Глава 4

Проективни алгебрични множества. Разлагане на алгебрично множество в крайно обединение на неприводими компоненти.

1. Проективно алгебрично множество и хомогенен идеал

Проективното пространство $\mathbb{P}^n(k)$ над поле k се състои от класовете на пропорционалност $[x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$ на точките $(x_0, x_1, \ldots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Геометрично, $\mathbb{P}^n(k)$ е множеството на правите в k^{n+1} през точките $(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ и $(0, \ldots, 0) \in k^{n+1}$. Да забележим, че

$$k^* \times [k^{n+1} \setminus \{(0, \ldots 0)\}] \longrightarrow k^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\},$$

$$(\lambda, (x_0, \ldots, x_n)) \mapsto (\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) \quad \text{за} \quad \forall \lambda \in k^*, \ \forall (x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$$

е действие на мултипликативната група $(k^* = k \setminus \{0\}, .)$ на полето k върху множеството $k^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Орбитите на това действие са $[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k)$. Съществува естествена проекция

$$\Pi : k^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(k),$$

$$\Pi(x_0, \ldots, x_n) = [x_0 : \ldots : x_n],$$

изобразяваща всяка точка $(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ в нейната k^*-орбита $[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k)$.
Разглеждаме афинните алгебрични множества $V \subset k^{n+1}$, които са съставени от k^*-орбити, т.е. онези афинни алгебрични множества $V \subset k^{n+1}$, които съдържат изцяло всяка k^*-орбита, която пресича V. Образите $\Pi(V \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ на $V \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ за такива V ще наричаме проективни алгебрични множества. Да забележим, че V съдържа всяка k^*-орбита, пресичаща V точно когато действието на k^* върху k^{n+1} се ограничава до действие $k^* \times V \to V$ на k^* върху V. Геометрично, това означава, че V е коника с връх $(0, \ldots, 0) \in k^{n+1}$. С други думи, заедно с всяка своя точка $a \in V \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, афинното алгебрично множество V съдържа цялата права в k^{n+1} през a и $(0, \ldots, 0)$.
За да характеризираме кониките $V \subseteq k^{n+1}$ с център $(0, \ldots, 0)$ ни е нужна следната

Лема 4.1. *Всяко алгебрично затворено поле k е безкрайно.*

Доказателство: Ако k е с характеристика $\mathrm{char}(k) = 0$, то простото подполе P на k е изоморфно на полето $\mathbb{Q}$ на рационалните числа. Следователно P е безкрайно поле и $k \supseteq P$ е безкрайно поле.
Да допуснем, че k е крайно алгебрично затворено поле с проста характеристика $\mathrm{char}(k) = p$. Тогава $k \simeq \mathbb{F}_{p^m}$ е изоморфно на множеството на корените на полинома $x^{p^m} - x = 0$ в подходящо разширение на полето $P \simeq \mathbb{F}_p = \mathbb{Z}_p$ на остатъците при деление с p. За произволно естествено $n > m$, полето $\mathbb{F}_{p^n}$ с p^n елемента е алгебрично над $\mathbb{F}_p$, защото $\mathbb{F}_{p^n}$ се състои от корените на полинома $x^{p^n} - x = 0$ в подходящо разширение на $P \simeq \mathbb{F}_p$. Следователно $\mathbb{F}_{p^n}$ е алгебрично над простото подполе $P \simeq \mathbb{F}_p$ на $k = \mathbb{F}_{p^m}$, а оттам е алгебрично и над k. Но всеки алгечбричен над k елемент се съдържа в алгебрично затвореното поле k,

така че $\mathbb{F}_{p^n} \subseteq k \simeq \mathbb{F}_{p^m}$. Това противоречи на $n > m$ и доказва безкрайността на алгебрично затворените полета k с проста характеристика $\mathrm{char}(k) = p$, Q.E.D.

Лема 4.2. *(i) Ако k е алгебрично затворено поле и $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ е радикален идеал, чието афинно алгебрично множество $V(I) \subseteq k^{n+1}$ е коника, то I съдържа всички хомогенни компоненти $f^{(j)}$ на своите елементи $f = f^{(0)} + \ldots + f^{(d)} \in I$.*
(ii) Ако идеалът $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ съдържа всички хомогенни компоненти $f^{(j)}$ на своите елементи $f = f^{(0)} + \ldots + f^{(d)} \in I$, то афинното алгебрично множество $V(I) \subseteq k^{n+1}$ е коника.

Доказателство: (i) Нека $f = f^{(0)} + \ldots + f^{(d)} \in I$ е полином от I с хомогенни компоненти $f^{(j)}$ от степен $0 \leq j \leq d$. За всяка точка $a = (a_0, \ldots, a_n) \in V(I)$ знаем, че $f(a) = 0$ и $f(\lambda a) = 0$ за $\forall \lambda \in k^*$. Алгебрично затвореното поле k е безкрайно, така че съществуват различни елементи $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_d \in k^*$. Условията $f(\lambda_s a) = \sum\limits_{j=0}^{d} f^{(j)}(\lambda_s a) = \sum\limits_{j=0}^{d} \lambda_s^j f^{(j)}(a) = 0$ за $\forall 0 \leq s \leq d$ могат да се запишат в матричен вид

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \ldots & \lambda_0^d \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_d & \ldots & \lambda_d^d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(0)}(a) \\ \ldots \\ f^{(d)}(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Матрицата

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda_0 & \ldots & \lambda_0^d \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \lambda_d & \ldots & \lambda_d^d \end{pmatrix} = V(\lambda_0, \ldots, \lambda_d)^t$$

е транспонирана на матрицата на Vandermonde $V(\lambda_0, \ldots, \lambda_d)$ на $\lambda_0, \ldots, \lambda_d$. За различни $\lambda_0, \ldots, \lambda_d \in k^*$, детерминантата

$$\det V(\lambda_0, \ldots, \lambda_d)^t = \det V(\lambda_0, \ldots, \lambda_d) = \prod_{d \geq i > j \geq 0} (\lambda_i - \lambda_j) \neq 0,$$

така че $V(\lambda_0, \ldots, \lambda_d)^t$ е обратима и от (4.1) следва $f^{(0)}(a) = 0, \ldots, f^{(d)}(a) = 0$ за $\forall a \in V(I)$. Следователно хомогенните компоненти $f^{(0)}, \ldots, f^{(d)} \in IV(I)$ на $f \in I$ се съдържат в идеала $IV(I)$ на кониката $V(I) \subseteq k^{n+1}$. Съгласно Теорема 3 на Hilbert за нулите, $IV(I) = r(I)$, така че $f^{(0)}, \ldots, f^{(d)} \in r(I) = I$ за радикалния идеал $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$.
(ii) Нека идеалът $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ съдържа всички хомогенни компоненти $f^{(j)}$, $0 \leq j \leq d$ на своите елементи $f = f^{(0)} + \ldots + f^{(d)} \in I$. За произволна точка $a \in V(I)$, произволно $\lambda \in k^*$ и произволен полином $f = f^{(0)} + \ldots + f^{(d)} \in I$ имаме $f(\lambda a) = \sum\limits_{j=0}^{d} f^{(j)}(\lambda a) = \sum\limits_{j=0}^{d} \lambda^j f^{(j)}(a) = 0$, защото от $f^{(j)} \in I$ следва $f^{(j)}(a) = 0$ за $\forall 0 \leq j \leq d$. Следователно $\lambda a \in V(I)$ и $V(I)$ е коника, Q.E.D.
Лема 4.2 ни навежда на мисълта да определим прокетивните алгебрични множества като k^*-орбитите върху $k^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$, съставени от нулите на такива идеали $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$, които съдържат всички хомогенни компоненти на своите елементи.

