Глава 5

Афинен координатен пръстен. Регулярни функции и изображения.

1. Афинен координатен пръстен

Определение 5.1. *За произволно подмножество $X \subseteq k^n$ на афинното пространство k^n с идеал*

$$I(X) = \{f(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n] \mid f(x) = 0 \text{ за } \forall x \in X\},$$

фактор-пръстенът

$$k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)$$

се нарича афинен координатен пръстен на X.

Ако полето k е безкрайно, то афинният координатен пръстен $k[k^n] = k[x_1, \ldots, x_n]$ на афинното пространство k^n е полиномиалният пръстен. С индукция по n ще докажем, че идеалът $I(k^n) = \{0\}$ е нулев. За целта да разгледаме полином

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{d} c_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n^i \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n],$$

който се анулира във всяка точка $a = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n$. Тогава за $\forall a' = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in k^{n-1}$ полиномът

$$f(a', x_n) = f(a_1, \ldots, a_{n-1}, x_n) = \sum_{i=0}^{d} c_i(a_1, \ldots, a_{n-1}) x_n^i \in k[x_n]$$

има безбройно много корени $a_n \in k$. Следователно $f(a', x_n) \equiv 0 \in k[x_n]$ и $c_i(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0$ за $\forall 0 \leq i \leq d$, $\forall a' = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in k^{n-1}$. С други думи, $c_i(x_1, \ldots, x_{n-1} \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ са полиноми, анулиращи се във всички точки $a' = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in k^{n-1}$. За $n = 1$ от горните разглеждания следва $f(x_1) \equiv 0 \in k[x_1]$. За произволно $n \in \mathbb{N}$, по индукционно предположение $c_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) \equiv 0 \in k[x_1, \ldots, x_{n-1}]$ за $\forall 0 \leq i \leq d$. Следователно $f(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0 \in k[x_1, \ldots, x_n]$ и $I(k^n) = \{0\}$ за $\forall n \in \mathbb{N}$.
Нека k е алгебрично затворено поле, а $X \subseteq k^n$ е афинно алгебрично множество. Ще обобщим взаимно еднозначното съответствие между афинните алгебрични множества $Y \subseteq k^n$ и радикалните идеали в $k[k^n] = k[x_1, \ldots, x_n]$ до взаимно еднозначно съответствие между афинните алгебрични подмножества $Y \subseteq X$ и техните идеали $I_X(Y)$ в афинния координатен пръстен $k[X]$ на X. В доказателството на Твърдение 3.17 установихме, че за произволен комутативен пръстен с единица R и произволен идеал I в R, идеалите във фактор-пръстена R/I са от вида J/I за идеали $J \triangleleft R$, съдържащи I. Факторите $(R/I)/(J/I) \simeq R/J$ са изоморфни, така че идеалът $J/I \triangleleft R/I$ е прост тогава и само тогава, когато идеалът $J \triangleleft R$ е прост. Аналогично, идеалът $J/I \triangleleft R/I$ е максимален тогава и само тогава, когато идеалът $J \triangleleft R$ е максимален.

Лема 5.2. *Нека R е комутативен пръстен с единица, I е идеал в R. Тогава за произволен идеал $J \triangleleft R$, съдържащ I, радикалът $r(J/I) = r(J)/I$.*

В частност, идеалът $J/I \triangleleft R/I$ е радикален тогава и само тогава, когато идеалът $J \triangleleft R$ е радикален.

Доказателство: По определение,

$$r(J/I) = \{r+I \ \mid \ (r+I)^n = r^n + I \in J/I \quad \text{за някое} \quad n \in \mathbb{N}\} =$$

$$= \{r+I \ \mid \ r^n \in J \quad \text{за някое} \quad n \in \mathbb{N}\} =$$

$$= \{r+I \ \mid \ r \in r(J)\} = r(J)/I.$$

Ако $r(J) = J$, то $r(J/I) = r(J)/I = J/I$. Предположението $r(J/I) = J/I$ води до $J/I = r(J)/I$. Следователно за произволен елемент $x \in r(J)$ съществува $y \in J$ с $x + I = y + I$. Сега от $z = x - y \in I \subseteq J$ получаваме $x = y + z \in J$. Това доказва, че $r(J) \subseteq J$. Всеки идеал $J \triangleleft R$ се съдържа в радикала си $r(J) \triangleleft R$, така че $J = r(J)$. По този начин, идеалът $J/I \triangleleft R/I$ е радикален точно когато идеалът $J \triangleleft R$ е радикален, Q.E.D.

Следствие 5.3. *Нека $X \subseteq k^n$ е непразно афинно алгебрично множество над алгебрично затворено поле k. Тогава афинните алгебрични подмножества $Y \subseteq X$ са във взаимно еднозначно съответствие с радикалните идеали*

$$I_X(Y) = \{\overline{f} \in k[X] \mid f(p) = 0 \ \text{ за } \forall p \in Y\} \triangleleft k[X].$$

Това съответствие обръща включванията и се ограничава до взаимно еднозначно съответствие между неприводимите афинни алгебрични подмножества $Y \subset X$ и простите идеали $I_X(Y) \triangleleft k[X]$.
Максималните идеали в $k[X]$ са от вида $\langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\rangle / I(X)$ за точките $a = (a_1, \dots, a_n) \in X$.

Доказателство: От Теоремата на Hilbert за нулите следва, че афинните алгебрични множества $Y \subseteq X$ са във взаимно еднозначно съответствие с радикалните идеали $I(X) \subset I(Y) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$. Възоснова на Лема 5.2, радикалността на $I(Y) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ е еквивалентна на радикалността на идеала $I_X(Y) = I(Y)/I(X) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]/I(X) = k[X]$.
Афинното алгебрично множество $Y \subset X$ е неприводимо точно когато идеалът $I(Y) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ е прост. От своя страна, това е равносилно на простотата на идеала $I_X(Y) = I(Y)/I(X) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]/I(X) = k[X]$.
Максималните идеали в $k[x_1, \dots, x_n]$ са от вида $\mathfrak{M}_a = \langle x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n\rangle$ за произволни точки $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$. Условието $I(X) \subseteq \mathfrak{M}_a$ е еквивалентно на $\{a\} = V(\mathfrak{M}_a) \subseteq VI(X) = X$, защото идеалът

$$I(a) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] \ \mid \ f(a) = 0\}$$

съвпада с максималния идеал $\mathfrak{M}_a$. Това следва от факта, че $I(a) \neq k[x_1, \dots, x_n]$ е собствен идеал, съдържащ $\mathfrak{M}_a$. Следователно максималните идеали $\mathfrak{M} \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$, съдържащи $I(X)$ са от вида $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_a$ за някоя точка $a \in X$ и максималните идеали в $k[X]$ са от вида $\mathfrak{M}_a/I(X)$ за някоя точка $a \in X$, Q.E.D.

Лема 5.4. *Ако $V \subseteq k^n$ е неприводимо афинно алгебрично множество, а $U \subseteq k^n$ е Зариски отворено подмножество с $V \cap U \neq \emptyset$, то идеалите*

$$I(V) = I(V \cap U)$$

съвпадат, а оттам и афинните координатни пръстени

$$k[V] = k[V \cap U]$$

съвпадат.

Доказателство: Съгласно определението за афинен координатен пръстен, достатъчно е да установим, че идеалите $I(V) = I(V \cap U)$ на V и $V \cap U$ съвпадат. От $V \cap U \subseteq V$ следва, че $I(V \cap U) \supseteq I(V)$. За произволен полином $g(x_1, \ldots, x_n) \in I(V \cap U) \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ имаме $V \cap U \subseteq V(g)$. Съгласно неприводимостта на V, Зариски затворената обвивка $V = \overline{V \cap U} \subseteq V(g)$, така че $g \in I(V)$ и $I(V \cap U) \subseteq I(V)$. Това доказва $I(V) = I(V \cap U)$ и $k[V] = k[V \cap U]$, Q.E.D.

