Глава 6

Рационални функции и изображения.]

1. Рационални функции

Да разгледаме наредените двойки (W, f), където W е непразно Зариски отворено подмножество на квази-афинно или квази-проективно многообразие V, а $f : W \to k$ е функция, регулярна в W. Двойките (W_1, f_1) и (W_2, f_2) са еквивалентни, $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$, ако съществува непразно Зариски отворено подмножество $\emptyset \neq W \subseteq W_1 \cap W_2$, върху което $f_1|_W \equiv f_2|_W$ съвпадат. Да отбележим, че сечението на непразни Зариски отворени подмножества W_1, W_2 на квази-афинно или квази-проективно многообразие V е непразно поради неприводимостта на V. Съгласно Лема 5.22, от съвпадението на $f_1 : W_1 \cap W_2 \to k$ и $f_2 : W_1 \cap W_2 \to k$ върху Зариски отвореното подмножество $W \subseteq W_1 \cap W_2$ следва съвпадението им $f_1|_{W_1 \cap W_2} = f_2|_{W_1 \cap W_2}$ върху $W_1 \cap W_2$. Твърдим, че определената по-горе релация $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$ е релация на еквивалентност. Ясно е, че $(W, f) \sim (W, f)$. Условието $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$ е равносилно на $(W_2, f_2) \sim (W_1, f_1)$. Ако $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$ и $(W_2, f_2) \sim (W_3, f_3)$, то от $f_1|_{W_1 \cap W_2} = f_2|_{W_1 \cap W_2}$ и $f_2|_{W_2 \cap W_3} = f_3|_{W_2 \cap W_3}$ следва $f_1|_{W_1 \cap W_2 \cap W_3} = f_2|_{W_1 \cap W_2 \cap W_3} = f_3|_{W_1 \cap W_2 \cap W_3}$. Сечението $W_1 \cap W_2 \cap W_3 \neq \emptyset$ на непразните Зариски отворени подмножества W_i на неприводимото V е непразно. Следователно $\sim$ е релация на еквивалентност.

Да означим с $\overline{(W, f)}$ класа на еквивалентност на (W, f). Определяме събиране и умножение на класове на еквивалентност $\overline{(W_j, f_j)}$ чрез техни представители

$$\overline{(W_1, f_1)} + \overline{(W_2, f_2)} := \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 + f_2)}, \quad \overline{(W_1, f_1)}.\overline{(W_2, f_2)} := \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 f_2)}.$$

Определението е коректно, т.е. не зависи от избора на представители на класовете на еквивалентност. По-точно, ако $(W_i, f_i) \sim (W_i', f_i')$ с $f_i|_{W_i \cap W_i'} = f_i'|_{W_i \cap W_i'}$, то

$$f_1 + f_2|_{W_1 \cap W_1' \cap W_2 \cap W_2'} = f_1' + f_2'|_{W_1 \cap W_1' \cap W_2 \cap W_2'},$$
$$f_1 f_2|_{W_1 \cap W_1' \cap W_2 \cap W_2'} = f_1' f_2'|_{W_1 \cap W_1' \cap W_2 \cap W_2'}.$$

Лема-Определение 6.1. *Нека V е квази-афинно или квази-проективно многообразие. Тогава множеството $k(V)$ на класовете на еквивалентност $\overline{(W, f)}$ е поле, което се нарича функционално поле на V или поле на рационалните функции върху V.*

Доказателство: Комутативните и асоциативните закони за събиране и умножение, както и дистрибутивният закон за събиране и умножение зависят от краен брой аргументи $\overline{(W_i, f_i)}$, $1 \leq i \leq m$ с $m = 2$ или $m = 3$. Съгласно неприводимостта на V, сечението $W = \cap_{i=1}^m W_i$ е непразно Зариски отворено подмножество на V и гореспоменатите аксиоми в $k(V)$ се свеждат до съответните аксиоми в пръстена на функциите $W \to k$. По-точно,

$$\overline{(W_1, f_1)} + \overline{(W_2, f_2)} = \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 + f_2)} = \overline{(W_1 \cap W_2, f_2 + f_1)} = \overline{(W_1, f_1)} + \overline{(W_2, f_2)},$$

$$[\overline{(W_1, f_1)} + \overline{(W_2, f_2)}] + \overline{(W_3, f_3)} = \overline{(W_1 \cap W_2 \cap W_3, (f_1 + f_2) + f_3)} =$$
$$= \overline{(W_1 \cap W_2 \cap W_3, f_1 + (f_2 + f_3))} = \overline{(W_1, f_1)} + [\overline{(W_2, f_2)} + \overline{(W_3, f_3)}],$$

$$\overline{(W_1, f_1)}\ \ \overline{(W_2, f_2)} = \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 f_2)} = \overline{(W_1 \cap W_2, f_2 f_1)} = \overline{(W_2, f_2)} + \overline{(W_1, f_1)},$$
$$[\overline{(W_1, f_1)}\ \ \overline{(W_2, f_2)}]\ \ \overline{(W_3, f_3)} = \overline{(W_1 \cap W_2 \cap W_3, (f_1 f_2) f_3)} =$$
$$= \overline{(W_1 \cap W_2 \cap W_3, f_1(f_2 f_3))} = \overline{(W_1, f_1)}\ \ [\overline{(W_2, f_2)}\ \ \overline{(W_3, f_3)}],$$
$$[\overline{(W_1, f_1)} + \overline{(W_2, f_2)}]\overline{(W_3, f_3)} = \overline{(W_1 \cap W_2 \cap W_3, (f_1 + f_2) f_3)} =$$
$$= \overline{(W_1 \cap W_2 \cap W_3, f_1 f_3 + f_2 f_3)} = \overline{(W_1, f_1)}\ \ \overline{(W_3, f_3)} + \overline{(W_2, f_2)}\ \ \overline{(W_3, f_3)}.$$

Нулевият елемент на $k(V)$ е $\overline{(W, 0)}$, а единичният елемент е $\overline{(W, 1)}$ за произволно непразно Зариски отворено подмножество $W \subseteq V$. Всеки елемент $\overline{(W, f)}$ има противоположен $\overline{(W, -f)}$. Произволен елемент $\overline{(W, f)} \neq \overline{(W', 0)}$ има обратен $\overline{(W \setminus V(f), f^{-1})}$, където $V(f)$ е множеството на нулите на f. Зариски отвореното подмножество $W \setminus V(f)$ на V е непразно, защото в противен случай $W \subseteq V(f)$ и $f|_W \equiv 0$, противно на $\overline{(W, f)} \neq \overline{(W', 0)}$, Q.E.D.

Следствие 6.2. *Ако U е непразно Зариски отворено подмножество на квази-афинно или квази-проективно многообразие V, то функционалните полета на U и V съвпадат, $k(U) = k(V)$.*

Доказателство: Твърдим, че всяка двойка (W, f) върху U е двойка върху V. По определение, произволно Зариски отворено подмножество W на U е от вида $W = W' \cap U$ за Зариски отворено подмножество $W' \subseteq V$. Следователно W е Зариски отворено във V и (W, f) е двойка върху V. Оттук следва включването $k(U) \subseteq k(V)$.
Обратно, всеки клас на еквивалентност $\overline{(W_o, f_o)} \in k(V)$ има представител $\overline{(W_o \cap U, f_o)} \in k(U)$, така че $k(V) \subseteq k(U)$ и $k(V) = k(U)$, Q.E.D.
В частност, функционалното поле на квази-проективно многообразие $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ съвпада с функционалното поле $k(V \cap U_i)$ на сечението $V \cap U_i$ на V с произволно стандартно афинно отворено подмножество U_i, стига $V \cap U_i \neq \emptyset$.

2. Локален пръстен на подмногообразие

Определение 6.3. *Комутативният пръстен с единица R е локален, ако R има единствен максимален идеал $\mathfrak{M}$.*

Ако R е локален пръстен с максимален идеал $\mathfrak{M}$, то $R \setminus \mathfrak{M} = R^*$. По-точно, всеки елемент $r \in R$ извън $\mathfrak{M}$ е обратим, защото в противен случай идеалът $\langle r \rangle \neq R$ и се съдържа в максимален идеал. Но R има единствен максимален идеал $\mathfrak{M}$, така че $\langle r \rangle \subseteq \mathfrak{M}$, противно на избора на $r \notin \mathfrak{M}$. Обратно, ако $r \in R^*$, то $r \notin \mathfrak{M}$, защото от $r \in \mathfrak{M}$ следва, че $1_R = r r^{-1} \in \mathfrak{M}$, противно на $\mathfrak{M} \neq R$.
Ако R е комутативен пръстен с единица, чиито необратими елементи $R \setminus R^*$ се съдържат в собствен идеал $I \triangleleft R$, $I \neq R$, то пръстенът R е локален. Наистина, собственият идеал I се съдържа в някой максимален идеал $\mathfrak{M} \triangleleft R$. Произволен максимален идеал $\mathfrak{N}$ на R се състои от необратими елементи, така че $\mathfrak{N} \subseteq R \setminus R^* \subseteq \mathfrak{M}$. Поради максималността на $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M} \neq R$, оттук следва $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ е единственият максимален идеал на R.

Определение 6.4. *Ако V е квази-афинно или квази-проективно многообразие, то неприводимите Зариски затворени подмножества Y на V наричаме подмногообразия.*

Лема-Определение 6.5. *За произволно подмногообразие Y на квази-афинно или квази-проективно многообразие V, класовете на еквивалентност $\overline{(W, f)} \in k(V)$ с $W \cap Y \neq \emptyset$ образуват локален подпръстен $\mathcal{O}_Y(V)$ на $k(V)$ с максимален идеал*

$$\mathfrak{M}_Y(V) = \{\overline{(W, f)} \in \mathcal{O}_Y(V) \mid f(p) = 0 \quad \text{за} \quad \forall p \in W \cap Y\}. \tag{6.1}$$

Пръстенът $\mathcal{O}_Y(V)$ се нарича локален пръстен на Y във V.