Определение 4.3. *Идеалът $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ се нарича хомогенен, ако всеки елемент $f = f^{(0)} + \ldots + f^{(d)} \in I$ на I се съдржа в I заедно с всички свои хомогенни компоненти $f^{(0)}, \ldots, f^{(d)} \in I$.*

По определение, $f^{(0)} \in k$, така че ако $f^{(0)} \neq 0$, то $V(I) = \emptyset$ е празното множество.

Лема 4.4. *Идеалът $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ е хомогенен тогава и само тогава, когато $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ се поражда от краен брой хомогенни полиноми $f_1, \ldots, f_m \in k[x_0, \ldots, x_n]$.*

Доказателство: Нека всички хомогенни компоненти на елементите на I принадлежат на I. Идеалът I в ньотеровия пръстен $k[x_0, \ldots, x_n]$ се поражда от краен брой (необезателно хомогенни) полиноми $g_1, \ldots, g_t$, $I = \langle g_1, \ldots, g_t \rangle$. Разлагаме всяко $g_s = \sum\limits_{j_s=0}^{d_s} g_s^{(j_s)}$ в сума на хомогенни компоненти $g_s^{(j_s)}$ и разглеждаме идеала

$$J = \langle g_s^{(j_s)} \ \mid \ 0 \leq j_s \leq d_s, \ \ 1 \leq s \leq t \rangle \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n],$$

породен от всички хомогенни компоненти $g_s^{(j_s)}$ на пораждащите g_s на I. По предположение, $\forall g_s^{(j_s)} \in I$, така че $J \subseteq I$. От друга страна, всеки порваждащ g_s на I принадлежи на J, така че $I \subseteq J$ и $I = J$ се поражда от краен брой хомогенни полиноми $g_s^{(j_s)}$.
Обратно, нека $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ се поражда от краен брой хомогенни полиноми $f_i \in k[x_0, \ldots, x_n]$ от степен $\deg(f_i) = d_i \geq 0$. Тогава всеки елемент на I е от вида $f = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i g_i$ за някакви (необезателно хомогенни) полиноми $g_i \in k[x_0, \ldots, x_n]$. За всяко неотрицателно цяло число j, j-тата хомогенна компонента

$$f^{(j)} = \sum_{d_i \leq j} f_i g_i^{(j-d_i)} \in I,$$

където сумирането е по всички $1 \leq i \leq m$ с $d_i \leq j$, Q.E.D.

Определение 4.5. *Ако $f_1, \ldots, f_m \in k[x_0, \ldots, x_n]$ са хомогенни полиноми, то*

$$V_{\mathbb{P}^n}(f_1, \ldots, f_m) := \{x = [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \ \mid \ f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq m\}$$

се нарича проективно алгебрично множество.

Определение 4.6. *За произволно подмножество $M \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, идеалът $I_h(M) \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$, породен от хомогенните полиноми $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$, анулиращи се във всички точки на M се нарича хомогенен идеал на M.*

Ако проективното алгебрично множество

$$V_{\mathbb{P}^n}(f_1, \ldots, f_m) = \Pi(V(f_1, \ldots, f_m) \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$$

е непразно, то кониката $V(f_1, \ldots, f_m) \subseteq k^{n+1}$ определя напълно $V_{\mathbb{P}^n}(f_1, \ldots, f_m)$, защото началото $(0, \ldots, 0)$ е в Зариски затворената обвивка на $V(f_1, \ldots, f_m) \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$. Следователно хомогенният идеал на непразно проективно алгебрично множество е еднозначно определен. Празното множество $\emptyset = \Pi(\emptyset)$ се повдига до празното подмножество $\emptyset$ на k^{n+1} и до точката $(0, \ldots, 0)$. Над алгебрично затворено поле k, идеалите на тези множества са $I(\emptyset) = k[x_0, \ldots, x_n]$ и $I((0, \ldots, 0)) = \mathfrak{M}_o = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$. За определеност полагаме $I_h(\emptyset) = k[x_0, \ldots, x_n]$, като по този начин хомогенният идеал $\mathfrak{M}_o$ не е идеал на проективно алгебрично множество.

2. Действия с проективни алгебрични множества и хомогенни идеали

По аналогия с Лема 1.12 и Лема 1.13 имаме следната

Лема 4.7. *(i) $V_{\mathbb{P}^n}(0) = \mathbb{P}^n(k)$.*
(ii) Ако $k[x_0, \ldots, x_n]_h$ е множеството на всички хомогенни полиноми на променливите $x_0, \ldots, x_n$ с коефициенти от k, то $V_{\mathbb{P}^n}(k[x_0, \ldots, x_n]_h) = \emptyset$.
(iii) Ако $S \subseteq T$ са множества от хомогенни полиноми на $x_0, \ldots, x_n$, то $V_{\mathbb{P}^n}(T) \subseteq V_{\mathbb{P}^n}(S)$.

(iv) Ако $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ са подмножества на проективното пространство $\mathbb{P}^n(k)$, то $I_h(M_2) \subseteq I_h(M_1)$.
(v) За произволно множество $S \subset k[x_0,\dots,x_n]$ от хомогенни полиноми е в сила $V_{\mathbb{P}^n}(S) = V_{\mathbb{P}^n}(\langle S\rangle_h)$, където $\langle S\rangle_h$ е множеството на хомогенните полиноми от идеала $\langle S\rangle \triangleleft k[x_0,\dots,x_n]$.