Ако $\emptyset \neq X \subseteq k^n$ е непразно афинно алгебрично множество над алгебрично затворено поле, идеалът $I(X) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ на X е собствен и $I(X) \cap k = \{0\}$. Следователно $k+I(X)/I(X) \simeq k/k \cap I(X) = k$ и афинният координатен пръстен

$$k[X] = k[x_1, \ldots, x_n]/I(X) =$$

$$= (k + I(X)/I(X))[x_1 + I(X), \ldots, x_n + I(X)] \simeq k[x_1 + I(X), \ldots x_n + I(X)]$$

е крайнопородена k-алгебра. Съгласно Твърдение 3.17, нил-радикалът

$$\{\overline{f} \in k[X] \quad f^n = \overline{0} \in k[X] \quad \text{за някое} \quad n \in \mathbb{N}\} = \mathfrak{N}(k[X]) =$$

$$= \mathfrak{N}(k[x_1, \ldots, x_n]/I(X)) = r(I(X))/I(X).$$

Вземайки предвид радикалността $r(I(X)) = I(X)$ на идеала $I(X) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ на X, получаваме, че $k[X]$ няма ненулеви нилпотентни елементи. Следващото твърдение установява, че изброените свойства характеризират афинните координатни пръстени $k[X]$ над алгебрично затворено поле k.

Твърдение 5.5. *Нека k е алгебрично затворено поле, а R е k-алгебра. В такъв случай, R е афинен координатен пръстен на афинно алгебрично множество X тогава и само тогава, когато R е крайнопородена k-алгебра без ненулеви нилпотентни елементи.*

Доказателство: Проверихме, че афинният координатен пръстен $k[X]$ е крайно породена k-алгебра без ненулеви нилпотентни елементи.

Обратно, нека $R = k[a_1, \ldots, a_n]$ е крайнопородена k-алгебра без ненулеви нилпотентни елементи. Естественият епиморфизъм

$$\pi_A : k[x_1, \ldots, x_n] \longrightarrow R = k[a_1, \ldots, a_n],$$

$$\pi_A(f(x_1, \ldots, x_n)) = f(a_1, \ldots, a_n)$$

индуцира изоморфизъм на k-алгебри

$$k[x_1, \ldots, x_n]/Ker(\pi_A) \simeq Im(\pi_A) = R.$$

Понеже R няма ненулеви нилпотентни елементи, идеалът $Ker(\pi_A) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ е радикален. Разглеждаме афинното алгебрично множество $X = V(Ker(\pi_A)) \subset k^n$. По Теоремата на Хилберт за нулите, идеалът

$$I(X) = IV(Ker(\pi_A)) = r(Ker(\pi_R)) = Ker(\pi_A),$$

така че $R \simeq k[x_1, \ldots, x_n]/I(X) = k[X]$, Q.E.D.

Задача 5.6. *Нека $\pi_A : k[x_1, x_2] \to R = k[a_1, a_2]$ е естественият епиморфизъм на полиномиалния пръстен върху крайно породената алгебра R над поле k. Да се докаже, че:*

(i) ако $f_{2d+1}(x_1) \in k[x_1]$ е полином от степен $2d+1 \in \mathbb{N}$ и идеалът на тъждествата $\ker \pi_A$ се поражда от полинома $x_2^2 - f_{2d+1}(x_1)$, то съществува афинно алгебрично множество $X \subseteq k^n$ с афинен координатен пръстен $k[X] = R$;

(ii) ако идеалът на тъждествата $\ker \pi_A$ се поражда от полинома x_1^n, $n \geq 2$, то не съществува афинно алгебрично множество $X \subseteq k^n$ с афинен координатен пръстен $k[X] = R$.

Лема 5.7. *Нека $X \subseteq k^n$ е неприводимо афинно алгебрично множество над алгебрично затворено поле k, $f \notin I(X)$ е полином извън простия идеал $I(X) \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$, а $\overline{1} = 1 + I(X) \in k[X]$ и $\overline{f} = f + I(X) \in k[X]$ са класовете на 1 и f в афинния координатен пръстен $k[X]$. Тогава главното Зариски отворено подмножество*

$$U_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$$

е изоморфно като множество на афинното многообразие

$$X_f = \{(x_0, x) \in k \times X \quad | \quad x_0 f(x_1, \ldots, x_n) - 1 = 0\} \subseteq k^{n+1}$$

с афинен координатен пръстен

$$k[X_f] \simeq k[X]\left[\frac{\overline{1}}{\overline{f}}\right].$$

Доказателство: Изображението

$$\Phi : U_f \longrightarrow k^{n+1},$$

$$\Phi(x) = \left(\frac{1}{f(x)}, x\right)$$

взема стойности в X_f. Непосредствено се проверява, че $\Phi : U_f \to X_f$ е взаимно еднозначно.

За да опишем афинния координатен пръстен $k[X_f]$ на X_f да забележим, че X_f е хиперповърхнина в афинното алгебрично множество $k \times X$. Следователно $I(k \times X) \subseteq I(X_f) \lhd k[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ и

$$k[X_f] = k[x_0, x_1, \ldots, x_n]/I(X_f) \simeq$$

$$\simeq [k[x_0, \ldots, x_n]/I(k \times X)] \,/\, [I(X_f)/I(k \times X)] = k[k \times X]/I_{k\times X}(X_f).$$

Идеалът на $k \times X$ в $k[x_0, \ldots, x_n]$ се поражда от идеала $I(X) \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$ и съвпада с полиномите

$$\langle I(X)\rangle_{k[x_0, x_1, \ldots, x_n]} = I(X)k[x_0, x_1, \ldots, x_n] = I(X)k[x_1, \ldots, x_n][x_0] = I(X)[x_0]$$

на x_0 с коефициенти от $I(X)$. За да опишем афинния координатен пръстен на $k \times X$ разглеждаме епиморфизма на пръстени

$$\varphi : k[x_0, x_1, \ldots, x_n] = k[x_1, \ldots, x_n][x_0] \longrightarrow k[X][x_0] = (k[x_1, \ldots, x_n]/I(X))[x_0],$$

$$\varphi\left(\sum_{i=0}^{d} c_i(x_1, \ldots, x_n)x_0^i\right) = \sum_{i=0}^{d} \overline{c_i(x_1, \ldots, x_n)}x_0^i,$$

редуциращ коефициентите $c_i(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$ по модул идеала $I(X) \lhd k[x_1, \ldots, x_n]$. Ядрото на φ е $I(X)[x_0]$, така че φ индуцира изоморфизъм на k-алгебричте $k[k \times X]$ и $k[X][x_0]$. По определение, $I_{k\times X}(X_f) \supseteq \langle x_0\overline{f} - \overline{1}\rangle_{k[X][x_0]}$, така че съществуа епиморфизъм на k-алгебри

$$\psi : k[X][x_0]/\langle x_0\overline{f} - \overline{1}\rangle_{k[X][x_0]} = k[X]\left[\frac{\overline{1}}{\overline{f}}\right] \longrightarrow k[X_f].$$

За да докажем, че ψ е изоморфизъм, разглеждаме произволен елемент $h \in I(X_f)/\langle I(X)[x_0], x_0 f(x_1, \ldots, x_n) - 1\rangle_{k[x_0, x_1, \ldots, x_n]}$ като тъждество върху X_f. В качеството си на елемент на $k[X]\left[\frac{\overline{1}}{\overline{f}}\right]$, h има вида

$$h = \frac{\sum_{i=0}^{d} \overline{c_i(x_1, \ldots, x_n)}}{\overline{f(x_1, \ldots, x_n)}^{\,i}}.$$

Умножавайки почленно с $\overline{f(x_1,\dots,x_n)}^d$ получаваме тъждеството

$$h\overline{f(x_1,\dots,x_n)}^d = \sum_{i=0}^{d} \overline{c_i(x_1,\dots,x_n)} \ \ \overline{f(x_1,\dots,x_n)}^{d-i} \in k[X]$$