Доказателство: Подмножеството $\mathcal{O}_Y(V)$ на $k(V)$ е затворено относно изваждане и умножение, т.е.

$$\overline{(W_1, f_1)} - \overline{(W_2, f_2)} = \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 - f_2)} \in \mathcal{O}_Y(V),$$

$$\overline{(W_1, f_1)}.\overline{(W_2, f_2)} = \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 f_2)} \in \mathcal{O}_Y(V) \quad \text{за} \quad \forall \overline{(W_j, f_j)} \in \mathcal{O}_Y(V),$$

защото непразните Зариски отворени подмножества $W_1 \cap Y \neq \emptyset$ и $W_2 \cap Y \neq \emptyset$ на неприводимото топологично пространство Y имат непразно сечение $\emptyset \neq (W_1 \cap Y) \cap (W_2 \cap Y) = W_1 \cap W_2 \cap Y$. Следователно $\mathcal{O}_Y(V)$ е подпръстен на $k(V)$. За произволни $\overline{(W_i, f_i)} \in \mathfrak{M}_Y(V)$ е в сила

$$\overline{(W_1, f_1)} - \overline{(W_2, f_2)} = \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 - f_2)} \in \mathfrak{M}_Y(V),$$

защото от $f_i|_{W_i \cap Y} = 0$ следва $(f_1 - f_2)|_{W_1 \cap W_2 \cap Y} = 0$. За $\forall \overline{(W_1, f_1)} \in \mathfrak{M}_Y(V)$ и $\forall \overline{(W, f)} \in \mathcal{O}_Y(V)$ имаме $\overline{(W_1, f_1)}\ \overline{(W, f)} = \overline{(W_1 \cap W, f_1 f)} \in \mathfrak{M}_Y(V)$, съгласно $(f_1 f)|_{W_1 \cap W \cap Y} = 0$ за $f_1|_{W_1 \cap Y} = 0$. Това доказва, че $\mathfrak{M}_Y(V)$ е идеал в $\mathcal{O}_Y(V)$.
Твърдим, че идеалът $\mathfrak{M}_Y(V)$ е максимален, защото всеки елемент $\overline{(W, f)} \in \mathcal{O}_Y(V) \setminus \mathfrak{M}_Y(V)$ извън него има обратен в $\mathcal{O}_Y(V)$. По-точно, ако $f|_{W_p} = \frac{g}{h}$ за полиноми g, h и Зариски отворена околност $W_p \subseteq V$ на точка $p \in W \cap Y$ с $f(q) \neq 0$ за $\forall q \in W_p$, то $[\overline{(W, f)}]^{-1} = \overline{(W_p \setminus V(g), \frac{h}{g})} \in \mathcal{O}_Y(V)$. Горните разглеждания показват също, че всеки необратим елемент на $\mathcal{O}_Y(V)$ се съдържа в $\mathfrak{M}_Y(V)$ и $\mathfrak{M}_Y(V)$ е единственият максимален идеал на $\mathcal{O}_Y(V)$, Q.E.D.
От Следствие 6.2 и Лема-Определение 6.5 получаваме непосредствено следното

Следствие 6.6. *За произволно непразно Зариски отворено подмножество U на квази-афинно или квази-проективно многообразие V и произволно неприводимо Зариски затворено подмножество $Y \subset V$ с $Y \cap U \neq \emptyset$, локалният пръстен на $Y \cap U \neq \emptyset$ в $U \cap V$ съвпада с локалния пръстен на Y във V, $\mathcal{O}_{Y \cap U}(U \cap V) = \mathcal{O}_Y(V)$.*

В частност, за произволно квази-проективно многообразие $V \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ и произволно стандартно афинно отворено подмножество $U_i \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$, пресичащо неприводимото Зариски затворено подмножество $Y \subseteq V$, $Y \cap U_i \neq \emptyset$, локалните пръстени $\mathcal{O}_Y(V) = \mathcal{O}_{Y \cap U_i}(V \cap U_i)$ съвпадат.

Определение 6.7. *Нека $U \subseteq V$ е непразно Зариски отворено подмножество на квази-афинно или квази-проективно многообразие V. Тогава сечението*

$$\mathcal{O}_U(V) = \cap_{p \in U} \mathcal{O}_p(V)$$

на локалните пръстени на точките от U във V се нарича пръстен на рационалните функции върху V, които са регулярни върху U.

По този начин, за произволно Зариски отворено подмножество U на квази-афинно или квази-проективно многообразие V и произволна точка $p \in U$ са в сила включванията на пръстени

$$\mathcal{O}_V(V) \subseteq \mathcal{O}_U(V) \subseteq \mathcal{O}_p(V) \subseteq \overline{k}(V).$$

3. Връзка между афинния координатен пръстен на афинно многообразие, полето на рационалните функции и локалните пръстени на подмногообразията

За да опишем връзките между афинния координатен пръстен $k[V]$ на квази-афинно многообразие V, функционалното поле $k(V)$ и локалните пръстени $\mathcal{O}_Y(V)$ на неприводимите Зариски затворени подмножества $Y \subseteq V$, да напомним локализацията на комутативна област с единица R по прост идеал $\mathfrak{p} \triangleleft R$.

Лема 6.8. *Нека $\mathfrak{p}$ е прост идеал в комутативна област с единица R. Тогава подмножеството*

$$R_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \ \Big| \ \alpha, \beta \in R, \quad \beta \notin \mathfrak{p} \right\}$$

на полето от частни $F(R)$ на R е локален подпръстен на $F(R)$ с максимален идеал

$$\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{\alpha}{\beta} \in R_{\mathfrak{p}} \ \Big| \ \alpha \in \mathfrak{p} \right\}.$$

Пръстенът $R_{\mathfrak{p}}$ се нарича локализация на R относно простия идеал $\mathfrak{p}$ и съдържа R като подпръстен.

Доказателство: Непосредствено проверяваме, че за $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in R_{\mathfrak{p}}$ е изпълнено $\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1 b_2}$, $\frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} \in R_{\mathfrak{p}}$, защото от $b_1 \notin \mathfrak{p}$, $b_2 \notin \mathfrak{p}$ следва $b_1 b_2 \notin \mathfrak{p}$ за простия идеал $\mathfrak{p} \triangleleft R$. Следователно $R_{\mathfrak{p}}$ е подпръстен на полето от частни $F(R)$ на комутативната област R.
За произволни $\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ и $\frac{a}{b} \in R_{\mathfrak{p}}$ имаме $\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_1 b_2}$, $\frac{a_1}{b_1}\frac{a}{b} = \frac{a_1 a}{b_1 b_2} \in \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$, съгласно $a_1 b_2 - a_2 b_1, a_1 a \in \mathfrak{p}$ за $a_1, a_2 \in \mathfrak{p} \triangleleft R$. Това доказва, че $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ е идеал в $R_{\mathfrak{p}}$.
Идеалът $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ е максимален, защото $R_{\mathfrak{p}} \setminus \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}} \subseteq R_{\mathfrak{p}}^*$. По-точно, елементите на $R_{\mathfrak{p}}$ извън $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ са от вида $\frac{a}{b}$ с $a, b \in R \setminus \mathfrak{p}$, така че съществува $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \in R_{\mathfrak{p}}$.
Произволен необратим елемент на $R_{\mathfrak{p}}$ е от вида $\frac{a}{b}$ с $a \in \mathfrak{p}$ и принадлежи на $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$. Следователно за всеки максимален идеал $\mathfrak{N} \triangleleft R_{\mathfrak{p}}$ е изпълнено $\mathfrak{N} \subseteq R \setminus R_{\mathfrak{p}}^* \subseteq \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ и $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$. Това доказва локалността на пръстена $R_{\mathfrak{p}}$, Q.E.D.

Лема 6.9. *Нека k е алгебрично затворено поле, $V \subseteq k^n$ е афинно многообразие над k, а $Y \subseteq V$ е подмногообразие. Тогава:*
(i) локалният пръстен

$$\mathcal{O}_Y(V) \simeq k[V]_{I_V(Y)} := \left\{ \frac{f}{g} \ \Big| \ f, g \in k[V], \quad g \notin I_V(Y) \right\}$$

на Y в V е изоморфен на локализацията $k[V]_{I_V(Y)}$ на афинния координатен пръстен $k[V]$ на V по простия идеал $I_V(Y)$ на неприводимото Зариски затворено подмножество $Y \subseteq V$;
(ii) рационалните функции върху V, които са регулярни във всички точки на V се изчерпват от афинния координатен пръстен на V, т.е. $\mathcal{O}_V(V) \simeq k[V]$;
(iii) функционалното поле $k(V)$ е полето от частни $F(k[V])$ на афинния координатен пръстен $k[V]$.

Доказателство: (i) По определение, локализацията на $k[V]$ относно простия идеал $I_V(Y)$ е пръстенът

$$k[V]_{I_V(Y)} := \left\{ \frac{f}{g} \ \Big| \ f, g \in k[V], \quad g \notin I_V(Y) \right\}.$$

За произволен елемент $g \in k[V] \setminus I_V(Y)$ съществува точка $p \in Y$ с $g(p) \neq 0$. Избираме Зариски отворена околност W_p на p върху V с $g(q) \neq 0$ за $\forall q \in W_p$. Тогава $p \in W_p \cap Y$ и $\overline{\left(W_p, \frac{\overline{f}}{\overline{g}}\right)} \in \mathcal{O}_p(V)$, съгласно определението на $\mathcal{O}_V(Y)$. Разглеждаме изображението

$$\varphi : k[V]_{I_V(Y)} \longrightarrow \mathcal{O}_Y(V),$$

$$\varphi\left(\frac{\overline{f}}{\overline{g}}\right) = \overline{\left(W_p, \frac{\overline{f}}{\overline{g}}\right)}.$$

Ако $\overline{\left(W_p, \frac{\overline{f}}{g}\right)} = \overline{\left(W_q, \frac{\overline{f_1}}{g_1}\right)} \in \mathcal{O}_Y(V)$, то от

$$0 = \frac{f}{g} - \frac{f_1}{g_1}\Big|_{W_p \cap W_q} = \frac{fg_1 - f_1 g}{gg_1}\Big|_{W_p \cap W_q}$$