Доказателство: (iv) Хомогенните пораждащи на $I_h(M_2)$ са измежду хомогенните пораждащи на $I_h(M_1)$, защото хомогенните полиноми $f \in k[x_0,\dots,x_n]$, анулиращи се във всички точки на M_2 се анулират във всички точки на M_1.
(v) От $S \subset \langle S\rangle_h$ следва $V_{\mathbb{P}^n}(\langle S\rangle_h) \subseteq V_{\mathbb{P}^n}(S)$, съгласно (iii). За обратното включване използваме, че $k[x_0,\dots,x_n]$ е ньотерова комутативна област с единица. Следователно пораждащата система S на $\langle S\rangle$ има крайна пораждаща подсистема $f_1,\dots,f_m$, съставена от хомогенни полиноми $f_i \in k[x_0,\dots,x_n]$. Оттук, всеки хомогенен полином от $\langle S\rangle$ има вида $f = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i g_i$ за хомогенни полиноми $g_i \in k[x_0,\dots,x_n]$ от степен $\deg(g_i) = \deg(f) - \deg(f_i)$ при $\deg(f) \geq \deg(f_i)$ или $g_i \equiv 0$ за $\deg(f) < \deg(f_i)$. Произволна точка $a \in V_{\mathbb{P}^n}(S)$ принадлежи на $V_{\mathbb{P}^n}(\langle S\rangle_h)$, защото за $\forall f \in \langle S\rangle_h$ е в сила $f(a_0,\dots,a_n) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(a_0,\dots,a_n) g_i(a_0,\dots,a_n) = 0$, съгласно $f_i(a_0,\dots,a_n) = 0$ за $1 \leq i \leq m$. Това доказва $V_{\mathbb{P}^n}(S) \subseteq V_{\mathbb{P}^n}(\langle S\rangle_h)$ и $V_{\mathbb{P}^n}(S) = V_{\mathbb{P}^n}(\langle S\rangle_h)$, Q.E.D.
Ако $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ е фамилия от хомогенни идеали в $k[x_0,\dots,x_n]$, то сумата $\sum\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$ е хомогенен идеал в $k[x_0,\dots,x_n]$. По-точно, ако S_α са крайни множества от хомогенни пораждащи на $I_\alpha = \langle S_\alpha\rangle$, то $\sum\limits_{\alpha\in A} I_\alpha = \langle \cup_{\alpha\in A} S_\alpha\rangle$ се поражда от множеството $\cup_{\alpha\in A} S_\alpha$, съставено от хомогенни полиноми на $x_0,\dots,x_n$. Съгласно ньотеровостта на $k[x_0,\dots,x_n]$ можем да изберем крайно пораждащо подмножество $\{f_1,\dots,f_m\} \subseteq \cup_{\alpha\in A} S_\alpha$ на $\sum\limits_{\alpha\in A} I_\alpha$, така че $\sum\limits_{\alpha\in A} I_\alpha = \langle f_1,\dots,f_m\rangle$ се поражда от краен брой хомогенни полиноми $f_i \in k[x_0,\dots,x_n]$ и представлява хомогенен идеал в $k[x_0,\dots,x_n]$.
Ако $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ е фамилия от хомогенни идеали в $k[x_0,\dots,x_n]$, то сечението $\cap_{\alpha\in A} I_\alpha$ е хомогенен идеал в $k[x_0,\dots,x_n]$. Наистина, ако $f \in \cap_{\alpha\in A} I_\alpha$ се разлага в сума на неприводими компоненти $f = \sum\limits_{j=0}^{d} f^{(j)}$, то за $\forall \alpha \in A$ от $f \in I_\alpha$ следва $f^{(0)},\dots,f^{(d)} \in I_\alpha$, съгласно хомогенността на идеала $I_\alpha \triangleleft k[x_0,\dots,x_n]$. Следователно $f^{(0)},\dots,f^{(d)} \in \cap_{\alpha\in A} I_\alpha$ и $\cap_{\alpha\in A} I_\alpha$ е хомогенен идеал в $k[x_0,\dots,x_n]$.
Да отбележим, че ако $I \triangleleft k[x_0,\dots,x_n]$ е хомогенен идеал, $J \triangleleft k[x_0,\dots,x_n]$ е произволен идеал и всички хомогенни полиноми от I се съдържат в J, то $I \subseteq J$. По-точно, за всеки полином $f = \sum\limits_{j=0}^{d} f^{(j)} \in I$ с хомогенни компоненти $f^{(j)} \in I$ имаме $f^{(j)} \in J$ по предположение. Следователно $f \in J \triangleleft k[x_0,\dots,x_n]$ и $I \subseteq J$.
Отсега нататък ще означаваме с I_h множеството на хомогенните полиноми от идеала $I \triangleleft k[x_0,\dots,x_n]$. По аналогия с Лема 1.16 имаме следната

Лема 4.8. *(i) Ако $\{I_\alpha\}_{\alpha\in A}$ са хомогенни идеали в $k[x_0,\dots,x_n]$, то*

$$V_{\mathbb{P}^n}\left(\left(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha\right)_h\right) = \cap_{\alpha\in A} V_{\mathbb{P}^n}((I_\alpha)_h).$$

(ii) Ако $S_\alpha \subseteq k[x_0,\dots,x_n]_h$ са множества от хомогенни полиноми, то

$$V_{\mathbb{P}^n}(\cup_{\alpha\in A} S_\alpha) = \cap_{\alpha\in A} V_{\mathbb{P}^n}(S_\alpha).$$

(iii) За произволни подмножества $M_\alpha \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, $\alpha \in A$ е в сила

$$I_h(\cup_{\alpha\in A} M_\alpha) = \cap_{\alpha\in A} I_h(M_\alpha).$$

Доказателство: (i) От $(I_\alpha)_h \subseteq \left(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha\right)_h$ следва

$$V_{\mathbb{P}^n}\left(\left(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha\right)_h\right) \subseteq V_{\mathbb{P}^n}((I_\alpha)_h) \quad \text{за} \quad \forall \alpha \in A,$$

съгласно Лема 4.7 (iii). Следователно $V_{\mathbb{P}^n}\left(\left(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha\right)_h\right) \subseteq \cap_{\alpha\in A} V_{\mathbb{P}^n}((I_\alpha)_h)$. За обратното включване $\cap_{\alpha\in A} V_{\mathbb{P}^n}((I_\alpha)_h) \subseteq V_{\mathbb{P}^n}\left(\left(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha\right)_h\right)$ избираме крайна система от хомогенни пораждащи $f_1, \ldots, f_m$ на хомогенния идеал $\sum_{\alpha\in A} I_\alpha = \langle f_1, \ldots, f_m\rangle$. Тогава $\forall f \in \left(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha\right)_h$ е от вида $f = \sum_{i=1}^m f_i g_i$ за хомогенни полиноми $g_i \in k[x_0, \ldots, x_n]$ от степен $\deg(g_i) = \deg(f) - \deg(f_i)$ при $\deg(f) \geq \deg(f_i)$ или с $g_i \equiv 0$ за $\deg(f) < \deg(f_i)$. Нека $f_i \in I_{\alpha_i}$ за $1 \leq i \leq m$. Тогава от $a \in \cap_{\alpha\in A} V_{\mathbb{P}^n}((I_\alpha)_h)$ следва $a \in V_{\mathbb{P}^n}((I_{\alpha_i})_h)$ за $\forall 1 \leq i \leq m$, откъдето $f_i(a) = f_i(a_0, \ldots, a_n) = 0$. В резултат, $f(a) = \sum_{i=1}^m f_i(a) f_i(a) = 0$ и $a \in V_{\mathbb{P}^n}(\langle f_1, \ldots, f_m\rangle_h) = V_{\mathbb{P}^n}\left(\left(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha\right)_h\right)$. Това доказва

$$\cap_{\alpha\in A} V_{\mathbb{P}^n}((I_\alpha)_h) \subseteq V_{\mathbb{P}^n}\left(\left(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha\right)_h\right) \quad \text{и} \quad \cap_{\alpha\in A} V_{\mathbb{P}^n}((I_\alpha)_h) = V_{\mathbb{P}^n}\left(\left(\sum_{\alpha\in A} I_\alpha\right)_h\right).$$