върху X_f, което не зависи от променливата x_0. Полиномът

$$t(x_1,\dots,x_n) := \sum_{i=0}^{d} c_i(x_1,\dots,x_n) f(x_1,\dots,x_n)^{d-i} \in k[x_1,\dots,x_n]$$

е от идеала

$$I(X_f) = IV(I(X), x_0 f(x_1,\dots,x_n) - 1) =$$
$$= r(\langle I(X), x_0 f(x_1,\dots,x_n) - 1\rangle_{k[x_0,x_1,\dots,x_n]}) =$$
$$= r(I(X)[x_0] + \langle x_0 f(x_1,\dots,x_n) - 1\rangle_{k[x_0,x_1,\dots,x_n]})$$

по Теоремата на Hilbert за нулите. Следователно съществуват $N \in \mathbb{N}$, $g_i \in I(X)$, $0 \leq i \leq l$ и $h_j \in k[x_1,\dots,x_n]$, $0 \leq j \leq m$, така че

$$t(x_1,\dots,x_n)^N = \sum_{i=0}^{l} g_i(x_1,\dots,x_n) x_0^i + [x_0 f(x_1,\dots,x_n) - 1] \left(\sum_{j=0}^{m} h_j(x_1,\dots,x_n) x_0^j \right).$$

Всяка точка $a = (a_1,\dots,a_n) \in X$ отговаря на точка $\left(\frac{1}{f(a)}, a\right) \in X_f$ и полиномът $t(x_1,\dots,x_n)^N \in I(X_f)$ се анулира в a. Оттук

$$0 = (x_0 f(a) - 1) \left[\sum_{j=0}^{m} h_j(a) x_0^j \right] \in k[x_0].$$

Вземайки пердвид, че $k[x_0]$ е област, получаваме $h_j(a) = 0$ за $\forall 0 \leq j \leq m$, $\forall a \in X$. С други думи, $h_j \in I(X)$ и $t(x_1,\dots,x_n)^N \in I(X)][x_0]$. Наприводимото афинно алгебрично множество $X \subseteq k^n$ има прост идеал $I(X) \triangleleft k[x_1,\dots,x_n]$, така че афинният му координатен пръстен $k[X]$ е област. Подпръстенът $k[X]\left[\frac{\overline{1}}{\overline{f}}\right]$ на полето от частни $F(k[X])$ на $k[X]$ е комутативна област с единица. Затова от $h \ \ \overline{f(x_1,\dots,x_n)}^d = \overline{t}^N = \overline{0} \in k[X]\left[\frac{\overline{1}}{\overline{f}}\right]$ с $\overline{f(x_1,\dots,x_n)} \neq \overline{0}$ в областта $k[X]\left[\frac{\overline{1}}{\overline{f}}\right]$ следва $h = \overline{0}$. Следователно

$$\ker(\psi) = I(X_f)/\langle I(X)[x_0], x_0 f(x_1,\dots,x_n) - 1\rangle_{k[x_0,x_1,\dots,x_n]} = 0$$

и ψ е изоморфизъм на k-алгебри.
Афинното алгебрично множество $X_f \subseteq k^{n+1}$ е неприводимо, защото афинният координатен пръстен $k[X_f] = k[X]\left[\frac{\overline{1}}{\overline{f}}\right]$ няма делители на нулата и идеалът $I(X_f) \triangleleft k[x_0, x_1,\dots,x_n]$ е прост, Q.E.D.

Определение 5.8. *Квази-афинно (квази-проективно) многообразие е непразно сечение $V \cap U$ на афинно (проективно) алгебрично многообразие V със Зариски отворено подмножество U на $\overline{k}^n$, съответно на $\mathbb{P}^n(\overline{k})$.*

Квази-афинните и квази-проективните многообразия $V \cap U$ са неприводими съгласно разглежданията от доказателството на Твърдение 4.29(ii).

Следствие 5.9. *Всяка точка p на квази-афинно или квази-проективно многообразие V над алгебрично затворено поле k има Зариски отворена околност, която е изоморфна на афинно многообразие.*

Доказателство: След евентуално пресичане на V с афинно Зариски отворено подмножество можем да считаме, че V е квази-афинно многообразие. Тогава $V = V_0 \cap W \subseteq W \subseteq k^n$ за афинно многообразие $V_0 = V(S) \subseteq k^n$ и Зариски отворено подмножество $W \subseteq k^n$. Допълнението $V_0 \setminus W \subseteq \overline{k}^n$ е Зариски затворено множество, така че $V_0 \setminus W = V(f_1, \ldots, f_m)$ за някакви полиноми $f(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n) \in k[x_1, \ldots, x_n]$. В резултат,

$$V = V_0 \cap W = (V_0 \cap U_{f_1}) \cup \ldots \cup (V_0 \cap U_{f_m})$$

и всяка точка $p \in V$ има Зариски отворена околност $V_0 \cap U_{f_i}$, изоморфна на афинно многообразие, съгласно Лема 5.7, Q.E.D.

2. Регулярни функции

Определение 5.10. *Нека $V \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие, $p \in V$, а $W(p)$ е Зариски отворена околност на p, върху V. Функция $f : W(p) \to k$ е регулярна в точка p, ако съществува Зариски отворена околност $W'(p) \subseteq W(p)$, в която $f = \frac{\overline{g}}{\overline{h}}$ се представя като частно на елементи $\overline{g}, \overline{h} \in k[V]$ на афинния координатен пръстен $k[V]$ на V с $h(p) \neq 0$.*

Определение 5.11. *Нека $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ е квази-проективно многообразие, $p \in V$, а $W(p)$ е Зариски отворена околност на p върху V. Функция $f : W(p) \to k$ е регулярна в точка p, ако за всички стандартни афинни отворени подмножества $U_i = \{x \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\} \simeq k^n$ на $\mathbb{P}^n(k)$ с $W(p) \cap U_i \neq \emptyset$, ограниченията $f : W(p) \cap U_i \to k$ са регулярни в p функции.*

Определение 5.12. *Функция $f : V \to k$ на квази-афинно или квази-проективно многообразие V е регулярна върху V, ако е регулярна във всяка точка на V.*

Пример 5.13. *Ако $X = \{(x, y) \in k^2 \mid x^5 = y^2 + y\}$, то функцията $\frac{x}{y}$ не е регулярна върху точките $(a_1, 0) \in X$. Уравнението $x^5 = 0$ има единствено решение $x = 0$, така че $\frac{x}{y}$ е регулярна върху $X \setminus \{(0, 0)\}$. Функцията $\frac{y}{x}$ не е регулярна върху точките $(0, a_2) \in X$. Уравнението $y^2 + y = y(y + 1) = 0$ има две решения - $y_1 = 0$ и $y_2 = -1$, така че $\frac{y}{x}$ е регулярна върху $X \setminus \{(0, 0), (0, -1)\}$.*

Да отбележим, че ако $V \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие, то всеки елемент $\overline{f} \in k[V]$ на афинния координатен пръстен на V задава регулярна функция $\overline{f} : V \to k$.

Твърдение 5.14. *Ако $U_f = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ е главно Зариски отворено подмножество на неприводимо афинно алгебрично множество $X \subseteq k^n$ над алгебрично затворено поле k, то регулярните функции върху U_f принадлежат на афинния координатен пръстен $k[U_f] = k[X]\left[\frac{\overline{1}}{\overline{f}}\right]$ на U_f.*
В частност, регулярните функции върху неприводимо афинно алгебрично множество $X = U_1$ над алгебрично затворено поле $k \ni 1$ се изчерпват от елементите на афинния координатен пръстен $k[X]$.