следва $fg_1 - f_1 g \in I(W_p \cap W_q) = I(V)$, така че $\frac{\overline{f}}{g} = \frac{\overline{f_1}}{g_1} \in k[V]_{I_V(Y)}$. Произволен елемент $\overline{(W,\varphi)} \in \mathcal{O}_Y(V)$ може да се представи като $\overline{(W,\varphi)} = \overline{\left(W_p, \frac{\overline{f}}{g}\right)}$ за Зариски отворена околност W_p на $p \in Y \cap W$ върху V и полиноми $f, g \in k[x_1, \ldots, x_n]$ с $g(q) \neq 0$ за $\forall q \in W_p$. Следователно $g \notin I_V(Y)$, $\frac{\overline{f}}{g} \in k[V]_{I_V(Y)}$, $\varphi\left(\frac{\overline{f}}{g}\right) = \overline{\left(W_p, \frac{\overline{f}}{g}\right)} = \overline{(W,\varphi)}$ и изображението φ е взаимно еднозначно. Понеже събирането и умножението на рационални функции се свежда до събиране и умножение на локални регулярни изображения, φ е изоморфизъм на пръстени.
(ii) От определението на $\mathcal{O}_V(V)$ и (i) имаме

$$\mathcal{O}_V(V) = \cap_{p \in V} \mathcal{O}_p(V) = \cap_{p \in V} k[V]_{I_V(p)}.$$

за максималните идеали $I_V(p) \lhd k[V]$, отговарящи на точките $p \in V$. Остава да проверим, че

$$\cap_{p \in V} k[V]_{I_V(p)} = k[V].$$

Включването $\cap_{p \in V} k[V]_{I_V(p)} \supseteq k[V]$ е ясно. Обратно, нека $\frac{f}{g} \in \cap_{p \in V} k[V]_{I_V(p)} \subseteq F(k[V])$ за полето от частни $F(k[V])$ на $k[V]$. Съгласно (i) елементът $g \in k[V]$ не принадлежи на нито един максимален идеал $I_V(p)$ на $k[V]$, така че $g \in k[V]^*$ е обратим в $k[V]$. С други думи, $\frac{1}{g} \in k[V]$ и $\frac{f}{g} \in k[V]$.
(iii) За $F(k[V]) \subseteq k(V)$ използваме, че $k(V)$ е поле, съдържащо $\mathcal{O}_V(V) \simeq k[V]$. За обратното включване $k(V) \subseteq F(k[V])$ да изберем произволен клас на еквивалентност $\overline{(U,\psi)} \in k(V)$ и да отбележим, че регулярността на ψ в произволна точка $p \in U$ позволява разглеждането на $\overline{(U,\psi)}$ като елемент на локалния пръстен $\mathcal{O}_p(V)$ на p във V. Съгласно (i), съществува еднозначно определен елемент $\frac{f}{g} \in k[V]_{I_V(p)}$, отговарящ на $\overline{(U,\psi)}$. Вземайки предвид $\frac{f}{g} \in k[V]_{I_V(p)} \subset F(k[V])$, стигаме до извода, че $k(V) \subseteq F(k[V])$, откъдето $k(V) = F(k[V])$, Q.E.D.

Твърдение 6.10. *Нека k е алгебрично затворено поле, V е квази-афинно многообразие, а $Y \subseteq V$ е подмногообразие на V. Тогава:*
(i) локалният пръстен

$$\mathcal{O}_Y(V) \simeq k[V]_{I_V(Y)} := \left\{ \frac{f}{g} \;\Big|\; f, g \in k[V], \quad g \notin I_V(Y) \right\}$$

на Y във V е изоморфен на локализацията $k[V]_{I_V(Y)}$ на афинния координатен пръстен $k[V]$ по простия идеал $I_V(Y)$ на Y във $k[V]$;
(ii) функционалното поле $k(V)$ е полето от частни $F(k[V])$ на афинния координатен пръстен $k[V]$.

Доказателство: Да забележим, че (i) следва от Следствие 6.6, Лема 6.9 (i) и Лема 5.4. Аналогично, Лема 5.4 , Лема 6.9 (iii) и Следствие 6.2 доказват (ii), Q.E.D.

Задача 6.11. *Нека k е алгебрично затворено поле, $f_{2n+1}(x) \in k[x]$ е полином от степен $2n+1$ с корен $\alpha \in k$,*

$$V = \{(x,y) \in k^2 \mid y^2 = f_{2n+1}(x)\},$$

е афинна хипер-елиптична крива, а $p = (\alpha, 0)$, $q = (\beta, \gamma) \in V$ са точки от V с $\gamma \neq 0$. Да се докаже, че афинният координатен пръстен

$$k[V] = \{a(x) + b(x)y \mid a(x), b(x) \in k[x]\}.$$

Да се опишат локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V)$, $\mathcal{O}_q(V)$ и функционалното поле $k(V)$ на V.

Задача 6.12. *В означенията от Задача 6.11 да се докаже, че Зариски затворената обвивка на афинната хипер-елиптична крива $V \subset U_2$ в проективното пространство $\mathbb{P}^3(k)$ е*

$$\overline{V} = \left\{ [x:y:z] \in \mathbb{P}^2(k) \ \middle| \ y^2 z^{2n-1} = z^{2n+1} f_{2n+1}\left(\frac{x}{z}\right) \right\}.$$

Да се опише функционалното поле $k(\overline{V})$ на $\overline{V}$ и локалните пръстени $\mathcal{O}_P(\overline{V})$, $\mathcal{O}_Q(\overline{V})$ на точките $P = [\alpha : 0 : 1], Q = [\beta : \gamma : 1] \in \overline{V}$.

Задача 6.13. *В означенията от Задачи 6.11 и 6.12, нека $f_{2n+1}(x) = \sum\limits_{i=3}^{2n+1} x^i$, $U_1 = \{[x:y:z] \in \mathbb{P}^2(\overline{k}) \ | \ y \neq 0\}$ и $t_1 = \frac{x}{y}$, $t_2 = \frac{z}{y}$. Да се докаже, че афинният координатен пръстен на $V \cap U_1$ е*

$$k[V \cap U_1] = \left\{ \sum_{i=0}^{2n-2} a_i(t_1) t_2^i \ \middle| \ a_i(t_1) \in k[t_1] \right\}.$$

Да се опише локалният пръстен $\mathcal{O}_S(\overline{V})$ на точката $S = [0:1:0] \in \overline{V}$.

Задача 6.14. *За алгебрично затворено поле k и полиноми $f(x), g(x) \in k[x]$ да се докаже, че афинният координатен пръстен на*

$$V = \{(x,y,z) \in k^3 \ | \ y^2 = f(x), \ \ z^2 = g(x)\}$$

е изоморфен на

$$k[V] = \{a(x) + b(x)y + c(x)z + d(x)yz \ | \ a(x), b(x), c(x), d(x) \in k[x]\}.$$

Нека α е общ корен на $f(x)$ и $g(x)$, β е корен на $f(x)$, но не и на $g(x)$, а γ не е корен нито на $f(x)$, нито на $g(x)$. Да се опишат локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V)$, $\mathcal{O}_r(V)$, $\mathcal{O}_q(V)$ на точките $p = (\alpha, 0, 0), q = (\beta, 0, \lambda), r = (\gamma, \mu, \nu) \in V$.

Задача 6.15. *В означенията от Задача 6.14 да се докаже, че ако* $\deg(f) \geq 3$, $\deg(g) \geq 3$, *то Зариски затворената обвивка на $V \subset U_3$ в $\mathbb{P}^3(k)$ е*

$$\overline{V} = \left\{ [x:y:z:t] \in \mathbb{P}^3(k) \ \middle| \ y^2 t^{\deg(f)-2} = t^{\deg(f)} f\left(\frac{x}{t}\right), \ z^2 t^{\deg(g)-2} = t^{\deg(g)} g\left(\frac{x}{t}\right) \right\}.$$

Да се опише функционалното поле $k(\overline{V})$ на $\overline{V}$ и локалните пръстени $\mathcal{O}_P(\overline{V})$, $\mathcal{O}_Q(\overline{V})$, $\mathcal{O}_R(\overline{V})$ на точките

$$P = [\alpha : 0 : 0 : 1], \quad Q = [\beta : 0 : \lambda : 1], \quad R = [\gamma : \mu : \nu : 1] \in \overline{V}.$$

Задача 6.16. *В означенията от Задача 6.15 да се докаже, че стандартната хиперравнина $H_4 = \{[x:y:z:t] \in \mathbb{P}^3(k) \ | \ t = 0\}$ пресича $\overline{V}$ в проективната права*

$$\overline{V} \cap H_4 = \{[0:y:z:0] \in \mathbb{P}^3(k)\} \simeq \{[y:z] \in \mathbb{P}^1(k)\} = \mathbb{P}^1(k).$$

За $U_1 = \{[x:y:z:t] \in \mathbb{P}^3(k) \ | \ y \neq 0\}$ да се провери, че афинният координатен пръстен $k\left[\overline{V} \cap H_4 \cap U_1\right] = k\left[\frac{z}{y}\right]$ съвпада с пръстена на полиномите на една променлива и да се опишат локалните пръстени на точките от $\overline{V} \cap H_4 \cap U_1$.

4. Рационални изображения

Нека V и W са квази-афинни или квази-проективни многообразия. Разглеждаме двойките (U, φ_U), където $U \subseteq V$ е непразно Зариски отворено подмножество, а $\varphi_U : U \to W$ е регулярно изображение. Определяме релация $(U_1, \varphi_{U_1}) \sim (U_2, \varphi_{U_2})$, ако съществува непразно Зариски отворено $U \subseteq U_1 \cap U_2$ с $\varphi_{U_1}|_U = \varphi_{U_2}|_U$. Съгласно Лема 5.22, $(U_1, \varphi_{U_1}) \sim (U_2, \varphi_{U_2})$ тогава и само тогава, когато $\varphi_{U_1}|_{U_1 \cap U_2} = \varphi_{U_2}|_{U_1 \cap U_2}$.
Съотношението $(U_1, \varphi_{U_1}) \sim (U_2, \varphi_{U_2})$ за $\varphi_{U_1}|_{U_1 \cap U_2} = \varphi_{U_2}|_{U_1 \cap U_2}$ е релация на еквивалентност. Класовете на еквивалентност $\varphi = \overline{(U, \varphi_U)}$ се наричат рационални изображения $\varphi : V \dashrightarrow W$. Рационалните изображения $\varphi : V \dashrightarrow W$ не са обезателно определени във всяка точка на V.