(ii) Съгласно Лема 4.7 (v) имаме

$$V_{\mathbb{P}^n}(\cup_{\alpha\in A} S_\alpha) = V_{\mathbb{P}^n}(\langle \cup_{\alpha\in A} S_\alpha\rangle_h) = V_{\mathbb{P}^n}\left(\left(\sum_{\alpha\in A} \langle S_\alpha\rangle\right)_h\right),$$

$$V_{\mathbb{P}^n}(S_\alpha) = V_{\mathbb{P}^n}(\langle S_\alpha\rangle_h).$$

Прилагайки (i) получаваме $V_{\mathbb{P}^n}\left(\left(\sum_{\alpha\in A} \langle S_\alpha\rangle\right)_h\right) = \cap_{\alpha\in A} V_{\mathbb{P}^n}(\langle S_\alpha\rangle_h)$, откъдето $V_{\mathbb{P}^n}(\cup_{\alpha\in A} S_\alpha) = \cap_{\alpha\in A} V_{\mathbb{P}^n}(S_\alpha)$.
(iii) От $M_\alpha \subseteq \cup_{\alpha\in A}$ за $\forall \alpha \in A$ следва $I_h(\cup_{\alpha\in A} M_\alpha) \subseteq I_h(M_\alpha)$, съгласно Лема 1.13 (iv). Оттук $I_h(\cup_{\alpha\in A} M_\alpha) \subseteq \cap_{\alpha\in A} I_h(M_\alpha)$. За $\cap_{\alpha\in A} I_h(M_\alpha) \subseteq I_h(\cup_{\alpha\in A} M_\alpha)$ е достатъчно да забележим, че всички хомогенни полиноми от $\cap_{\alpha\in A} I_h(M_\alpha)$ са пораждащи на $I_h(\cup_{\alpha\in A} M_\alpha)$, защото $\cap_{\alpha\in A} I_h(M_\alpha)$ е хомогенен идеал в $k[x_0, \ldots, x_n]$. Но хомогенните полиноми $f \in \cap_{\alpha\in A} I_h(M_\alpha)$ се анулират върху M_α за $\forall \alpha \in A$, така че f се анулират върху $\cup_{\alpha\in A} M_\alpha$ и са пораждащи на $I_h(\cup_{\alpha\in A} M_\alpha)$. Оттук, $\cap_{\alpha\in A} I_h(M_\alpha) \subseteq I_h(\cup_{\alpha\in A} M_\alpha)$ и $\cap_{\alpha\in A} I_h(M_\alpha) = I_h(\cup_{\alpha\in A} M_\alpha)$, Q.E.D.

Задача 4.9. *Нека $\mathcal{P}$ е множеството на нечетните прости числа. За всяко $p \in \mathcal{P}$ разглеждаме проективната равнинна крива $W_p = V_{\mathbb{P}^2}(x_1^{2p} - (x_0 + x_2)^{2p})$. Да се докаже, че съществуват краен брой $p_1, \ldots, p_k \in \mathcal{P}$, така че*

$$\cap_{p\in\mathcal{P}} W_p = W_{p_1} \cap \ldots \cap W_{p_k}.$$

Ако $I_1, \ldots, I_m$ са хомогенни идеали в $k[x_0, \ldots, x_n]$, то произведението им $I_1 \ldots I_m$ е хомогенен идеал в $k[x_0, \ldots, x_n]$. По-точно, ако I_j ссе поражда от крайно множество S_j, съставено от хомогенни полиноми, то $I_1 \ldots I_m$ се поражда от крайното множество $S_1 \ldots S_m = \{f_1 \ldots f_m \ \mid \ f_j \in S_j\}$, съставено от хомогенни полиноми. По аналогия с Лема 1.23 имаме следната

Лема 4.10. *(i) Ако $I_1, \ldots, I_m$ са хомогенни идеали в $k[x_0, \ldots, x_n]$, то*

$$V_{\mathbb{P}^n}((I_1 \ldots I_m)_h) = V_{\mathbb{P}^n}((I_1)_h) \cup \ldots \cup V_{\mathbb{P}^n}((I_m)_h).$$

(ii) Ако $S_1, \ldots, S_m$ са множества от хомогенни полиноми, то

$$V_{\mathbb{P}^n}(S_1 \ldots S_m) = V_{\mathbb{P}^n}(S_1) \cup \ldots \cup V_{\mathbb{P}^n}(S_m).$$

(iii) Ако $I_1, \ldots, I_m$ са хомогенни идеали в $k[x_0, \ldots, x_n]$, то

$$V_{\mathbb{P}^n}((I_1 \cap \ldots \cap I_m)_h) = V_{\mathbb{P}^n}((I_1)_h) \cup \ldots \cup V_{\mathbb{P}^n}((I_m)_h).$$

Доказателство: (i) От $(I_1 \ldots I_m)_h \subseteq (I_j)_h$ за $\forall 1 \leq j \leq m$ следва включването $V_{\mathbb{P}^n}((I_j)_h) \subseteq V_{\mathbb{P}^n}((I_1 \ldots I_m)_h)$, съгласно Лема 4.7 (iii). Оттук получаваме, че

$$V_{\mathbb{P}^n}((I_1)_h) \cup \ldots \cup V_{\mathbb{P}^n}((I_m)_h) \subseteq V_{\mathbb{P}^n}((I_1 \ldots I_m)_h).$$

За обратното включване $V_{\mathbb{P}^n}((I_1 \ldots I_m)_h) \subseteq V_{\mathbb{P}^n}((I_1)_h) \cup \ldots \cup V_{\mathbb{P}^n}((I_m)_h)$ да допуснем, че съществува точка $a \in V_{\mathbb{P}^n}((I_1 \ldots I_m)_h) \setminus (\cup_{j=1}^m V_{\mathbb{P}^n}((I_j)_h))$. Тогава за $\forall 1 \leq j \leq m$ можем да намерим хомогенен полином $f_j \in I_j$ с $f_j(a_0, \ldots, a_n) \neq 0$. В резултат, $f_1 \ldots f_m \in (I_1 \ldots I_m)_h$ има стойност

$$(f_1 \ldots f_m)(a_0, \ldots, a_n) = f_1(a_0, \ldots, a_n) \ldots f_m(a_0, \ldots, a_n) \neq 0,$$