Доказателство: Ако $\varphi : U_f \to k$ е регулярна функция върху U_f, то за вяска точка $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U_f \subseteq X \subseteq k^n$ съществува Зариски отворена околност $W_a \subseteq U_f$ на a върху U_f и елементи $\overline{f_a}, \overline{g_a} \in k[X]$ от афинния координатен пръстен $k[X]$ на X, така че $\overline{g_a}(p) = g_a(p) \neq 0$ за $\forall p \in W_a$ и $\varphi(p) = \frac{\overline{f_a}(p)}{\overline{g_a}(p)}$ за $\forall p \in W_a$. Съгласно ньотеровостта на топологията на Зариски върху U_f, можем да изберем крайно подпокритие $W_1 \cup \ldots \cup W_m = U_f$ и елементи $\overline{f_j}, \overline{g_j} \in k[X]$, така че $\overline{g_j}(p) \neq 0$ за $\forall p \in W_j$ и $\varphi(p) = \frac{\overline{f_j}(p)}{\overline{g_j}(p)}$ за $\forall p \in W_j$. Във всяка точка $p \in U_f$ съществува $1 \leq j \leq m$ с $\overline{g_j}(p) = g_j(p) \neq 0$, откъдето

$$V_X(g_1, \ldots, g_m) = X \cap V(g_1, \ldots, g_m) \subseteq X \cap V(f) = V_X(f).$$

Следователно $V(I(X), g_1, \dots, g_m) \subseteq V(I(X), f) \subseteq k^n$ и

$$f \in IV(I(X), f) \subseteq IV(I(X), g_1, \dots, g_m) = r(\langle I(X), g_1, \dots, g_m \rangle),$$

съгласно Теоремата на Hilbert за нулите. По този начин, съществуват $N \in \mathbb{N}$, $h \in I(X)$ и $t_i \in k[x_1, \dots, x_n]$, така че $f^N = h + \sum_{i=1}^{m} g_i t_i$. В резултат,

$$f^N \varphi = h\varphi + \sum_{i=1}^{m} g_i \varphi t_i.$$

За да докажем, че регулярната функция $f^N \varphi : U_f \to k$ се задава с елементи на афинния координатен пръстен $k[X]$ на X, да забележим, че $(g_i \varphi - f_i)|_{W_i} = 0$. Твърдим, че $(g_i \varphi - f_i)|_{U_f} = 0$. В противен случай съществува точка $p \in U_f \setminus W_i$, така че $(g_i \varphi - f_i)(p) \neq 0$. Ако $p \in W_j$, то $\varphi(p) = \frac{f_j(p)}{g_j(p)}$, $g_j(p) \neq 0$, откъдето $(g_i f_j - f_i g_j)(p) \neq 0$. Непразните Зариски отворени подмножества W_i и W_j на Зариски неприводимото U_f имат непразно Зариски отворено сечение $W_i \cap W_j$ и $(g_i f_j - f_i g_j)|_{W_i \cap W_j} = 0$. Следователно $g_i f_j - f_i g_j \in I(W_i \cap W_j) = I(W_j)$, съгласно Лема 5.4. В частност, $(g_i f_j - f_i g_j)(p) = 0$ за $p \in W_j$, противно на допускането. Това доказва $(g_i \varphi - f_i)|_{U_f} = 0$ и задава функцията

$$f^N \varphi = h\varphi + \sum_{i=1}^{m} f_i t_i = \sum_{i=1}^{m} \overline{f_i}\,\overline{t_i} : U_f \to k$$

чрез елементи $\overline{f_i}, \overline{t_i} \in k[X]$ на афинния координатен пръстен на X. Оттук,

$$\varphi = \frac{\sum_{i=1}^{m} \overline{f_i}\,\overline{t_i}}{(\overline{f})^N} \in k[X]\left[\frac{\overline{1}}{\overline{f}}\right] = k[U_f]$$

се задава с елемент на афинния координатен пръстен на U_f, Q.E.D.

Задача 5.15. *Дадена е афинната крива $C = \{(x, y) \in k^2 \mid y^2 = x^3 - x\}$ над алгебрично затворено поле k и нейното главно Зариски отворено подмножество $U_x = \{(x, y) \in C \mid x \neq 0\}$. Да се докаже, че:*
(i) за произволна регулярна функция $\varphi : C \to k$ съществуват полиноми $a(x), b(x) \in k[x]$, така че

$$\varphi(c_1, c_2) = a(c_1)c_2 + b(c_1) \quad \text{за} \quad \forall (c_1, c_2) \in C.$$

(ii) за произволна регулярна функция $\varphi : U_x \to k$ съществуват полиноми $a(x), b(x) \in k[x]$ и неотрицателно цяло d, така че

$$\varphi(c_1, c_2) = \frac{a(c_1)c_2 + b(c_1)}{c_1^d} \quad \text{за} \quad \forall (c_1, c_2) \in C.$$

3. Регулярни изображения

Определение 5.16. *Изображението $\varphi : X \to k^m$ на квази-афинно или квази-проективно алгебрично многообразие X се нарича регулярно, ако се задава с наредена m-торка $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ от регулярни функции $\varphi_i : X \to k$.*

Ако $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие, то за произволни $\overline{f_1}, \dots, \overline{f_m} \in k[X]$ от афинния координатен пръстен $k[X]$ имаме регулярно изображение $(\overline{f_1}, \dots, \overline{f_m}) : X \to k$.

Пример 5.17. *Съответствието*

$$\varphi : V_0 = \{(x, y) \in k^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \longrightarrow k,$$
$$\varphi(x, y) = (x + 1)y$$

е регулярно изображение на афинното многообразие V_0 върху k.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.18. *Изображението $\varphi : X \to \mathbb{P}^m(k)$ на квази-афинното или квази-проективното алгебрично многообразие X в порективното пространство $\mathbb{P}^m(k)$ е регулярно, ако за всяко стандартно афинно отворено подмножество $U_i = \{y \in \mathbb{P}^m(k) \ | \ y_i \neq 0\}$ с афинен координатен хомеоморфизъм $\varphi_i : U_i \to k^m$, изображението $\varphi_i \circ \varphi : \varphi^{-1}(U_i) \cap X \to k^n$ е регулярно.*

ЛЕМА 5.19. *Нека $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ е квази-проективно многообразие, а $f_j(x_0, \ldots, x_n) \in k[x_0, \ldots, x_n]^{(d)}$, $0 \leq j \leq m$ са хомогенни полиноми от една и съща степен d с $V_{\mathbb{P}^n}(f_0, \ldots, f_m) = \emptyset$. Тогава*

$$\varphi = [f_0 : \ldots : f_m] : X \longrightarrow \mathbb{P}^m(k),$$
$$\varphi([x_0 : \ldots : x_n]) = [f_0(x) : \ldots : f_m(x)]$$

е регулярно изображение.

Доказателство: Преди всичко, изображението е коректно зададено, защото за $\forall \lambda \in k^*$ имаме

$$[f_0(\lambda x) : \ldots : f_m(\lambda x)] = [\lambda^d f_0(x) : \ldots : \lambda^d f_m(x)] = [f_0(x) : \ldots : f_m(x)].$$

За да проверим неговата регулярност да изберем стандартно афинно отворено подмножество $U_i = \{y \in \mathbb{P}^m(k) \ | \ y_i \neq 0\}$ с афинен координатен хомеоморфизъм $\varphi_i : U_i \to k^m$. Трябва да установим, че

$$\varphi_i \circ \varphi(x) = \left(\frac{f_0(x)}{f_i(x)}, \ldots, \frac{f_{i-1}(x)}{f_i(x)}, \frac{f_{i+1}(x)}{f_i(x)}, \ldots, \frac{f_m(x)}{f_i(x)} \right) \in k^m$$

се състои от регулярни функции $\frac{f_j}{f_i} : X \cap \varphi^{-1}(U_i) \to k$. По определение, за всяко $0 \leq l \leq n$ трябва да докажем, че ограниченията на тези изображения върху стандартните афинни отворени подмножества $U_l' = \{x \in \mathbb{P}^n(k) \ | \ x_j \neq 0\}$ са регулярни функции на квази-афинни многоборазия. За верността на последното да отбележим, че $\left(\frac{x_0}{x_l}, \ldots, \frac{x_{l-1}}{x_l}, \ldots, \frac{x_n}{x_l} \right)$ са афинни координати върху U_l' и

$$\frac{f_j(x_0, \ldots, x_n)}{f_i(x_0, \ldots, x_n)} = \frac{x_l^{-d} f_j(x_0, \ldots, x_n)}{x_l^{-d} f_i(x_0, \ldots, x_n)} = \frac{f_j\left(\frac{x_0}{x_l}, \ldots, \frac{x_{l-1}}{x_l}, \frac{x_{l+1}}{x_l}, \ldots, \frac{x_n}{x_l}\right)}{f_i\left(\frac{x_0}{x_l}, \ldots, \frac{x_{l-1}}{x_l}, \frac{x_{l+1}}{x_l}, \ldots, \frac{x_n}{x_l}\right)}$$

са регулярни функции върху $X \cap \varphi^{-1}(U_i) \cap U_l'$, в качеството си на частни на полиноми на афинните координати, чиито знаменатели не се анулират върху $X \cap \varphi^{-1}(U_i) \cap U_l'$, Q.E.D.