Определение 6.17. *Обединението $\mathcal{D} = \cup_{(U, \varphi_U) \in \varphi} U$ се нарича област на регулярност на φ.*

Областта на регулярност $\mathcal{D}$ на рационално изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ е Зариски отворено подмножество на V. Ограничението $\varphi : \mathcal{D} \to W$ е регулярно изображение.

Определение 6.18. *Рационалното изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ е доминантно, ако образът $\varphi(\mathcal{D})$ на областта на регулярност $\mathcal{D}$ на φ е навсякъде гъст в W.*

Лема 6.19. *Регулярните изображения $\varphi : V \to W$ на многообразия са непрекъснати относно топологията на Зариски.*

Доказателство: По определение, трябва да докажем отвореност на праобраза $\varphi^{-1}(U_1)$ на всяко Зариски отворено подмножество $U_1 \subseteq W$. Вземайки предвид $\varphi^{-1}(U_1) \cap \varphi^{-1}(W \setminus U_1) = \emptyset$, забелязваме, че $\varphi^{-1}(U_1) = V \setminus \varphi^{-1}(W \setminus U_1)$ е Зариски отворено тогава и само тогава, когато $\varphi^{-1}(W \setminus U_1)$ е Зариски затворено за всяко Зариски затворено подмножество $W \setminus U_1$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $W \subseteq k^m$ е квази-афинно многообразие, защото крайните обединения на Зариски затворени подмножества са Зариски затворени. Аналогично, можем да предполагаме, че $V \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие, защото произволно квази-проективно многообразие се покрива от краен брой квази-афинни и крайното обединение на затворени подмножества е затворено. В Зариски отворена околност $W_p \subseteq V$ на точка $p \in V$, регулярното изображение $\varphi = \left(\frac{f_1}{g_1}, \ldots, \frac{f_m}{g_m}\right) : W_p \to k^m$ се задава с частни на полиноми. За всяко Зариски затворено подмножество $Z = V(h_1, \ldots, h_l) \cap W$ на W, пра-образът $\varphi^{-1}(Z) \cap W_p$ е множеството на общите нули на числителите на $h_j\left(\frac{f_1}{g_1}, \ldots, \frac{f_m}{g_m}\right)$, т.е. $\varphi^{-1}(Z)$ е локално затворено. Покриваме V с афинни Зариски отворени околности от описания тип и избираме крайно подпокритие благодарение на ньотеровостта на топологията на Зариски. Понеже крайните обединения на Зариски затворени подмножества са Зариски затворени, оттук следва затвореността на $\varphi^{-1}(Z)$ във V и непрекъснатостта на регулярното изображение $\varphi : V \to W$, Q.E.D.

Лема 6.20. *Рационалното изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ е доминантно тогава и само тогава, когато за произволен представител (U, φ_U) на класа на еквивалентност $\overline{(U, \varphi_U)} = \varphi$ образът $\varphi_U(U)$ на U е Зариски гъст в W.*

Доказателство: По определение, U се съдържа в областта на регулярност $\mathcal{D} = \cup_{(U, \varphi_U) \in \varphi} U$ на φ, така че от $\overline{\varphi_U(U)} = W$ следва $\overline{\varphi(\mathcal{D})} = W$.
Нека $\varphi : V \dashrightarrow W$ е доминантно рационално изображение с област на регулярност $\mathcal{D}$, а (U, φ_U) е представител на φ. Тогава $\mathcal{D} \subseteq V = \overline{U}$, така че $\mathcal{D}$ се състои от гранични точки $p = \lim\limits_{n \to \infty} p_n$, $p_n \in U$ на U.

От непрекъснатостта на регулярното изображение $\varphi_U : U \to W$ относно топологията на Зариски следва, че

$$\varphi(p) = \varphi(\lim_{n\to\infty} p_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi(p_n),$$

или образът $\varphi(\mathcal{D}) \subseteq \overline{\varphi_U(U)}$ на областта на регулярност на φ се състои от гранични точки на $\varphi_U(U)$. Сега от $W = \overline{\varphi(\mathcal{D})} \subseteq \overline{\varphi_U(U)}$ получаваме $\overline{\varphi_U(U)} = W$, Q.E.D.

Твърдение 6.21. *Ако k е алгебрично затворено поле, то доминантните рационални изображения $\varphi : V \dashrightarrow W$ на многообразия са във взаимно еднозначно съответствие с влаганията $\varphi^* : k(W) \hookrightarrow k(V)$ на съответните функционални полета като k-алгебри.*

Доказателство: Нека (U, φ_U) е представител на доминантно рационално изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$. Твърдим, че всеки елемент $\overline{(W_0, f)} \in k(W)$ се издърпва от морфизма $\varphi_U : U \to W$ до елемент $\overline{\left(\varphi_U^{-1}(W_0), \varphi_U^* f\right)} \in \overline{k(V)}$. Преди всичко, Зариски отвореното подмножество $\varphi_U^{-1}(W_0) \subseteq V$ е непразно. При допускане на противното, от $\varphi_U^{-1}(W_0) = \emptyset$ следва, че $\varphi_U(U) \subseteq W \setminus W_0$. Вземайки Зариски затворени обвивки получаваме $W = \overline{\varphi_U(U)} \subseteq W \setminus W_0$ съгласно Лема 6.20. Оттук $W_0 = \emptyset$, което противоречи на определението за функционално поле $k(W)$. Композицията $\varphi_U^* f = f\varphi_U$ е регулярно изображение, т.е. регулярна функция, защото локално φ_U се задава с частни на полиноми и суперпозицията на частни на полиноми е частно на полиноми. И така, произволен представител (U, φ_U) на доминантно рационално изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ задава съответствие

$$\varphi_U^* : k(W) \longrightarrow k(V),$$
$$\varphi_U^* \overline{(W_0, f)} = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_0), \varphi_U^* f)}.$$

Ако (U_1, φ_{U_1}) е друг представител на φ, то $\left(\varphi_{U_1}^{-1}(W_0), \varphi_{U_1}^* f\right) \sim \left(\varphi_U^{-1}(W_0), \varphi_U^* f\right)$, защото от $f|_{W_0 \cap \varphi_U \varphi_{U_1}^{-1}(W_0)} = f|_{\varphi_{U_1}\varphi_U^{-1}(W_0)\cap W_0}$ следва

$$f\varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(W_0)\cap\varphi_{U_1}^{-1}(W_0)} = f\varphi_{U_1}|_{\varphi_U^{-1}(W_0)\cap\varphi_{U_1}^{-1}(W_0)}.$$

Ако $(W_0, f) \sim (W_1, g)$, то $f|_{W_0\cap W_1} = g|_{W_0\cap W_1}$ и

$$f\varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(W_0)\cap\varphi_U^{-1}(W_1)} = g\varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(W_0)\cap\varphi_U^{-1}(W_1)}.$$

С това получаваме, че изображението

$$\varphi^* : k(W) \longrightarrow k(V),$$
$$\varphi^* \overline{(W_0, f)} = \varphi_U^* \overline{(W_0, f)} = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_0), \varphi_U^* f)}$$

е коректно определено и не зависи от избора на представители $(U, \varphi_U) \in \varphi$ и $(W_0, f) \in \overline{(W_0, f)}$. Още повече, φ^* е хомоморфизъм на k-алгебри, защото

$$\varphi^*(\overline{(W_1, f_1)} + \overline{(W_2, f_2)}) = \varphi^*(\overline{(W_1 \cap W_2, f_1 + f_2)}) =$$
$$= \overline{(\varphi_U^{-1}(W_1 \cap W_2), \varphi_U^*(f_1 + f_2))} = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_1), \varphi_U^* f_1)} + \overline{(\varphi_U^{-1}(W_2), \varphi_U^* f_2)} =$$
$$= \overline{(\varphi^{-1}(W_1), \varphi^* f_1)} + \overline{(\varphi^{-1}(W_2), \varphi^* f_2)},$$
$$\varphi^*(\overline{(W_1, f_1)}.\overline{(W_2, f_2)}) = \varphi^*(\overline{(W_1 \cap W_2, f_1.f_2)}) = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_1 \cap W_2), \varphi^*(f_1.f_2))} =$$
$$= \overline{(\varphi_U^{-1}(W_1), \varphi_U^* f_1)}.\overline{(\varphi_U^{-1}(W_2), \varphi_U^* f_2)} = \overline{(\varphi^{-1}(W_1), \varphi^* f_1)}.\overline{(\varphi^{-1}(W_2), \varphi^* f_2)} \quad \text{и}$$
$$\varphi^*(c\overline{(W_1, f_1)}) = \varphi^*(\overline{(W_1, cf_1)}) = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_1), \varphi_U^*(cf_1))} =$$
$$c\overline{(\varphi_U^{-1}(W_1), \varphi_U^* f_1)} = c\overline{(\varphi^{-1}(W_1), \varphi^* f_1)}$$

за $\forall \overline{(W_1, f_1)}, \overline{(W_2, f_2)} \in k(W)$, $\forall c \in k$.