противно на предположението $a \in V_{\mathbb{P}6n}((I_1 \ldots I_m)_h)$. Противоречието доказва, че $V_{\mathbb{P}^n}((I_1 \ldots I_m)_h) \subseteq \cup_{j=1}^m V_{\mathbb{P}^n}((I_j)_h)$ и $V_{\mathbb{P}^n}((I_1 \ldots I_m)_h) = \cup_{j=1}^m V_{\mathbb{P}^n}((I_j)_h)$.
(ii) По Лема 4.7 (v) имаме

$$V_{\mathbb{P}^n}(S_1 \ldots S_m) = V_{\mathbb{P}^n}(\langle S_1 \ldots S_m \rangle_h) = V_{\mathbb{P}^n}((\langle S_1 \rangle \ldots \langle S_m \rangle)_h)$$

и $V_{\mathbb{P}^n}(S_j) = V_{\mathbb{P}^n}((\langle S_j \rangle_h)$. Съгласно (i), $V_{\mathbb{P}^n}((\langle S_1 \rangle \ldots \langle S_m \rangle)_h) = \cup_{j=1}^m V_{\mathbb{P}^n}(\langle S_j \rangle_h)$, откъдето $V_{\mathbb{P}^n}(S_1 \ldots S_m) = \cup_{j=1}^m V_{\mathbb{P}^n}(S_j)$.
(iii) От $(I_1 \ldots I_m)_h \subseteq (I_1 \cap \ldots \cap I_m)_h \subseteq (I_j)_h$ следва

$$V_{\mathbb{P}^n}((I_j)_h) \subseteq V_{\mathbb{P}^n}((I_1 \cap \ldots I_m)_h) \subseteq V_{\mathbb{P}^n}((I_1 \ldots I_m)_h) \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq m$$

след двукратно използване на Лема 4.7 (iii). Следователно

$$\cup_{j=1}^m V_{\mathbb{P}^n}((I_j)_h) \subseteq V_{\mathbb{P}^n}((I_1 \cap \ldots \cap I_m)_h) \subseteq V_{\mathbb{P}^n}((I_1 \ldots I_m)_h).$$

Прилагането на (i) към предишните включвания дава (iii), Q.E.D.

Задача 4.11. *(i) За произволни елементи $a_0, \ldots, a_n \in k$ на поле k да се опише проективното алгебрично множество*

$$V_{\mathbb{P}^n}(x_i a_j - x_j a_i \ \mid \ 0 \leq i < j \leq n).$$

(ii) За произволни елементи $a_0^{(i)}, \ldots, a_n^{(i)} \in k$, $1 \leq i \leq m$ на поле k да се опише проективното алгебрично множество

$$V_{\mathbb{P}^n}((x_{i_1} a_{j_1}^{(1)} - x_{j_1} a_{i_1}^{(1)}) \ldots (x_{i_m} a_{j_m}^{(m)} - x_{j_m} a_{i_m}^{(m)}) \ \mid \ 0 \leq i_s < j_s \leq n, 1 \leq s \leq m).$$

3. Топология на Зариски върху проективно алгебрично множество

В този параграф ще означаваме с S крайно множество от хомогенни полиноми на $x_0, \ldots, x_n$ с коефициенти от поле k.
Да забележим, че множеството $\{V_{\mathbb{P}^n}(S)\}_{S \subset k[x_0,\ldots,x_n]_h, |S|<\infty}$ на проективните алгебрични множества, индексирани с крайните подмножества $S \subset k[x_0, \ldots, x_n]_h$ е фамилия от затворени подмножества на $\mathbb{P}^n(k)$. Наистина, $V_{\mathbb{P}^n}(0) = \mathbb{P}^n(k)$, $V_{\mathbb{P}^n}(1) = \emptyset$. За произволна фамилия $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ от крайни подмножества $S_\alpha \subset k[x_0, \ldots, x_n]_h$ имаме $\cap_{\alpha \in A} V_{\mathbb{P}^n}(S_\alpha) = V_{\mathbb{P}^n}(\cup_{\alpha \in A} S_\alpha) = V_{\mathbb{P}^n}(f_1, \ldots, f_m)$, за произволно крайно пораждащо множество $f_1, \ldots, f_m \in k[x_0, \ldots, x_n]_h$ на идеала $\langle \cup_{\alpha \in A} S_\alpha \rangle = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ За произволни крайни подмножества $S_j \subset k[x_0, \ldots, x_n]_h$, $1 \leq j \leq m$ е в сила $\cup_{j=1}^m V_{\mathbb{P}^n}(S_j) = V_{\mathbb{P}^n}(S_1 \ldots S_m)$ по Лема 4.10 (ii). Това доказва, че

$$\{V_{\mathbb{P}^n}(S)\}_{S \subset k[x_0,\ldots,x_n]_h, |S|<\infty}$$

е фамилия от затворени подмножества на $\mathbb{P}^n(k)$.

Определение 4.12. *Топологията върху $\mathbb{P}^n(k)$ с фамилия от затворени подмножества $\{V_{\mathbb{P}^n}(S)\}_{S \subset k[x_0,\ldots,x_n]_h, |S|<\infty}$ се нарича топология на Зариски върху $\mathbb{P}^n(k)$.*

За произволно крайно подмножество $S_o \subset k[x_0, \ldots, x_n]_h$, множеството

$$\{V_{\mathbb{P}^n}(S_o) \cap V_{\mathbb{P}^n}(S) = V_{\mathbb{P}^n}(S \cup S_o)\}_{S \subset k[x_0,\ldots,x_n]_h, |S|<\infty}$$

образува фамилия от затворени подмножества на $V_{\mathbb{P}^n}(S_o)$. Съответната топология се нарича топология на Зариски върху проективното алгебрично множество $V_{\mathbb{P}^n}(S_o)$.
Следващата лема описва Зариски затворената обвивка на подмножество на $\mathbb{P}^n(k)$.

Лема 4.13. *Зариски затворената обвивка $\overline{M}$ на подмонжество $M \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ е равна на*

$$\overline{M} = V_{\mathbb{P}^n}(I_h(M)_h).$$

В частност, ако M е проективно алгебрични множество, то $M = V_{\mathbb{P}^n}(I_h(M)_h)$.