ПРИМЕР 5.20. *Съответствието*

$$\psi : W_0 = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(k) \ | \ y^2 z = x^3 + y^3\},$$
$$\psi([x : y : z]) = [x^2 : xy : z^2]$$

е регулярно изображение на проективното многообразие W_0 в $\mathbb{P}(k)$.

ЗАДАЧА 5.21. *Дадени са проективната равнинна квадрика*

$$X = \{x = [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(k) \ | \ x_0^2 + x_1^2 = x_2^2\},$$

стандартното афинно отворено подмножество

$$U_1 = \{x = [x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(k) \ | \ x_1 \neq 0\}$$

и изображението

$$\varphi : X \cap U_1 \longrightarrow \mathbb{P}^1(k),$$
$$\varphi([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 + x_2 : x_1].$$

Да се докаже, че φ се продължава до регулярно изображение $\varphi : X \to \mathbb{P}^1(k)$.

Упътване: Изображението $\varphi([x_0 : x_1 : x_2]) = [x_0 + x_2 : x_1]$ е коректно определено върху всички точки на X освен $p = [x_0 : 0 : -x_0] = [1 : 0 : -1]$. Вземайки предвид

$$-x_1^2 = x_0^2 - x_2^2 = (x_0 - x_2)(x_0 + x_2)$$

върху X, получаваме

$$[x_0+x_2 : x_1] = [(x_0+x_2)(x_0-x_2) : x_1(x_0-x_2)] = [-x_1^2 : x_1(x_0-x_2)] = [x_1 : x_2-x_0].$$

Лема 5.22. *Нека $\varphi_1 : V \to W$ и $\varphi_2 : V \to W$ са регулярни изображения на алгебрични многообразия. Ако $\varphi_1|_U = \varphi_2|_U$ съвпадат върху непразно Зариски отворено подмножество $U \subseteq V$, то $\varphi_1|_V = \varphi_2|_V$ съвпадат върху V.*

Доказателство: Достатъчно е да докажем, че всяка точка $p \in V$ има Зариски отворена околност $U(p)$, върху която $\varphi_1|_{U(p)} = \varphi_2|_{U(p)}$ съвпадат. По-точно, избираме квази-афинна околност $U'(p) \subseteq k^n$ на p върху V, афинна околност $W' \subseteq k^m$ на $q_1 = \varphi_1(p)$ върху W и разглеждаме регулярното изображение

$$\varphi_1 : U''(p) = U'(p) \cap \varphi_1^{-1}(W') \longrightarrow W'$$

от квази-афинната околност $U''(p) = U'(p) \cap \varphi_1^{-1}(W')$ на p в афинната околност W' на q_1. За достатъчно малка околност $U''(p)$ на p имаме

$$\varphi_1|_{U''(p)} = \left(\frac{f_1}{g_1}, \dots, \frac{f_m}{g_m}\right) : U''(p) \longrightarrow W' \subseteq k^m$$

за подходящи полиноми $f_i, g_i \in k[y_1, \dots, y_m]$. Аналогично избираме афинна околност $W'' \subseteq k^m$ на $q_2 = \varphi_2(p)$ върху W и квази-афинна околност $U(p) = U''(p) \cap \varphi_2(W'')$ на p върху V, така че

$$\varphi_2|_{U(p)} = \left(\frac{h_1}{t_1}, \dots, \frac{h_m}{t_m}\right) : U(p) \longrightarrow W'' \subseteq k^m$$

за подходящи полиноми $h_i, t_i \in k[y_1, \dots, y_m]$. Съгласно неприводимостта на V, Зариски отворените подмножества U и $U(p)$ на V имат непразно Зариски отворено сечение и

$$\varphi_1|_{U \cap U(p)} = \varphi_2|_{U \cap U(p)}.$$

Следователно $U \cap U(p) \subseteq V(f_1t_1 - h_1g_1, \dots, f_mt_m - h_mg_m)$ и Зариски затворената обвивка

$$V = \overline{U \cap U(p)} \subseteq V(f_1t_1 - h_1g_1, \dots, f_mt_m - h_mg_m),$$

защото Зариски отвореното подмножество $U \cap U(p) \subseteq V$ е Зариски гъсто в неприводимото V. Оттук $\varphi_1|_{U(p)} = \varphi_2|_{U(p)}$ и $\varphi_1| = \varphi_2|_V$, Q.E.D.

Твърдение 5.23. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е неприводимо афинно алгебрично множество, а $Y \subseteq k^m$ е произволно афинно алгебрично множество. Тогава регулярните изображения $\varphi : X \to Y$ са във взаимно еднозначно съответствие с хомоморфизмите на k-алгебри $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$.*

Доказателство: Регулярните изображения $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : X \to Y \subseteq k^m$ са съставени от m регулярни функции $\varphi_i : X \to k$. Съгласно Твърдение 5.14, φ_i принадлежат на афинния координатен пръстен $k[X]$ на X и се повдигат до полиноми $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$. Функциите $\varphi_i = f_i : X \to k$ не зависят от повдиганията f_i, защото те са по модул идеала $I(X)$ на X. Определяме

$$\varphi^* : k[Y] \longrightarrow k[X],$$

$$\varphi^*(\overline{g}) := \overline{g(f_1, \dots, f_m)} = g(f_1, \dots, f_m) + I(X) \quad \text{за} \quad \forall \overline{g} = g + I(Y) \in k[Y].$$

Изображението φ^* е коректно определено, т.е. не зависи от избора на повдигания $g \in k[y_1,\dots,y_m]$ и $f_i \in k[x_1,\dots,x_n]$, защото за произволни $g' \in k[y_1,\dots,y_m]$, $f'_i \in k[x_1,\dots,x_n]$ с $g'-g \in I(Y)$, $f'_i - f_i \in I(X)$ имаме

$$g'(f'_1,\dots,f'_m) - g(f_1,\dots,f_m) =$$
$$= (g'-g)(f'_1,\dots,f'_m) + g(f'_1,\dots,f'_m) - g(f_1,\dots,f_m) \in I(X).$$

Тук $(g'-g)(f'_1,\dots,f'_m) \in I(X)$ съгласно $(g'-g)(f'_1,\dots,f'_m)(p) = (g'-g)\varphi(p) = 0$ за всяка точка $p \in X$ с $\varphi(p) \in Y$ и за $g'-g \in I(Y)$. Разликата

$$g(f'_1,\dots,f'_m)-g(f_1,\dots,f_m) = g(f_1+(f'_1-f_1),\dots,f_m+(f'_m-f_m))-g(f_1,\dots,f_m)$$

принадлежи на $I(X)$ като полином на $f_1,\dots,f_m,f'_1-f_1,\dots,f'_m-f_m$, чиито мономи са кратни на поне един от множителите $f'_1-f_1,\dots,f'_m-f_m \in I(X)$. Да отбележим също, че за произволен полином $g = \sum_{\alpha\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^m} c_\alpha y_1^{\alpha_1}\dots y_m^{\alpha_m} \in k[y_1,\dots,y_m]$ е в сила

$$\varphi^*(\overline{g}) = \overline{g(f_1,\dots,f_m)} = \overline{\sum_{\alpha\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^m} c_\alpha f_1^{\alpha_1}\dots f_m^{\alpha_m}} =$$
$$= \sum_{\alpha\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^m} c_\alpha \overline{f_1}^{\alpha_1}\dots\overline{f_m}^{\alpha_m} = g(\overline{f_1},\dots,\overline{f_m}).$$