За да докажем, че $\varphi^* : k(W) \to k(V)$ е влагане, избираме $\overline{(W_o, f)} \in k(W)$ с $\varphi^* \overline{(W_o, f)} = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_o), f\varphi_U)} = \overline{(V_o, 0)}$ за някакво Зариски оотврено подмножество $\emptyset \neq V_o \subseteq V$. Тогава $\varphi_U^{-1}(W_o) \cap V_o \neq \emptyset$ е непразно Зариски отворено подмножество на V, като сечение на Зариски отворените $\emptyset \neq \varphi_U^{-1}(W_o) \subseteq V_o$ и $\emptyset \neq V_o \subseteq V$. От $f\varphi_U|_{\varphi_U^{-1}(W_o) \cap V_o} = 0$ следва $f|_{W_o \cap \varphi_U(V_o)} = 0$ с $W_o \cap \varphi_U(V_o) \neq \emptyset$. Произволна точка $p \in W_o \cap \varphi_U(V_o)$ има Зариски отворена околност $p \in W_p \subseteq W_o$, така че $f|_{W_p} = \frac{g}{h}|_{W_p}$ за полиноми g, h. Сега от $0 = f|_{W_p \cap \varphi_U(V_o)} = \frac{g}{h}|_{W_p \cap \varphi_U(V_o)}$ следва $W_p \cap \varphi_U(V_o) \subseteq V(g)$, откъдето Зариски затворената обвивка $W = \overline{W_p} \cap \overline{\varphi_U(V_o)} = \overline{W_p \cap \varphi_U(V_o)} \subseteq V(g)$ и $\overline{(W_o, f)} = \overline{(W, 0)}$. Това доказва, че $\varphi^* : k(W) \to k(V)$ е влагане.

Нека $\alpha : k(W) \to k(V)$ е влагане на k-алгебри. Избираме афинно Зариски отворено подмножество $\emptyset \neq W_o \subseteq W$ и разглеждаме

$$\alpha : k(W) = k(W_o) = F(k[W_o]) \longrightarrow k(V)$$

като хомоморфизъм на полето от частни $F(k[W_o])$ на афинния координатен пръстен $k[W_o]$ на W_o. За произволни афинни координати $y_1, \ldots, y_m$ върху $k^m \supseteq W_o$ разглеждаме $\alpha(\overline{y_i}) = \overline{(V_i, f_i)} \in k(V)$. Нека V_0' е непрзано, афинно, Зариски отворено подмножество на Зариски отвореното подмножество $\emptyset \neq V_1 \cap \ldots \cap V_m \subseteq V$. Тогава $\varphi_0 = (f_1, \ldots, f_m) : V_0' \to k^m$ е регулярно изображение. Ако $W_o = W_1 \cap W'$ за афинно многообразие $W_1 \subseteq k^m$ и Зариски отворено $\emptyset \neq W' \subseteq k^m$, то

$$\varphi_o = (f_1, \ldots, f_m) : V_0' \longrightarrow W_1$$

взема стойности в W_1. Полагаме $V_0 := V_0' \cap \varphi_0^{-1}(W')$ и получаваме регулярно изображение $\varphi_0 = (f_1, \ldots, f_m) : V_0 \to W_1 \cap W' = W_o$. Нека $\varphi = \overline{(V_0, \varphi_0)} \in k(V)$ е класът на еквивалентност на (V_0, φ_0).

За да установим съвпадението $\varphi^* = \alpha$ разглеждаме изображението

$$\varphi_0^* : k[W_o] \longrightarrow \mathcal{O}_{V_0}(V_0),$$

$$\varphi_0^*(\overline{g}) = \overline{(V_0, g\varphi_0)} = \overline{(V_0, g(f_1, \ldots, f_m))} \quad \text{за} \quad \forall \overline{g} \in k[W_o].$$

Тук $g(f_1, \ldots, f_m)$ е регулярна функция върху V_0 в качеството си на полином на регулярните функции $f_1, \ldots, f_m$ върху V_0. За коректността на определението на φ_0^* трябва да одкажем независимост от избора на полином g с фиксиран ъсседен клас $\overline{g} \in k[W_o] = k[y_1, \ldots, y_m]/I(W_o)$ и от избора на представители (V_i, f_i) на $\overline{(V_i, f_i)} \in k(V)$. Наистина, за $\forall h \in I(W_o) \triangleleft k[y_1, \ldots, y_m]$ имаме $h(f_1, \ldots, f_m)|_{V_0} = h|_{\varphi_0(V_0)} = 0$, съгласно $\varphi_0(V_0) \subseteq W_o$. Ако $(V_i', f_i') \simeq (V_i, f_i)$ за $\forall 1 \leq i \leq m$, то

$$G := g(f_1', \ldots, f_m') - g(f_1, \ldots, f_m) =$$
$$= g(f_1 + (f_1' - f_1), \ldots, f_m + (f_m' - f_m)) - g(f_1, \ldots, f_m)$$

е полином на регулярните функции $f_1, \ldots, f_m, f_1' - f_1, \ldots, f_m' - f_m$ върху V_0, чиито мономи са кратни на поне един от множителите $f_1' - f_1, \ldots, f_m' - f_m$. Следователно $G|_{V_0} = 0$ и определението $\varphi_0^*(\overline{g}) = \overline{(V_0, g(f_1, \ldots, f_m)} \in \mathcal{O}_{V_0}(V_0)$ е коректно.

Изборажението $\varphi_0^* : k[W_o] \to \mathcal{O}_{V_0}(V_0)$ е хомоморфизъм на k-алгебри, съгласно

$$\varphi_0^*(\overline{g_1} + \overline{g_2}) = \varphi_0^*(\overline{g_1 + g_2}) = \overline{(V_0, (g_1 + g_2)(f_1, \ldots, f_m))} =$$
$$= \overline{(V_0, g_1(f_1, \ldots, f_m) + g_2(f_1, \ldots, f_m))} =$$
$$= \overline{(V_0, g_1(f_1, \ldots, f_m))} + \overline{(V_0, g_2(f_1, \ldots, f_m))} = \varphi_0^*(\overline{g_1}) + \varphi_0^*(\overline{g_2}),$$
$$\varphi_0^*(\overline{g_1} \ \ \overline{g_2}) = \varphi_0^*(\overline{g_1 g_2}) = \overline{(V_0, (g_1 g_2)(f_1, \ldots, f_m))} =$$
$$= \overline{(V_0, g_1(f_1, \ldots, f_m) \ \ g_2(f_1, \ldots, f_m))} =$$
$$= \overline{(V_0, g_1(f_1, \ldots, f_m))} \ \ \overline{(V_0, g_2(f_1, \ldots, f_m))} = \varphi_0^*(\overline{g_1}) \ \ \varphi_0^*(\overline{g_2}) \quad \text{и}$$

$$\varphi_0^*(\lambda\overline{g_1}) = \varphi_0^*(\overline{\lambda g_1}) = \overline{(V_0, (\lambda g_1)(f_1, \dots, f_m))} = \overline{(V_0, \lambda g_1(f_1, \dots, f_m))} =$$
$$= \lambda\overline{(V_0, g_1(f_1, \dots, f_m))} = \lambda\varphi_0^*(\overline{g_1})$$

за произволни $\overline{g_1}, \overline{g_2} \in k[W_o]$, $\lambda \in k$. От

$$\varphi_0^*(\overline{y_i}) = \overline{(V_0, y_i(f_1, \dots, f_m))} = \overline{(V_0, f_i)} = \overline{(V_i, f_i)} = \alpha(\overline{y_i})$$

за $\forall 1 \leq i \leq m$ следва съвпадението на хомоморфизмите

$$\varphi_0^* = \alpha : k[W_o] \longrightarrow \mathcal{O}_{V_0}(V_0),$$

защото k-алгебрата $k[W_o] = k[\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}]$ се поражда от $\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}$. Разглеждаме $\mathcal{O}_{V_0}(V_0)$ като подпръстен на функционалното поле $k(V_0) = k(V)$ и забелязваме, че $\varphi_0^* = \alpha : k[W_o] \to k(V)$ се продължава еднозначно върху полето от частни $F(k[W_o]) = k(W_o) = k(W)$ на $k[W_o]$. По този начин получаваме $\varphi_0^* = \alpha : k(W) \hookrightarrow k(V)$ за представителя (V_0, φ_0) на $\varphi = \overline{(V_0, \varphi_0)}$, откъдето $\varphi^* = \alpha : k(W) \to k(V)$.
Твърдим, че рационалното изображение $\varphi = \overline{(V_0, \varphi_0)} : V \dashrightarrow W$ е доминантно. С допускане на противното, ако $\varphi_0(V_0) \subsetneq W$, то за всяко Зариски отворено $\emptyset \neq W_1 \subseteq W$ имаме $\overline{\varphi_0(V_0)} \cap W_1 \subsetneq W_1$, защото от $\overline{\varphi_0(V_0)} \cap W_1 = W_1$ следва $\overline{\varphi_0(V_0)} = \overline{\varphi_0(V_0)} \cap \overline{W_1} = \overline{\overline{\varphi_0(V_0)} \cap W_1} = \overline{W_1} = W$ след вземане на Зариски затворена обвивка. Съгласно $\overline{\varphi_0(V_0)} \cap W_o \subsetneq W_o$ за афинно Зариски отворено $W_o \subseteq W$, $W_o \subseteq k^m$ съществува полином $g \in k[y_1, \dots, y_m]$ с $g|_{\overline{\varphi_0(V_0)} \cap W_o} = 0$, $g|_{W_o} \neq 0$. Следователно $\overline{\varphi_0(V_0)} \cap W_o \subseteq V(g)$, откъдето и $\overline{\varphi_0(V_0)} = \overline{\overline{\varphi_0(V_0)} \cap W_o} \subseteq \overline{V(g)} = V(g)$ след вземане на Зариски затворена обвивка. Сега $g|_{\overline{\varphi_0(V_0)}} = 0$ показва, че $g|_{\varphi_0(V_0)} = 0$ или $g\varphi_0|_{V_0} = 0$. Но $\alpha(\overline{g}) = \varphi_0^*(\overline{g}) = \overline{(V_0, g\varphi_0)} = \overline{(V, 0)} \in k(V)$ за влагането $\alpha : k[W_o] \to \mathcal{O}_{V_0}(V_0)$ изисква $\overline{g} = \overline{0} \in k[W_o]$, така че $g \in I(W_o)$ и $g|_{W_o} = 0$, противно на избора на g. Противоречието доказва доминантността на $\varphi = \overline{(V_0, \varphi_0)} : V \dashrightarrow W$.
За взаимната еднозначност на съответствието между доминантните рационални изображения $\varphi : V \dashrightarrow W$ и влаганията на k-алгебри $\varphi^* : k(W) \hookrightarrow k(V)$, вече проверихме, че доминантното рационално изображение $\varphi_\alpha : V \dashrightarrow W$, отговарящо на влагане на k-алгебри $\alpha : k(W) \hookrightarrow k(V)$ индуцира хомоморфизма $\varphi_\alpha^* = \alpha : k(W) \hookrightarrow k(V)$. За произволно доминантно рационално изображение $\varphi : V \dashrightarrow W$ твърдим, че индуцираното от $\varphi^* : k(W) \hookrightarrow k(V)$ доминантно рационално изображение $\psi : V \dashrightarrow W$ съвпада с φ. По-точно, за произволно афинно отворено подмножество $W_o \subseteq W$ с афинен координатен пръстен $k[W_o] = k[\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}]$ избираме $\overline{(V_i, f_i)} = \varphi^*(\overline{y_i}) = \overline{(\varphi_U^{-1}(W_o), y_i\varphi)}$ и полагаме $\psi = \overline{(V_0, (f_1, \dots, f_m))}$. За $\forall 1 \leq i \leq m$, i-тата компонента f_i на ψ съвпада с i-тата компонента $y_i\varphi$ на φ върху подходящо Зариски отворено подмножество на V. Следователно $\varphi = \psi : V \dashrightarrow W$, Q.E.D.