Доказателство: По определение, $\overline{M} = \cap_{M \subseteq Z} Z$ е сечението на Зариски затворените подмножества $Z \subset \mathbb{P}^n(k)$, съдържащи M. Да забележим, че

$$M \subseteq V_{\mathbb{P}^n}(I_h(M)_h),$$

защото всеки хомогенен елемент f на $I_h(M)$ е хомогенен полином, анулиращ се във всички точки на M. В качеството си на Зариски затворено подмножество на $\mathbb{P}^n(k)$, съдържащо M, $V_{\mathbb{P}^n}(I_h(M)_h)$ участва в сечението $\cap_{M \subseteq Z} Z = \overline{M}$ и го съдържа.
За обратното вкрючване $V_{\mathbb{P}^n}(I_h(M)_h) \subseteq \overline{M}$ е достатъчно да проверим, че

$$V_{\mathbb{P}^n}(I_h(M)_h) \subseteq Z$$

за всяко Зариски затворено подмножество $M \subseteq Z = V_{\mathbb{P}^n}(S_o) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, зададено с крайно множество S_o от хомогенни полиноми. Съгласно Лема 4.7 (iii), за целта е достатъчно да установим, че $S_o \subseteq I_h(M)_h$. Наистина, поради включването $M \subseteq Z = V_{\mathbb{P}^n}(S_o)$, всеки полином $f \in S_o$ се анулира върху M и попада в $I_h(M)_h$, Q.E.D.

Задача 4.14. *Нека*

$$\left| \begin{array}{lllll} f_1(x_0, \ldots, x_n) & = a_{1,0}x_0 & +a_{1,1}x_1 & + \ldots & +a_{1,n}x_n & = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ f_m(x_0, \ldots, x_n) & = a_{m,0}x_0 & a_{m,1}x_1 & + \ldots & +a_{m,n}x_n & = 0 \end{array} \right.$$

е хомогенна система линейни уравнения с коефициенти $a_{i,j} \in k$, $b_0, \dots b_{n-r} \in k^{n+1}$ е фундаментална система решения, а $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ е проективно алгебрично множество . Да се докаже, че

$$\varphi : V_{\mathbb{P}^n}(f_1, \dots, f_m) = \Pi(l_k(b_0, \dots b_{n-r}) \setminus \{(0, \dots 0)\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-r}(k),$$

$$\varphi\Pi\left(\sum_{i=0}^{n-r} y_i b_i\right) = [y_0 : \dots : y_{n-r}]$$

е взаимно еднозначно изображение, което изобразява $X \cap V_{\mathbb{P}^n}(f_1, \dots, f_m)$ в проективно алгебрично подмножество на $\mathbb{P}^{n-r}(k)$.

Упътване: Използвайте компонентите на векторите $b_0, \dots, b_{n-r} \in k^{n+1}$, за да изразите хомогенните координати $x_0, \dots, x_n$ на точките

$$x = [x_0 : \dots : x_n] \in V_{\mathbb{P}^n}(f_1, \dots, f_m)$$

чрез координатите $y_0, \dots, y_{n-r}$ на $\Pi^{-1}(x) \in k^{n+1}$ спрямо $b_0, \dots, b_{n-r}$.

Задача 4.15. *Да се докаже, че проективното алгебрично множество*

$$V_{\mathbb{P}^3}(x_0x_1^2, \quad x_1^2x_2 + x_1^2x_3, \quad x_0^2 - x_0x_2 + x_0x_3, \quad x_0x_2 + x_0x_3 - x_2^2 + x_3^2)$$

е непресичащо се обединение на две проективни прави.

По определение, за $\forall[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k)$ съществува $0 \leq i \leq n$, така че $x_i \neq 0$. Ако $U_i = \{x \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\}$, то $\mathbb{P}^n(k)$ се разлага в обединение

$$\mathbb{P}^n(k) = U_0 \cup \dots \cup U_n.$$

Допълненията

$$H_i = \mathbb{P}^n(k) \setminus U_i = \{x \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i = 0\} \simeq \mathbb{P}^{n-1}(k)$$

са проективни хиперравнини, така че U_i са Зариски отворени подмножества на $\mathbb{P}^n(k)$.

Следващото твърдение установява, че отворените подмножества $U_i \subset \mathbb{P}^n(k)$ са изоморфни на n-мерното афинно пространство k^n по такъв начин, че топологията на Зариски върху U_i, наследена от $\mathbb{P}^n(k)$ съвпада с топологията на Зариски върху k^n.

Твърдение 4.16. *За $\forall 0 \leq i \leq n$ изображението*

$$\varphi_i : U_i = \{x \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\} \longrightarrow k^n,$$

$$\varphi_i([x_0 : \dots : x_{i-1} : x_i : x_{i+1} : \dots : x_n]) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

е хомеоморфизъм относно топологията върху U_i, индуцирана от топологията на Зариски върху $\mathbb{P}^n(k)$ и топологията на Зариски върху k^{n+1}. Изображението φ_i се нарича афинен координатен хомеоморфизъм на U_i.

Доказателство: Непосредствено се вижда, че изображението φ_i е взаимно еднозначно. За произволна точка $a = [a_0 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^n(k)$ означаваме

$$a_{[i]} := \varphi_i(a) = \left(\frac{a_0}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i}\right)$$

и казваме, че $a_{[i]}$ е i-тата дехомогенизация на a. По определение, φ_i е непрекъснато, ако всяка Зариски отворено подмножество $W \subseteq k^n$ се издърпва до Зариски отворено подмножество $\varphi_i^{-1}(W)$ на U_i. Аналогично, $\varphi_i^{-1} : k^n \to U_i$ е непрекъснато, ако за всяко Зариски отворено подмножество $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, праобразът $(\varphi_i^{-1})^{-1}(V \cap U_i) = \varphi_i(V \cap U_i)$ е Зариски отворен в U_i. Съгласно взаимната еднозначност на φ_i и φ_i^{-1} имаме $\varphi_i^{-1}(k^n \setminus W) = U_i \setminus \varphi_i^{-1}(W)$ за всяко Зариски отворено подмножество $W \subseteq k^n$ и $\varphi_i(U_i \setminus V) = k^n \setminus \varphi_i(V \cap U_i)$ за всяко Зариски

отворено $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. Затова е достатъчно да проверим, че всяко Зариски затворено подмножество $X \subseteq k^n$ се издърпва в затворено подмножество $\varphi_i^{-1}(X)$ на U_i относно топологията на Зариски върху $\mathbb{P}^n(k)$ и всяко Зариски затворено подмножество $Y \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ с $Y \cap U_i \neq \emptyset$ се изобразява в Зариски затворено подмножество $\varphi_i(Y \cap U_i) \subseteq k^n$.
За целта въвеждаме i-тата дехомогенизация $f_{[i]}$ на хомогенен полином $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ от степен d като

$$f_{[i]}\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right) := x_i^{-d} f(x_0, \ldots, x_n)$$

и забелязваме, че $f_{[i]}$ е полином на $\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}$ от обща степен $\leq d$. Обратно, за произволен полином $g \in k\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right]$ от обща степен d определяме i-тата хомогенизация като

$$g^{[i]}(x_0, \ldots, x_n) := x_i^d g\left(\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