Изображението φ^* е хомоморфизъм на k-алгебри, защото

$$\varphi^*(\overline{g_1}+\overline{g_2}) = \varphi^*(\overline{g_1+g_2}) = (g_1+g_2)(\overline{f_1},\dots,\overline{f_m}) =$$
$$= g_1(\overline{f_1},\dots,\overline{f_m}) + g_2(\overline{f_1},\dots,\overline{f_m}) = \varphi^*(\overline{g_1}) + \varphi^*(\overline{g_2}),$$
$$\varphi^*(\overline{g_1}\ \ \overline{g_2}) = \varphi^*(\overline{g_1 g_2}) = (g_1 g_2)(\overline{f_1},\dots,\overline{f_m})$$
$$= g_1(\overline{f_1},\dots,\overline{f_m})\ \ g_2(\overline{f_1},\dots,\overline{f_m}) = \varphi^*(\overline{g_1})\ \ \varphi^*(\overline{g_2}),$$
$$\varphi^*(\lambda\overline{g}) = \varphi^*(\overline{\lambda g}) = (\lambda g)(\overline{f_1},\dots,\overline{f_m}) = \lambda g(\overline{f_1},\dots,\overline{f_m}) = \lambda\varphi^*(\overline{g})$$

за $\forall \overline{g_1},\overline{g_2},\overline{g} \in k[Y]$, $\forall \lambda \in k$.

Обратно, за произволен хомоморфизъм на k-алгебри $\Phi : k[Y] \to k[X]$ избираме полиноми $f_i \in k[x_1,\dots,x_n]$, повдигащи $\Phi(\overline{y_i}) = \overline{f_i} = f_i + I(X)$. Изображението

$$\varphi = (f_1,\dots,f_m) : X \longrightarrow k^m$$

не зависи от избора на $f_i \in k[x_1,\dots,x_n]$ с фиксиран съседен клас $\overline{f_i} \in k[X]$. Твърдим, че φ взема стойности в Y. Понеже $Y \subseteq k^m$ е афинно алгебрично множество, достатъчно е да установим, че всеки полином $g \in I(Y)$ се анулира върху $\varphi(X) \subseteq k^m$. Наистина, ако $g = \sum_{\alpha\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^m} c_\alpha y_1^{\alpha_1}\dots y_m^{\alpha_m} \in I(Y)$ и $p \in X$, то

$$g\varphi(p) = g(f_1(p),\dots,f_m(p)) = \sum_{\alpha\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^m} c_\alpha f_1(p)^{\alpha_1}\dots f_m(p)^{\alpha_m} =$$

$$= \sum_{\alpha\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^m} c_\alpha \Phi(\overline{y_1})(p)^{\alpha_1}\dots\Phi(\overline{y_m}(p)^{\alpha_m} = \Phi\left(\sum_{\alpha\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^m} c_\alpha \overline{y_1}^{\alpha_1}\dots\overline{y_m}^{\alpha_m}\right)(p) =$$
$$= \Phi\left(\overline{\sum_{\alpha\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^m} c_\alpha y_1^{\alpha_1}\dots y_m^{\alpha_m}}\right)(p) = \Phi(\overline{g})(p) = \Phi(\overline{0})(p) = \overline{0}(p) = 0.$$

Следователно $\varphi(X) \subseteq V(g)$ за $\forall g \in I(Y)$, откъдето $\varphi(X) \subseteq Y = VI(Y)$. По този начин,

$$\varphi = (f_1,\dots,f_m) : X \longrightarrow Y$$

е регулярно изображение от X в Y.

Съответствието между регулярните изображения $\varphi : X \to Y$ и хомоморфизмите на k-алгебри $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е взаимно еднозначно, защото за всяка регулярно изображение $\varphi : X \to Y$, хомоморфизмът $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ индуцира изображението $(\varphi^*(\overline{y_1}) = \overline{f_1}, \ldots, \varphi^*(\overline{y_m}) = \overline{f_m}) = (f_1, \ldots, f_m) = \varphi$. Произволен хомоморфизъм на k-алгебри $\Phi : [Y] \to k[X]$ индуцира регулярно изображение $\varphi = (\overline{f_1} = \Phi(\overline{y_1}), \ldots, \overline{f_m} = \Phi(\overline{y_m})) : X \to Y$, което е асоциирано с хомоморфизма на k-алгебри

$$\varphi^* : k[Y] \longrightarrow k[X],$$

$$\varphi^*(\overline{g}) = g(\overline{f_1}, \ldots, \overline{f_m}) = g(\Phi(\overline{y_1}), \ldots \Phi(\overline{y_m})) = \sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^m} c_\alpha \Phi(\overline{y_1})^{\alpha_1} \ldots \Phi(\overline{y_m})^{\alpha_m} =$$

$$= \Phi\left(\sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^m} c_\alpha \overline{y_1}^{\alpha_1} \ldots \overline{y_m}^{\alpha_m} \right) = \Phi g(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_m}) = \Phi(\overline{g}),$$

съвпадащ с Φ, Q.E.D.

Задача 5.24. *Нека $V \subseteq k^n$ и $W \subseteq k^m$ са афинни многообразия над алгебрично затворено поле k. Да се докаже, че регулярните изображения $\varphi : V \to W$ са във взаимно еднозначно съответствие с хомоморфизмите*

$$\widetilde{\varphi^*} : k[y_1, \ldots, y_m] \longrightarrow k[x_1, \ldots, x_n]$$

на k-алгебри, които трансформират идеала $I(W)$ на W в идеала $I(V)$ на V, $\widetilde{\varphi^*} I(W) \subseteq I(V)$.

Определение 5.25. *Ако $\varphi : X \to Y$ е взаимно еднозначно регулярно изображение и $\varphi^{-1} : Y \to X$ е регулярно, то φ се нарича бирегулярно.*

Твърдение 5.26. *(i) Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$, $Y \subseteq k^m$ са неприводими афинни алгебрични множества, $Z \subseteq k^l$ е произволно афинно алгебрично множество. Тогава композицията на регулярните изображения $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to Z$ индуцира хомоморфизма на k-алгебри*

$$(\psi\varphi)^* = \varphi^* \psi^* : k[Z] \longrightarrow k[X]$$

на съответните афинни координатни пръстени.
(ii) Тъждественото изображение $\mathrm{Id}_X : X \to X$ на афинно многообразие X над алгебрично затворено поле k индуцира тъждествения хомоморфизъм $\mathrm{Id}_X^* = \mathrm{Id}_{k[X]} : k[X] \to k[X]$ на афинния координатен пръстен.
(iii) Бирегулярните изображения $\varphi : X \to Y$ на афинни алгебрични многообразия над алгебрично затворено поле k са във взаимно еднозначно съответствие с изоморфизмите на k-алгебри $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$, където $k[Y]$, $k[X]$ са афинните координатни пръстени на Y, съответно, X.