5. Бирационалност на многообразия

Определение 6.22. *Рационалното изображение $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално, ако се ограничава до бирегулярно изображение $\varphi : U_1 \to U_2$ на непразни Зариски отворени подмножества $U_i \subseteq V_i$.*

Лема 6.23. *Рационалното изображение $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално тогава и само тогава, когато съществува рационално изображение $\psi : V_2 \dashrightarrow V_1$ с $\psi\varphi = \mathrm{Id}_{V_1}$, $\varphi\psi = \mathrm{Id}_{V_2}$.*

Доказателство: Ако $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално изображение, то съществува бирегулярно изображение $\varphi : U_1 \to U_2$ на непразни Зариски отворени подмножества $U_i \subseteq V_i$. Разглеждаме рационалното изображение

$$\psi = \overline{(U_2, (\varphi^{-1}|_{U_2}))} : V_2 \dashrightarrow V_1$$

с $\psi\varphi|_{U_1} = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\varphi\psi|_{U_2} = \mathrm{Id}_{U_2}$. Всяка точка $p \in V_1 = \overline{U_1}$ на многообразието V_1 е гранична точка на непразното Зариски отворено подмножество U_1, т.е. съществува редица $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset U_1$ с $p = \lim_{n\to\infty} p_n$. Съгласно непрекъснатостта на композиция на регулярни изображения и $\psi\varphi|_{U_1} = \mathrm{Id}_{U_1}$ имаме

$$\psi\varphi(p) = \psi\varphi(\lim_{n\to\infty} p_n) = \lim_{n\to\infty} \psi\varphi(p_n) = \lim_{n\to\infty} p_n = p.$$

Това доказва $\psi\varphi = \mathrm{Id}_{V_1}$. Аналогично се проверява $\varphi\psi = \mathrm{Id}_{V_2}$.
Нека $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ и $\psi : V_2 \dashrightarrow V_1$ са рационални изображения с $\psi\varphi = \mathrm{Id}_{V_1}$, $\varphi\psi = \mathrm{Id}_{V_2}$. Ако $\mathcal{D}_\varphi \subseteq V_1$, $\mathcal{D}_\psi \subseteq V_2$ са техните области на регулярност, то ограничението

$$\varphi : U_1 := \mathcal{D}_\varphi \cap \varphi^{-1}(\mathcal{D}_\psi) \longrightarrow U_2 := \mathcal{D}_\psi \cap \psi^{-1}(\mathcal{D}_\varphi)$$

е регулярно взаимно еднозначно изображение на непразни Зариски отворени подмножества $U_i \subseteq V_i$ с регулярно обратно

$$\varphi^{-1} = \psi : U_2 = \mathcal{D}_\psi \cap \psi^{-1}(\mathcal{D}_\varphi) \longrightarrow U_1 = \mathcal{D}_\varphi \cap \varphi^{-1}(\mathcal{D}_\psi).$$

Следователно $\varphi : U_1 \to U_2$ е бирегулярно изображение, откъдето $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално изображение, Q.E.D.

Лема 6.24. *Рационалното изображение $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ на алгебрични многообразия над алгебрично затворено поле k е бирационално тогава и само тогава, когато индуцираният хомоморфизъм на k-алгебри $\varphi^* : k(W) \to k(V)$ е изоморфизъм.*

Доказателство: Ако $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално изображение, то съществува рационално изображение $\varphi^{-1} : V_2 \dashrightarrow V_1$ с $\varphi^{-1}\varphi = \mathrm{Id}_{V_1}$, $\varphi\varphi^{-1} = \mathrm{Id}_{V_2}$. В резултат,

$$\varphi^*(\varphi^{-1})^* = (\varphi^{-1}\varphi)^* = \mathrm{Id}_{V_1}^* = \mathrm{Id}_{k(V_1)}, \quad (\varphi^{-1})^*\varphi^* = (\varphi\varphi^{-1})^* = \mathrm{Id}_{V_2}^* = \mathrm{Id}_{k(V_2)}$$

и $\varphi^* : \overline{k}(V_2) \to \overline{k}(V_1)$ е изоморфизъм на k-алгебри.
Ако рационалното изображение $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ индуцира изоморфизъм на k-алгебри $\varphi^* : k(V_2) \to k(V_1)$, то съгласно Твърдение 6.21 съществува доминантно рационално изображение $\psi : V_2 \dashrightarrow V_1$ с $\psi^* = (\varphi^*)^{-1}$. От

$$\mathrm{Id}_{V_1}^* = \mathrm{Id}_{k(V_1)} = (\varphi^*)^{-1}\varphi^* = \psi^*\varphi^* = (\varphi\psi)^*$$

и

$$\mathrm{Id}_{V_2}^* = \mathrm{Id}_{k(V_2)} = \varphi^*(\varphi^*)^{-1} = \varphi^*\psi^* = (\psi\varphi)^*$$

следват $\varphi\psi = \mathrm{Id}_{V_1}$ и $\psi\varphi = \mathrm{Id}_{V_2}$ по същото твърдение. Ако $\mathcal{D}_1 \subset V$ е областта на регулярност на φ, а $\mathcal{D}_2 \subseteq W$ е областта на регулярност на ψ, то ограничението $\varphi : \mathcal{D}_1 \cap \varphi^{-1}(\mathcal{D}_2) \to \psi^{-1}(\mathcal{D}_1) \cap \mathcal{D}_2$ е бирегулярно и $\varphi : V_1 \dashrightarrow V_2$ е бирационално изображение, Q.E.D.

Твърдение 6.25. *Нека k е алгебрично затворено поле, X и Y са квази-афинни многообразия над k и $p \in X$, $q \in Y$ са точки. Тогава следните условия са еквивалентни:*
(i) локалните пръстени $\mathcal{O}_{q,Y} \simeq \mathcal{O}_{p,X}$ са изоморфни;
(ii) съществуват Зариски отворени околности U на p и V на q с бирегулярно изображение $\varphi : U \to V$, трансформиращо p в $\varphi(p) = q$.
В частност, ако $\mathcal{O}_{p,X}$ и $\mathcal{O}_{q,Y}$ са изоморфни, то квази-афинните многообразия X и Y са бирационални.

Доказателство: $(i) \Rightarrow (ii)$ Произволен изоморфизъм на k-алгебри

$$\alpha : \mathcal{O}_q(Y) \longrightarrow \mathcal{O}_p(X)$$

индуцира изоморфизъм

$$\alpha : k(Y) = F(\mathcal{O}_q(Y)) \longrightarrow F(\mathcal{O}_p(X)) = k(X)$$

на съответните полета от частни. Съгласно Лема 6.24, $\alpha = \varphi^*$ се индуцира от бирационално изображение $\varphi : X \dashrightarrow Y$. Ако $\mathcal{D}_\varphi, \mathcal{D}_{\varphi^{-1}}$ са областите на регулярност ан φ и $\varphi^{-1} : Y \to X$, то φ се ограничава до бирегулярно изображение $\varphi : \mathcal{D}_\varphi \cap \varphi^{-1}(\mathcal{D}_\psi) \to \psi^{-1}(\mathcal{D}_\varphi) \cap \mathcal{D}_\psi$ на непразните Зариски отворени подмножества $U := \mathcal{D}_\varphi \cap \varphi^{-1}(\mathcal{D}_\psi) \subseteq X$ и $V := \psi^{-1}(\mathcal{D}_\varphi) \cap \mathcal{D}_\psi \subseteq Y$. Локално, $\varphi = (f_1, \ldots, f_m)$ се задава от $\alpha(\overline{y_i}) = \overline{(V_i, f_i)} \in k(X)$. Съгласно $\alpha\mathcal{O}_q(Y) = \mathcal{O}_p(X)$ имаме $\alpha(\overline{y_i}) = \overline{(V_i, f_i)} \in \mathcal{O}_p(X)$, така че функциите f_i са регулярни в p и $\varphi(p)$ е коректно зададено. За да проверим, че $\varphi(p) = q$, забелязваме, че изоморфизмът на k-алгебри $\alpha : \mathcal{O}_q(Y) \to \mathcal{O}_p(X)$ индуцира изоморфизъм $\alpha : \mathcal{O}_q(Y)^* \to \mathcal{O}_p(X)^*$ на съответните мултипликативни групи на тези локални пръстени, а оттем и изоморфизъм

$$\alpha : \mathfrak{M}_q(Y) = \mathcal{O}_q(Y) \setminus \mathcal{O}_q(Y)^* \longrightarrow \mathcal{O}_p(X) \setminus \mathcal{O}_p(X)^* = \mathfrak{M}_p(X)$$