и забелязваме, че $g^{[i]}$ е хомогенен полином на $x_0, \ldots, x_n$ от степен d. Произволен хомогенен полином $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$ се анулира в точка $a \in U_i$ тогава и само тогава, когато i-тата му дехомогенизация $f_{[i]}$ се анулира в $a_{[i]}$, съгласно $f_{[i]}(a_{[i]}) = a_i^{-\deg(f)} f(a_0, \ldots, a_n)$. За произволно крайно множество $S \subset k[x_0, \ldots, x_n]_h$ от хомогенни полиноми означаваме с $S_{[i]}$ множеството на i-тите дехомогенизации на елементите на S получаваме,че $\varphi_i(V_{\mathbb{P}^n}(S) \cap U_i) = V(S_{[i]})$. Обратно, полином $g \in k\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right]$ се анулира в $a_{[i]}$ точно когато i-тата му хомогенизация се анулира в a, защото $g^{[i]}(a) = a_i^{\deg(g)} g(a_{[i]})$. Ако $T \subset k\left[\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}\right]$ е крайно множество от полиноми и $T^{[i]}$ е множеството на i-тите хомогенизации на елементите на T, то $\varphi_i^{-1} V(T) = V_{\mathbb{P}^n}(T^{[i]}) \cap U_i$, Q.E.D.

Задача 4.17. *Нека*

$$\varphi_0 : U_0 = \{x \in \mathbb{P}^2(k) \ \ | \ \ x_0 \neq 0\} \longrightarrow k^2,$$

$$\varphi_0([x_0 : x_1 : x_2]) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$$

е афинният координатен хомеоморфизъм на U_0, *а*

$$C = \left\{(y_1, y_2) \in k^2 \ \ \middle| \ \ y_2^2 = \sum_{i=0}^{2m+1} a_i y_1^i\right\}$$

е афинна крива, $a_i \in k$, $a_{2m+1} \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$. *Да се докаже, че Зариски затворената обвивка* $\overline{\varphi_0^{-1}(C)}$ *на* $\varphi_0^{-1}(C) \subset U_0$ *в* $\mathbb{P}^2(k)$ *се получава от* $\varphi_0^{-1}(C)$ *чрез присъединяване на единствена точка* $\infty \in \mathbb{P}^2(k)$ *и да се намери точката* ∞.

Задача 4.18. *Нека*

$$\varphi_0 : U_0 = \{x \in \mathbb{P}^3(k) \ \ | \ \ x_0 \neq 0\} \longrightarrow k^3,$$

$$\varphi_0([x_0 : x_1 : x_2 : x_3]) = \left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \frac{x_3}{x_0}\right)$$

е афинният координатен хомеоморфизъм на U_0, *а*

$$X = \{(y_1, y_2, y_3) \in k^3 \ \ | \ \ y_1^3 y_2 - y_1 y_2^3 - y_1^3 - 2y_1 y_2\}$$

е афинна повърхнина. Да се докаже, че Зариски затворената обвивка $\overline{\varphi_0^{-1}(X)} = \varphi_0^{-1}(X) \cup H_1 \ldots \cup H_4$ *на* $\varphi_0^{-1}(X) \subset U_0$ *в* $\mathbb{P}^3(k)$ *се получава от* $\varphi_0^{-1}(X)$ *чрез присъединяване на четири проективни хиперравнини* $H_i \simeq \mathbb{P}^2(k)$ *и да се намерят уравнения на* $H_1, \ldots, H_4$.

Задача 4.19. *Дадени са проективната повърхнина*

$$X = V_{\mathbb{P}^3}(x_1^2x_2x_3 - x_1x_2^2x_3 - x_0x_1x_2x_3 + x_0x_2x_3^2) \subset \mathbb{P}^3(k)$$

и афинните координатни хиперравнини $H_i = \{x \in \mathbb{P}^3(k) \mid x_i = 0\} \simeq \mathbb{P}^2(k)$ *за* $0 \leq i \leq 3$. *Да се докаже, че:*
(i) съществува проективна повърхнина $Y \subset \mathbb{P}^3(k)$, *така че* $X = H_2 \cup H_3 \cup Y$;
(ii) сечението $Y \cap H_0$ *се състои от две проективни прави, пресичащи се в единствена точка, а сечението* $X \cap H_0$ *се състои от четири проективни прави;*
(iii) сечението $Y \cap H_1$ *се състои от две проективни прави, пресичащи се в единствена точка, а сечението* $X \cap H_1$ *се състои от три проективни прави. Да се намерят уравнения на проективните прави, образуващи* $X \cap H_0$ *и* $X \cap H_1$, *както и пресечните точки на всевъзможните двойки различни проективни прави от* $X \cap H_0$ *и от* $X \cap H_1$.

4. Проективен вариант на Теоремата на Hilbert за нулите

Следствие 4.20. *Ако* k *е алгебрично затворено поле и* $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ *е хомогенен идеал, то*

$$I_h V_{\mathbb{P}^n}(I_h) = r(I).$$

В частност, ако $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ *е хомогенен идеал в полиномиален пръстен* $k[x_0, \ldots, x_n]$ *над алгебрично затворено поле* k, *то и радикалът му* $r(I) \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ *е хомогенен идеал.*

Доказателство: Теорема 3 на Hilbert за нулите дава

$$IV(I) = r(I).$$

Ако $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ е хомогенен идеал, то $V_{\mathbb{P}^n}(I_h) = \Pi(V(I) \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ за проекцията $\Pi : k^{n+1} \setminus \{(0, \ldots, 0)\} \to \mathbb{P}^n(k)$. Достатъчно е да докажем, че $I_h V_{\mathbb{P}^n}(I_h) = IV(I)$. От една страна, $I_h V_{\mathbb{P}^n}(I_h) \subseteq IV(I)$, защото всеки хомогенен полином $f \in k[x_0, \ldots, x_n]$, който се анулира върху проективното алгебрично множество $V_{\mathbb{P}^n}(I_h) = \Pi(V(I) \setminus \{(0, \ldots, 0)\}$ се анулира върху кониката $V(I)$. За обратното включване $IV(I) \subseteq I_h V_{\mathbb{P}^n}^{(} I_h)$ да забележим, че афинното алгебрично множество $V(I) \subseteq k^{n+1}$ на хомогенния идеал $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ е коника по Лема 4.2 (ii). Ако в доказателството на Лема 4.2 (i) изберем $f \in IV(I)$, получаваме, че идеалът $IV(I) \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ е хомогенен за произволна коника $V(I) \subseteq k^{n+1}$ над алгебрично затворено поле k. Хомогенният идеал $IV(I)$ се съдържа в идеала $I_h V_{\mathbb{P}^n}(I_h)$, защото всеки хомогенен полином $f \in IV(I)$ се анулира върху $V_{\mathbb{P}^n}(I_h)$ и принадлежи на пораждащите на $I_h V_{\mathbb{P}^n}(I_h)$. Това доказва $I_h V_{\mathbb{P}^n}(I_h) = IV(I) = r(I)$, Q.E.D.

