан Krull $\dim_{Krull}(k[a_1, \dots, a_n]) = d$, а $\mathfrak{q}_1$ е минимален ненулев прост идеал в $k[a_1, \dots, a_n]$, т.е. не съществува прост идеал $0 \subsetneq \mathfrak{q} \subsetneq \mathfrak{q}_1$ в $k[a_1, \dots, a_n]$. Да се докаже, че $\mathfrak{q}_1$ се влага в строго растяща редица*

$$0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_d \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$$

от прости идеали $\mathfrak{q}_i \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$.

Упътване: Ако $\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_s \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$ е неуплътняема строго растяща редица от прости идеали в $k[a_1, \dots, a_n]$, то

$$0 \subsetneq \mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_s \triangleleft k[a_1, \dots, a_n]$$

е неуплътняема строго растяща редица от прости идеали в $k[a_1, \dots, a_n]$.

Задача 7.27. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие с размерност $\dim(X) = d$, а $Y \subsetneq X$ е максимално собствено подмногообразие. Да се докаже, че $\dim(Y) = d - 1$ и съществува строго растяща редица*

$$\emptyset \neq Z_0 \subsetneq Z_1 \subsetneq \ldots \subsetneq Z_{d-1} = Y \subsetneq X$$

от подмногообразия $Z_i \subseteq Y$ с размерност $\dim(Z_i) = i$.

Задача 7.28. *Нека k е поле, а $k[a_1, \ldots, a_n]$ е крайно породена k-алгебра без делители на нулата с размерност на Krull $\dim_{Krull}(k[a_1, \ldots, a_n]) = 1$. Да се докаже, че:*

(i) за произволен полином $f \in k[a_1, \ldots, a_n]$, пръстенът $k[a_1, \ldots, a_n]$ а $k[f]$-модул;

(ii) съществува полином $f \in k[a_1, \ldots, a_n]$, така че $k[a_1, \ldots, a_n]$ е крайно породен $k[f]$-модул.