на съответните максимални идеали. Сега от $\overline{y_i} - q_i \in \mathfrak{M}_q(Y)$ следва $\alpha(\overline{y_i} - q_i) \in \mathfrak{M}_p(X)$, така че

$$0 = \alpha(\overline{y_i} - q_i)(p) = \varphi^*(\overline{y_i} - q_i)(p) = (\overline{y_i} - q_i)\varphi(p) = \varphi(p)_i - q_i.$$

Следователно $\varphi(p)_i = q_i$ за $\forall 1 \leq i \leq m$ и $\varphi(p) = q$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Ако $\varphi : U \to V$ е бирегулярно изображение на непразни Зариски отворени подмножества $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ с $\varphi(p) = q$ за някое $p \in U$, то можем да разглеждаме $\varphi : X \dashrightarrow Y$ като бирационално изображение, индуциращо изоморфизъм на k-алгебри $\varphi^* : k(Y) \to k(X)$. Твърдим, че φ^* се ограничава до изоморфизъм на съответните локални пръстени. Наистина, всяка рационална функция $\overline{(W_o, f)} \in k(Y)$ върху Y, която е регулярна в q се издърпва до рационлана функция $\varphi^*\overline{(W_o, f)} = \overline{(\varphi_{U_1}^{-1}(W_o), f\varphi_{U_1})} \in k(X)$, която е регулярна в p. Следователно $\varphi^*\mathcal{O}_q(Y) \subseteq \mathcal{O}_p(X)$. Обратно, ако рационалната функция $\varphi^*\overline{(W_o, f)} = \overline{(\varphi_{U_1}^{-1}(W_o), f\varphi_{U_1})} \in k(X)$ върху X е регулярна в p, то рационалната функция $\overline{(W_o, f)} \in k(Y)$ върху Y е регулярна в q и $\overline{(W_o, f)} \in \mathcal{O}_q(Y)$. Това доказва, че $\alpha : k(Y) \to k(X)$ се ограничава до изоморфизъм на k-алгебри $\alpha : \mathcal{O}_q(Y) \to \mathcal{O}_p(X)$, Q.E.D.
Доказателството на $(ii) \Rightarrow (i)$ от Твърдение 6.25 показва, че всяко бирационално изображение $\varphi : X \dashrightarrow Y$ на квази-афинни или квази-проективни многообразия индуцира изоморфизми $\varphi^* : \mathcal{O}_{\varphi(p)}(Y) \to \mathcal{O}_p(X)$ на локалните пръстени $\mathcal{O}_p(X)$ на точките $p \in \mathcal{D}$ от областта на регулярност $\mathcal{D}$ на φ в X с локалните пръстени $\mathcal{O}_{\varphi(p)}$ на образите $\varphi(p)$ на p в Y.

6. Крайни доминантни рационални изображения

Определение 6.26. *Нека $f : X \dashrightarrow Y$ е рационално изображение на квази-афинни многообразия $X \subseteq k^n$, $Y \subseteq k^m$, $\mathcal{D} \subseteq X$ е областта на регулярност на f, а*

$$\Gamma_f^{\mathcal{D}} = \{(x, f(x)) \in k^{n+m} \mid x \in \mathcal{D}\}.$$

Тогава Зариски затворената обвивка

$$\Gamma_f = \overline{\Gamma_f^{\mathcal{D}}} \subseteq k^{n+m}$$

се нарича график на f.

Първата канонимна проекция, $\pi_1 : \Gamma_f \to X$ е бирационална, защото изображението $\pi_1 : \Gamma_f^{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$ е бирегулярно, $\Gamma_f^{\mathcal{D}}$ е Зариски гъсто в Γ_f, $\mathcal{D}$ е Зариски гъсто в X.

По този начин, всяко рационално изображение $f : X \dashrightarrow Y$ на неприводими афинни многообразия може да се изучава с точност до бирационалност чрез регулярната проекция $\pi_2 : \Gamma_f \to Y$, която има едни и същи слоеве с f над $f(\mathcal{D})$.

$$\begin{tikzcd} \Gamma_f \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \arrow[d, "Id_Y"'] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}.$$

Твърдим, че Γ_f е неприводимо. Наистина, ако $\Gamma_f = Z_1 \cup Z_2$ е обединение на Зариски затворени подмножества $Z_j \subseteq \Gamma_f$, то $\Gamma_f^{\mathcal{D}} = (\Gamma_f^{\mathcal{D}} \cap Z_1) \cup (\Gamma_f^{\mathcal{D}} \cap Z_2)$ е обединение на Зариски затворени подмножества $\Gamma_f^{\mathcal{D}} \cap Z_j \subseteq \Gamma_f^{\mathcal{D}}$. Съгласно неприводимостта на Зариски отвореното подмножество $\mathcal{D}$ на многообразието X и бирегулярността на $\pi_1 : \Gamma_f^{\mathcal{D}} \to \mathcal{D}$, $\Gamma_f^{\mathcal{D}}$ е неприводимо и $\Gamma_f^{\mathcal{D}} \cap Z_1 = \Gamma_f^{\mathcal{D}}$ след евентуална замяна на Z_1 с Z_2. Оттук

$$\Gamma_f = \overline{\Gamma_f^{\mathcal{D}}} = \overline{\Gamma_f^{\mathcal{D}}} \cap Z_1 = \Gamma_f \cap Z_1 = Z_1$$

и Γ_f е неприводимо.

Ще казваме, че свойство P е изпълнено в обща точка на квази-афинно или квази-проективно многообразие X, ако съществува собствено, Зариски затворено подмножество $Y \subset X$, така че P е изпълнено за $\forall x \in X \setminus Y$.

Твърдение 6.27. *Нека k е алгебрично затворено поле, $\varphi : X \dashrightarrow Y$ е доминантно рационално изображение на квази-афинни или квази-проективни многообразия, а $\mathcal{D} \subseteq X$ е областта на регулярност на φ. В такъв случай слоят $\varphi^{-1}(q)$ на $\varphi : \mathcal{D} \to \varphi(\mathcal{D})$ над обща точка q на $\varphi(\mathcal{D})$ е краен тогава и само тогава, когато разширението $k(X) \supseteq \varphi^* k(Y)$ е крайно и броят $|\varphi^{-1}(q)|$ на точките в общ слой на φ не надминава степента $[k(X) : \varphi^* k(Y)]$ на разширението на съответните функционални полета,*

$$|\varphi^{-1}(q)| \leq [k(X) : \varphi^* k(Y)].$$

Доказателство: Без ограничение на общността можем да предполагаме, че

$$\varphi : X \longrightarrow Y$$

е регулярно доминантно изображение на квази-афинни многообразия $X \subseteq k^n$ и $Y \subseteq k^m$.

Броят на точките в общ слой на регулярно дочинантно изображение φ на квази-афинни многообразия е мултипликативна функция на φ. По-точно, ако

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2\varphi_1"'] & V_2 \arrow[d, "\varphi_2"] \\ & V_3 \end{tikzcd} \tag{6.2}$$

е комутативна диаграма от регулярни доминантни изображения на квази-афинни многообразия с крайни общи слоеве, то за обща точка $q \in \varphi_2\varphi_1(V_1)$ и обща точка $r \in \varphi_2^{-1}(q)$ имаме

$$|(\varphi_2\varphi_1)^{-1}(q)| = |\varphi_2^{-1}(q)||\varphi_1^{-1}(r)|.$$

От друга страна, степента $[k(V) : \varphi^* k(W)]$ на разширението $\varphi^* k(W) \subseteq k(V)$, индуцирано от доминантно регулярно изображение $\varphi : V \to W$ е мултипликативна функция на φ. Това означава, че ако (6.2) е комутативна диаграма от регулярни доминантни изображения, която индуцира комутативна диагарама от крайни разширения

$$\begin{tikzcd}
k(V_1) & k(V_2) \arrow[l, "\varphi_1^*"'] \\
 & k(V_3) \arrow[ul, "(\varphi_2\varphi_1)^*"] \arrow[u, "\varphi_2^*"']
\end{tikzcd},$$

то

$$[k(V_1) : (\varphi_2\varphi_1)^* k(V_3)] = [k(V_2) : \varphi_2^* k(V_3)][k(V_1) : \varphi_1^* k(V_2)].$$

Изобщо, ако $E_1 \subseteq E_2$ и $E_2 \subset E_3$ са крайни разширения на полета, то $E_1 \subseteq E_3$ е крайно разширение от степен $[E_3 : E_1] = [E_3 : E_2][E_2 : E_1]$. По-точно, ако $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ е базис на E_2 над E_1 и $\beta_1, \ldots, \beta_m$ е базис на E_3 над E_2, твърдим, че $\{\alpha_i \beta_j \mid 1 \leq i \leq n, \ \ 1 \leq j \leq m\}$ е базис на E_3 над E_1.
Ако $\varphi : X \to Y$ е доминантно рационално изображение на квази-афинни многообразия $X \subseteq k^n$, $Y \subseteq k^m$, то графикът на φ

$$\Gamma_\varphi = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in X\} \subseteq k^{n+m}$$

се включва в комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
\Gamma_\varphi \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & Y \\
X \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

с бирегулярно π_1. Достатъчно е да докажем твърдението за втората канонична проекция $\pi_2 : \Gamma_\varphi \to Y$, защото $\varphi\pi_1 = \pi_2$, $\pi_1^* : k(X) \to k(\Gamma_\varphi)$ е изоморфизъм на k-алгебри и слоевете на π_1 се състоят от единствени точки.
За да разложим $\pi_2 : \Gamma_\varphi \to Y$ в произведение на по-прости изображения разглеждаме проекциите

$$\Pi_i : k^{n+m-i+1} \longrightarrow k^{n+m-i},$$

$$\Pi_i(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+m}) = (x_{i+1}, \ldots, x_{n+m})$$