Доказателство: (i) За произволно $\overline{f} \in k[Z]$ проверяваме, че

$$(\psi\varphi)^*(\overline{f}) = \overline{f(\psi\varphi)} = \overline{(f\psi)\varphi} = \varphi^*(\overline{f\psi}) = \varphi^*\psi^*(\overline{f}).$$

(ii) За всяко $\overline{f} \in k[X]$ е в сила $\mathrm{Id}_X^*(\overline{f}) = \overline{f \mathrm{Id}_X} = \overline{f}$, така че $\mathrm{Id}_X^* = \mathrm{Id}_{k[X]}$.
(iii) По определение, бирегулярните изображения $\varphi : X \to Y$ са взаимно еднозначни регулярни изображения, чиито обратни $\varphi^{-1} : Y \to X$ са регулярни. Това дава възможност да приложим (i), (ii) към $\varphi^{-1}\varphi = \mathrm{Id}_x$, $\varphi\varphi^{-1} = \mathrm{Id}_Y$ и да получим $\varphi^*(\varphi^{-1})^* = (\varphi^{-1}\varphi)^* = \mathrm{Id}_x^* = \mathrm{Id}_{k[X]}$, $(\varphi^{-1})^*\varphi^* = (\varphi\varphi^{-1})^* = \mathrm{Id}_Y^* = \mathrm{Id}_{k[Y]}$. В резултат, $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ се оказва изоморфизъм на k-алгебри с $(\varphi^*)^{-1} = (\varphi^{-1})^*$.
Обратно, ако $\Phi : k[Y] \to k[X]$ е изоморфизъм на k-алгебри, то съществуват регулярни изображения $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$ с $\varphi^* = \Phi$ и $\psi^* = \Phi^{-1}$. Оттук $(\psi\varphi)^* = \varphi^*\psi^* = \Phi\Phi^{-1} = \mathrm{Id}_{k[X]}$ и $(\varphi\psi)^* = \psi^*\varphi^* = \Phi^{-1}\Phi = \mathrm{Id}_{k[Y]}$ съгласно

(i). Въз основа на (ii) и взаимната еднозначност на съответствието между регулярните изображения $X \to X$ и хомоморфизмите на k-алгебри $k[X] \to k[X]$, стигаме до извода, че $\psi\varphi = \mathrm{Id}_X$. Аналогично, $\varphi\psi = \mathrm{Id}_Y$, откъдето $\varphi : X \to Y$ и $\psi : Y \to X$ са бирегулярни, Q.E.D.

Задача 5.27. *За произволен неразложим над k полином $f(x_1, x_2) \in k[x_1, x_2]$ и произволен полином $g(x_1, x_2) \in k[x_1, x_2]$ да се докаже, че $V = V(f(x_1, x_2)) \subset k^2$ и $W = V(y_3 - g(y_1, y_2), f(y_1, y_2)) \subset k^3$ са изоморфни помежду си афинни многообразия.*

Следващото твърдение изучава ядрото и образа на хомоморфизъм на афинни координатни пръстени на езика на съответния морфизъм на афинни алгебрични множества.

Определение 5.28. *Регулярното изображение $\varphi : X \to Y$ на афинни алгебрични множества е доминантно, ако Зариски затворената обвивка на образа $\overline{\varphi(X)} = VI(\varphi(X)) = Y$ съвпада с Y.*

Да напомним, че хомоморфизъм на пръстени $\psi : R \to S$ се нарича влагане или мономорфизъм, ако $Ker(\psi) = \{0_R\}$. Ще казваме, че ψ е епиморфизъм, ако $Im(\psi) = S$, т.е. ϕ е върху.

Твърдение 5.29. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е неприводимо афинно алгебрично множество, $Y \subseteq k^m$ е произволно афинно алгебрично множество, $\varphi : X \to Y$ е регулярно изображение, $Z = \overline{\varphi(X)} = VI(\varphi(X))$ е Зариски затворената обвивка на образа на φ, а $I_Y(Z) \triangleleft k[Y]$ е идеалът на $Z \subseteq Y$ в афинния координатен пръстен на Y. Тогава:*
(i) хомоморфизмът $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ на афинните координатни пръстени има ядро $Ker(\varphi^*) = I_Y(Z)$ и образ $Im(\varphi^*) \simeq k[Z]$;
(ii) $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е влагане тогава и само тогава, когато $\varphi : X \to Y$ е доминантно регулярно изображение;
(iii) ако $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е епиморфизъм, то произволни различни точки $p, q \in X$ имат различни образи $\varphi(p), \varphi(q) \in Y$.

Доказателство: (i) Ядрото

$$Ker(\varphi^*) = \{\overline{g} \in k[Y] \,|\, \varphi^*(g)(p) = g\varphi(p) = 0, \forall p \in X\} = I(\varphi(X))/I(Y)$$

се състои от класовете $\overline{g} = g + I(Y)$ на онези полиноми $g \in k[y_1, \dots, y_m]$, които принадлежат на идеала $I(\varphi(X)) \triangleleft k[y_1, \dots, y_m]$ на образа $\varphi(X)$ на φ. Съгласно Теоремата на Хилберт за нулите и радикалността на $I(\varphi(X))$, Зариски затворената обвивка $Z = \overline{\varphi(X)}$ има идеал

$$I(Z) = IVI(\varphi(X)) = r(I(\varphi(X))) = I(\varphi(X)).$$

От $Z \subseteq Y$ става ясно, че идеалът $I(Y) \triangleleft k[y_1, \dots, y_m]$ се съдържа в идеала $I(Z) \triangleleft k[y_1, \dots, y_m]$ и факторът $I_Y(Z) = I(Z)/I(Y) \triangleleft k[y_1, \dots, y_m]/I(Y) = k[Y]$ е точно идеалът на Z в афинния координатен пръстен $k[Y]$ на Y. С това установихме, че $Ker(\varphi^*) = I(\varphi(X))/I(Y) = I(Z)/I(Y) = I_Y(Z)$.
По теоремата за хомоморфизмите на пръстени, $\varphi^*; k[Y] \to k[X]$ индуцира изоморфизъм на k-алгебри

$$k[Y]/Ker(\varphi^*) \simeq Im(\varphi^*).$$

Факторът

$$k[Y]/Ker(\varphi^*) = [k[y_1, \dots, y_m]/I(Y)] \,/\, [I(Z)/I(Y)] \simeq k[Z]$$

е изоморфен на афинния координатен пръстен $k[Z]$ на Z.
(ii) Хомоморфизмът на k-алгебри $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е влагане тогава и само тогава, когато $Ker(\varphi^*) = I_Y(Z) = \overline{0} \triangleleft k[Y]$. Последното е еквивалентно на

$I(Z) = I(Y) \triangleleft k[y_1, \dots, y_m]$, което от своя страна е равносилно на $Z = VI(Z) = VI(Y) = Y$. С други думи, $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е влагане точно когато регулярното изображение $\varphi : X \to Y$ е доминантно.
(iii) Да допуснем, че $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е епиморфизъм и точките $p, q \in X \subseteq k^n$ имат един и същи образ $\varphi(p) = \varphi(q) \in Y \subseteq k^m$. Тогава за всяка координатна функция $\overline{y_j} = y_j + I(Y) \in k[Y]$, $1 \leq j \leq m$ върху Y е изпълнено

$$\varphi^*(\overline{y_j})(p) = y_j\varphi(p) = y_j\varphi(q) = \varphi^*(\overline{y_j})(q).$$

Алгебрата $k[Y] = k[\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}]$ над полето k се изобразява върху k-алгебрата

$$k[X] = Im(\varphi^*) = \varphi^*(k[Y]) = \varphi^*(k[\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}]) = k[\varphi^*(\overline{y_1}), \dots, \varphi^*(\overline{y_1})].$$

Следователно всеки елемент $\overline{f} \in k[X]$ има една и съща стойност $f(p) = f(q)$ върху p и q, като полином на $\overline{y_1}, \dots, \overline{y_m}$. В частност, всяка координатна функция $\overline{x_i} = x_i + I(X) \in k[X]$, $1 \leq i \leq n$ върху X има една и съща стойност в p и q, откъдето $p = q$. По този начин, ако $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ е епиморфизъм, то произволни $p \neq q$ от X имат различни образи $\varphi(p) \neq \varphi(q)$, Q.E.D.
Да отбележим, че съществуват регулярни изображения $\varphi : X \to Y$ на афинни многообразия $X \subseteq k^n$ над алгебрично затворено поле k в афинни алгебрични множества Y, които са взаимно еднозначни върху своя образ, без индуцираният хомоморфизъм на k-алегбри $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ да е епиморфизъм. По-точно, можем да разглеждаме $\varphi : X \to Y$ като доминантно регулярно изображение $\varphi : X \to Z$, така че $\varphi^* : k[Z] \to k[X]$ е влагане. Поради наличието на комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} k[Y] \arrow[r, "\varphi^*"] \arrow[d] & k[X] \\ k[Z] \arrow[ur, "\varphi^*"'] & \end{tikzcd},$$

от хомоморфизми на k-алгебри, сюрективността на $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ води до биективност на $\varphi^* : k[Z] \to k[X]$ и изисква бирегуларност на $\varphi : X \to Z$, съгласно Твърдение 5.26 (iii). Съществуването на взаимно еднозначни регулярни изображения $\varphi : X \to \varphi(X)$, чиито обратни $\varphi^{-1} : \varphi(X) \to X$ не са регулярни показва, че взаимната еднозначност на регулярно изображение $\varphi : X \to \varphi(X)$ не е достатъчна за епиморфността на $\varphi^* : k[Y] \to k[X]$ за афинните алгебрични множества $\varphi(X) \subseteq Y \subseteq k^m$.
Например, ако k е алгебрично затворено поле с характеристика $\mathrm{char}(k) \neq 2$, то твърдим, че

$$C = \{(x_1, x_2) \in k^2 \ \ | \ \ x_2^2 - x_1^3 = 0\}$$

е неприводима крива с взаимно еднозначно регулярно изображение

$$\varphi : k \longrightarrow C,$$

$$\varphi(t) = (t^2, t^3),$$

чието обратно $\varphi^{-1} : C \to k$ не е регулярно. По-точно, полиномиалният идеал $I(C) \triangleleft k[x_1, x_2]$ на $C = V(x_2^2 - x_1^3)$ е

$$I(C) = IV(x_2^2 - x_1^3) = r(\langle x_2^2 - x_1^3 \rangle) = \langle x_2^2 - x_1^3 \rangle,$$

съгласно Теоремата на Hilbert за нулите и радикалността на простия идеал $\langle x_1^2 - x_1^3 \rangle \triangleleft k[x_1, x_2]$, породен от неразложимия полином $x_2^2 - x_1^3 \in k[x_1, x_2]$. От простотата на $I(C) \triangleleft k[x_1, x_2]$ следва неприводимостта на C. Изображението $\varphi(t) = (t^2, t^3)$ е регулярно, защото се задава с полиноми. Ако $t_2, t_2 \in k$, $t_1 \neq t_2$, то след евентуална пермутация на t_1 с t_2 имаме $t_1 \neq 0$. Тогава предположението $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$ е еквивалентно на $(t_1^2, t_1^3) = (t_2^2, t_2^3)$, така че води до $t_2 \neq 0$ и

$$t_2 = \frac{t_2^3}{t_2^2} = \frac{t_1^3}{t_1^2} = t_1.$$

Следователно различни точки $t_1 \neq t_2$ от k имат различни образи $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$. Всяка точка $(x_1, x_2) \in C$ има праобраз $t \in k$ с $\varphi(t) = (t^2, t^3) = (x_1, x_2)$. Ако $x_1 = 0$, то $x_2 = 0$ и $\varphi(0) = (0, 0)$. За $x_1 \neq 0$ избираме $t = \frac{x_2}{x_1}$ и проверяваме, че

$$\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = \left(\frac{x_2^2}{x_1^2}, \frac{x_2^3}{x_1^3}\right) = \left(\frac{x_1^3}{x_1^2}, \frac{x_1^3 x_2}{x_1^3}\right) = (x_1, x_2).$$

Това доказва взаимната еднозначност на $\varphi : k \to C$.
Ако допуснем, че $\varphi^{-1} : C \to k$ е регулярно, то $\varphi^{-1} = \overline{f} = f : C \to k$ се задава с полином $f \in k[x_1, x_2]$, защото полето k е алгебрично затворено и C е афинно многообразие. Вземайки предвид $x_2^2 - x_1^3 \in I(C)$, избираме представител $f \in k[x_1, x_2]$ на $\overline{f} \in k[C]$ от вида $f(x_1, x_2) = x_2 a(x_1) + b(x_1)$ за някакви полиноми $a(x_1), b(x_1) \in k[x_1]$. Тогава

$$(x_1, x_2) = \varphi\varphi^{-1}(x_1, x_2) = \varphi(f) = (f^2, f^3) \quad \text{за} \quad \forall (x_1, x_2) \in C$$

води до

$$I(C) \ni f^2 - x_1 = (x_2 a + b)^2 - x_1 = x_2^2 a^2 + 2x_2 ab + b^2 - x_1.$$

Отново използваме $x_2^2 - x_1^3 \in I(C)$ и получаваме

$$I(C) \ni (f^2 - x_1) - (x_2^2 - x_1^3)a^2 = x_2(2ab) + (x_1^3 a^2 + b^2 - x_1).$$

Всеки ненулев елемент на $I(C) = \langle x_2^2 - x_1^3 \rangle$ е полином $(x_2^2 - x_1^3)\left(\sum\limits_{i=0}^{d} c_i(x_1) x_2^i\right)$ на x_2 от степен ≥ 2, с коефициенти от $k[x_1]$. Следователно

$$2x_2 a(x_1) b(x_1) + (x_1^3 a(x_1)^2 + b(x_1)^2 - x_1) \equiv 0 \in k[x_1, x_2]$$

е тъждествено нулевият полином на x_1 и x_2. Оттук следват равенствата

$$2a(x_1)b(x_1) \equiv 0 \in k[x_1] \quad \text{и} \quad x_1^3 a(x_1)^2 + b(x_1)^2 - x_1 \equiv 0 \in k[x_1].$$

За $\mathrm{char}(k) \neq 2$, в областта $k[x_1]$ имаме $a(x_1) \equiv 0 \in k[x_1]$ или $b(x_1) \equiv 0 \in k[x_1]$. Ако $a(x_1) \equiv 0$, то $b(x_1)^2 \equiv x_1$, което е противоречие. При $b(x_1) \equiv 0$ получаваме $x_1(x_1^2 a(x_1)^2 - 1) \equiv 0$ в областта $k[x_1]$, откъдето $x_1^2 a(x_1)^2 \equiv 1$. Последното равенство не може да бъде изпълнено в $k[x_1]$. Това опровергава допускането за регулярност на $\varphi^{-1} : C \to k$.

Задача 5.30. *Нека k е алгебрично затворено поле, $f(x) \in k[x]$ е полином, чиято степен е взаимно проста с 3, $C = \{(x, y) \in k^2 \mid y^3 = f(x)\}$ и*

$$\varphi : C \longrightarrow k^2,$$
$$\varphi(x, y) = (x^2, y^6).$$

Да се докаже, че индуцираният хомоморфизъм на k-алгебри $\varphi^* : k[z, t] \to k[C]$ не е епиморфизъм.

Задача 5.31. *Нека k е алгебрично затворено поле, $f(x) \in k[x]$ е полином от нечетна степен, а $C = \{(x, y) \in k^2 \mid y^2 = f(x)\}$. Да се докаже, че за произволни $a, b \in k$ изображението*

$$\varphi_{a,b} : C \longrightarrow k,$$
$$\varphi_{a,b}(x, y) = ax + by$$

има неприводим образ и индуцира влагане на k-алгебри $\varphi^* : k[z] \to k[C]$.

Задача 5.32. *Нека k е алгебрично затворено поле,*

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in k^3 \ \mid \ x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3 - x_2x_3 = 0\}$$

е неприводимо афинно алгебрично множество с регулярно изображение

$$\varphi : X \longrightarrow k^3,$$

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2, \quad x_2 + x_3, \quad x_3 + x_1).$$

Да се намерят ядрото $\ker(\varphi^*)$ *и образа* $\mathrm{im}(\varphi^*)$ *на индуцирания хомоморфизъм на k-алгебри* $\varphi^* : k[y_1, y_2, y_3] \to k[X]$.

Упътване: Представете уравнението на X във вида

$$(x_1 + x_3)^2 = (x_1 + x_2)(x_2 + x_3).$$