за $\forall 1 \leq i \leq n$. Означаваме с $\varepsilon_o : \Pi_n \ldots \Pi_1(\Gamma_\varphi) \to Y$ тъждественото влагане на $\Pi_n \ldots \Pi_1(\Gamma_\varphi)$ в Y и представяме $\pi_2 = \varepsilon_o \Pi_i \ldots \Pi_1$. Трябва да установим неприводимостта на $\Pi_i \ldots \Pi_1(\Gamma_\varphi)$ за $\forall 1 \leq i \leq n$, след което да докажем твърдението за Π_i, $1 \leq i \leq n$ и за ε_o.
Ако подмножеството $V \subseteq k^s$ или $V \subseteq \mathbb{P}^s(k)$ е неприводимо относно топологията на Зариски и $\varphi : V \to W$ е регулярно изображение, то $\varphi(V)$ е неприводимо. По-точно, ако $\varphi(V) = Z_1 \cup Z_2$ е обединение на относително затворени подмножества $Z_j \subseteq \varphi(V)$, то $V = \varphi^{-1}(Z_1) \cup \varphi^{-1}(Z_2)$ е обединение на относително затворени $\varphi^{-1}(Z_j) \subseteq V$, съгласно непрекъснатостта на регулярните изображения относно топологията на Зариски - Лема 6.19. След евентуална размяна на Z_1 с Z_2 имаме $V = \varphi^{-1}(Z_1)$, поради неприводимоста на V. Оттук $\varphi(V) = Z_1$ и $\varphi(V)$ е неприводимо. В случая, от неприводимостта на графика Γ_φ на регулярното изображение $\varphi : X \to Y$ на квази-афинни многообразия следва неприводимостта на $\Pi_i \ldots \Pi_1(\Gamma_\varphi)$ за $\forall 1 \leq i \leq n$.
Тъждественото влагане $\varepsilon_o : \pi_2(\Gamma_\varphi) \to Y$ е бирационално, така че общите му слоеве имат единствени точки и индуцираният хомоморфизъм на k-алгебри $\varepsilon_o^* : k(Y) \to k(\pi_2(\Gamma_\varphi))$ е изоморфизъм.

За произволно $1 \leq i \leq n$ да означим $Z := \Pi_{i-1} \dots \Pi_1(\Gamma_\varphi)$, $S := \Pi_i \dots \Pi_1(\Gamma_\varphi)$ и да разгледаме $\Pi_i : Z \to S$ като сюрективно регулярно изображение на квази-афинни многообразия. То индуцира влагане

$$\Pi_i^* : k[S] = k[x_{i+1}, \dots, x_{n+m}]/I(S) \longrightarrow k[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+m}]/I(Z) = k[Z]$$

на съответните афинни координатни пръстени и влагане

$$\Pi_i^* : k(S) = F(k[S]) \longrightarrow F(k[Z]) = k(Z)$$

на функционалните полета. Слоят $\Pi_i^{-1}(q)$ на $\Pi_i : Z \to S$ над обща точка $q \in S$ е Зариски отворено подмножество на

$$M_q = \{x_i \in k \mid g(x_i, q) = 0 \quad \text{за} \quad \forall g \in I(Z)\} \subseteq k.$$

От включванията $I(S)[x_i] \subseteq I(Z) \subseteq k[x_{i+1}, \dots, x_{n+m}][x_i]$ следва, че $I(Z)/I(S)[x_i]$ е идеал в $k[x_{i+1}, \dots, x_{n+m}][x_i]/I(S)[x_i] = k[S][x_i]$, а оттам и идеал в $K(S)[x_i]$ за функционалното поле $k(S) = F(k[S])$ на S. Всеки идеал в $k(S)[x_i]$ е главен, така че $I(Z)/I(S)[x_i] = \langle \overline{G} \rangle \triangleleft k(S)[x_i]$ е главен идеал и

$$\Pi_i^{-1}(q) \subseteq \{x_i \in k \mid \overline{G}(x_i, q) = 0\}.$$

Ако полиномът $G(x_i, q) \not\equiv 0 \in k[x_i]$ не се анулира тъждествено, то $\overline{x_i} \in k[Z]$ е алгебричен над $k(S)$ и $k(Z) = k(S)(\overline{x_i}) \supseteq \Pi_i^* k(S) \simeq k(S)$ е крайно разширение. Общият слой $\Pi_i^{-1}(q)$ на Π_i се състои от корените на полинова $G(x_i, q)$, така че

$$|\Pi_i^{-1}(q)| \leq \deg(G(x_i, q)) = [k(Z) : \Pi_i^* k(S)].$$

Ако $G(x_i, q) \equiv 0 \in k[x_i]$, то x_i е трансцендентно нас $k(S)$ и разширението $k(Z) = k(S)(\overline{x_i}) \supseteq \Pi_i^* k(S) \simeq k(S)$ е безкрайно. Общият слой $\Pi_i^{-1}(q)$ е Зариски отворено подмножество на афинната права $M_q = k$. Собствените Зариски затворени подмножества на k са крайните, така че непразните Зариски отворени подмножества на безкрайните полета k са безкрайни и общият слой $\Pi_i^{-1}(q)$ на Π_i е безкраен, Q.E.D.

Задача 6.28. *Дадени са проективна повърхнина*

$$V = \{x = [x_0 : \dots : x_3] \in \mathbb{P}^3(k) \mid x_0 x_3^2 = x_0^3 - x_0^2 x_1 + x_0 x_1^2 - x_2^3\}$$

и рационално изображение

$$\varphi : \mathbb{P}^3(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k),$$
$$\varphi([x_0 : \dots : x_3]) = [x_0 : x_1 : x_2]$$

над алгебрично затворено поле k. *Да се докаже, че ограничението* $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k)$ *е доминантно рационално изображение и функционалното поле* $k(V)$ *на* V *е крайно разширение на* $\varphi^* k(\mathbb{P}^2)$. *Да се намери степента на разширението* $k(V) \supset \varphi^* k(\mathbb{P}^2(k))$ *и да се определи дали* $\varphi : V \to \mathbb{P}^2(k)$ *е бирационално.*

Упътване: Използвайте, че $V \cap U_0$ за $U_0 = \{x \in \mathbb{P}^3(k) \mid x_0 \neq 0\}$ е афинно Зариски отворено подмножество на V.

Задача 6.29. *Дадени са проективна повърхнина*

$$V = \{x = [x_0 : \dots : x_3] \in \mathbb{P}^3(k) \mid x_0 x_3^2 = x_0^3 - x_0^2 x_1 + x_0 x_1^2 - x_2^3\}$$

и рационално изображение

$$\varphi : \mathbb{P}^3(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^3(k),$$
$$\varphi([x_0 : \dots : x_3]) = [x_1 : x_2 : x_3 : x_1 + x_2].$$

Да се докаже, че:
(i) $\varphi : V \to \mathbb{P}^3(k)$ *е недоминантен морфизъм;*
(ii) $\varphi : V \to H = \{y = [y_0 : \dots : y_3] \in \mathbb{P}^3(k) \mid y_0 + y_1 - y_3 = 0\} \simeq \mathbb{P}^2(k)$ *е доминантен, небирационален морфизъм;*

(iii) функционалното поле $k(V)$ на V е разширение от степен 3 на $\varphi^* k(H)$, където $k(H)$ е функционалното поле на H.

Упътване: Работете с $V \cap U_1$ за $U_1 = \{x = [x_0 : \ldots : x_3] \in \mathbb{P}^3(k) \mid x_1 \neq 0\}$.

Задача 6.30. *Дадени са проективна повърхнина*

$$V = \{x = [x_0 : \ldots : x_3] \in \mathbb{P}^3(k) \mid x_0 x_3^2 = x_0^3 - x_0^2 x_1 + x_0 x_1^2 - x_2^3\}$$

и рационално изображение

$$\varphi : \mathbb{P}^3(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k),$$
$$\varphi([x_0 : \ldots : x_3]) = [x_0^2 : x_0 x_1 : x_1^2].$$

Да се докаже, че:
(i) допълнението $V \setminus \mathcal{D}$ на областта на регулярност $\mathcal{D}$ на $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k)$ е точка p;
(ii) рационалното изображение $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k)$ не е доминантно;
(iii) разширението $k(\mathcal{D} \cap U_0) \supset \varphi^* \overline{k}(\varphi(\mathcal{D} \cap U_0)$ не е крайно.

Задача 6.31. *Дадени са проективна повърхнина*

$$V = \{x = [x_0 : \ldots : x_3] \in \mathbb{P}^3(k) \mid x_0 x_3^2 = x_0^3 - x_0^2 x_1 + x_0 x_1^2 - x_2^3\}$$

и рационално изображение

$$\varphi : \mathbb{P}^3(k) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k),$$
$$\varphi([x_0 : \ldots : x_3]) = [x_0^2 : x_0 x_1 : x_2^2].$$

Да се докаже, че:
(i) допълнението $V \setminus \mathcal{D}$ на областта на регулярност $\mathcal{D}$ на $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k)$ е проективна права;
(ii) рационалното изображение $\varphi : V \dashrightarrow \mathbb{P}^2(k)$ е доминантно;
(iii) разширението $k(V) \supset \varphi^* k(\mathbb{P}^2(k))$ е от степен 4.

Упътване: (ii) Проверете, че $\varphi(V \cap U_0) \subset U_0'$ за

$U_0 = \{x = [x_0 : \ldots : x_3] \in \mathbb{P}^3(k) \mid x_0 \neq 0\}$, $U_0' = \{y = [y_0 : y_1 : y_2] \in \mathbb{P}^2(k) \mid y_0 \neq 0\}$;

(iii) Ако $t_1 = \frac{x_1}{x_0}$ и $t_2 = \frac{x_2}{x_0}$, то функционалното поле $\overline{k}(V) = k(V \cap U_0) = (\overline{t_1}, \overline{t_2}, \overline{t_3})$ е породено от $\overline{t_i} = t_i + I(V \cap U_0)$ за $1 \leq i \leq 3$ със съотношението $\overline{t_3}^2 = -\overline{t_2}^3 + \overline{t_1}^2 - \overline{t_1} + 1$. Проверете, че $\varphi^* \overline{k}(\mathbb{P}^2(k)) = k(\overline{t_1}, \overline{t_2}^2)$ и пресметнете степента

$$[k(V) : k(\overline{t_1}, \overline{t_2}^2)] = [k(V) : k(\overline{t_1}, \overline{t_2})][k(\overline{t_1}, \overline{t_2}) : k(\overline{t_1}, \overline{t_2}^2)].$$