Задача 4.21. *Без да се използва проективния вариант на Теоремата на Hilbert за нулите - Следствие 4.20, да се докаже, че радикалът* $r(I)$ *на хомогенен идеал* $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ *е хомогенен идеал.*

Упътване: Допуснете, че $r(I)$ не е хомогенен идеал и изберете полином $f = \sum\limits_{j=0}^{d} f^{(j)} \in r(I)$ с $f^{(d)} \notin r(I)$. Ако $f^m \in I$ за някое $m \in \mathbb{N}$, разгледайте хомогенната компонента на f^m от степен md.

Следствие 4.22. *Ако k е алгебрично затворено поле, то проективните алгебрични множества $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ са във взаимно еднозначно съответствие с хомогенните радикални идеали $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$, различни от $\mathfrak{M}_o = \langle x_0, \ldots, x_n \rangle$.*

Доказателство: Ако $X = V_{\mathbb{P}^n}(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ с $f_1, \ldots, f_m \in k[x_0, \ldots, x_n]_h$ е проективно алгебрично множество, то хомогенният му идеал $I_h(X) \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ е радикален. По-точно, Следствие 4.20 и Лема 4.13 дават

$$I_h(X) = I_h V_{\mathbb{P}^n}(I_h(X))_h = r(I_h(X)),$$

така че $I_h(X)$ е радикален идеал.
Обратно, на произволен радикален идеал $I = r(I) \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$ съпоставяме проективното алгебрично множество $V_{\mathbb{P}^n}(I_h) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$.
Описаните съответствия са взаимно обратни, съгласно $V_{\mathbb{P}^n}(I_h(X)_h) = X$ за проективно алгебрично множество $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ и $I_h V_{\mathbb{P}^n}(I_h) = r(I) = I$ за хомогенен радикален идеал $I \triangleleft k[x_0, \ldots, x_n]$.
При определяне на хомогенен идеал на проективно алгебрично множество изключихме хомогенния идеал $\mathfrak{M}_o$ от разглеждане, за да имаме еднозначно определен хомогенен идеал на празното проективно алгебрично множество, Q.E.D.

Следствие 4.23. *Ако k е алгебрично затворено поле и $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ са проективни алгебрични множества, то*

$$I_h(X \cap Y) = r(I_h(X) + I_h(Y)).$$

Доказателство: Съгласно Лема 4.13 можем да представим $X = V_{\mathbb{P}^n}(I_h(X)_h)$, $Y = V_{\mathbb{P}^n}(I_h(Y)_h)$. Следователно

$$X \cap Y = V_{\mathbb{P}^n}(I_h(X)_h) \cap V_{\mathbb{P}^n}(I_h(Y)_h) = V_{\mathbb{P}^n}((I_h(X) + I_h(Y))_h),$$

вземайки предвид Лема 4.8 (i). Идеалът $I_h(X) + I_h(Y)$ е хомогенен, така че можем да приложим Следствие 4.20 и да получим

$$I_h(X \cap Y) = I_h V_{\mathbb{P}^n}((I_h(X) + I_h(Y))_h) = r(I_h(X) + I_h(Y)),$$

Q.E.D.

5. Неприводими проективни алгебрични множества или проективни многообразия

Да напомним, че топологично пространство X е неприводимо, ако във всяко представяне $X = Z_1 \cup Z_2$ като обединение на затворени подмножества $Z_i \subseteq X$ имаме $X = Z_1$ или $X = Z_2$.

Определение 4.24. *Проективните алгебрични множества, които са неприводими относно топологията на Зариски се наричат проективни многообразия.*

За да характеризираме неприводимите проективни алгебрични множества чрез техните прости хомогенни идеали ни е нужна следната

Лема 4.25. *Ако I е хомогенен идеал в $k[x_0, \ldots, x_n]$, то идеалът I е прост тогава и само тогава, когато за произволни хомогенни полиноми*

$$f(x_0, \ldots, x_n), g(x_0, \ldots, x_n) \in k[x_0, \ldots, x_n]$$

с $f(x_0, \ldots, x_n) g(x_0, \ldots, x_n) \in I$ е в сила $f(x_0, \ldots, x_n) \in I$ или $g(x_0, \ldots, x_n) \in I$.

Доказателство: Необходимостта на условието следва от определението за прост идеал.

Да допуснем, че за произволни хомогенни полиноми $f(x_0,\dots,x_n)$ и $g(x_0,\dots,x_n)$ от $k[x_0,\dots,x_n]$ с $fg\in I$ следва $f\in I$ или $g\in I$, но идеалът I не е прост. Тогава съществуват полиноми $F,G\in k[x_0,\dots,x_n]$ с $FG\in I$, $F\not\in I$, $G\not\in I$. Ако

$$F=\sum_{i=0}^{m}F^{(i)} \quad \text{и} \quad G=\sum_{j=0}^{n}G^{(j)}$$

са разлаганията на F и G в сума от хомогенни компоненти, без ограничение на общността можем да предполагаме, че $F^{(m)}\not\in I$ и $G^{(n)}\not\in I$. В противен случай, $F_1:=F-F^{(m)}$ има произведение $F_1G=FG-F^{(m)}G\in I$ и можем да разглеждаме F_1 и G вместо F и G. Хомогенната компонента от максимална степен

$$(FG)^{(m+n)}=\left[\left(\sum_{i=0}^{m}F^{(i)}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}G^{(j)}\right)\right]^{(m+n)}=F^{(m)}G^{(n)}\in I$$

принадлежни на I, защото $FG\in I$ и I е хомогенен идеал. По предположение, от $F^{(m)}G^{(n)}\in I$ за хомогенните полиноми $F^{(m)}$ и $G^{(n)}$ следва $F^{(m)}\in I$ или $G^{(n)}\in I$. Противоречието доказва твърдението, Q.E.D.

Твърдение 4.26. *Проективното алгебрично множество $V_{\mathbb{P}^n}(S)\subseteq\mathbb{P}^n(k)$ с $S\subseteq k[x_0,\dots,x_n]_h$ е проективно многообразие тогава и само тогава, когато хомогенният идеал $I_h(V_{\mathbb{P}^n}(S))\lhd\overline{k}[x_0,\dots,x_n]$ е прост.*

Доказателство: Да допуснем, че $X=V_{\mathbb{P}^n}(S)\subseteq\mathbb{P}^n(k)$ е неприводимо проективно алгебрично множество, чийто хомогенен идеал $I_h(X)\lhd k[x_0,\dots,x_n]$ не е прост. Съгласно Лема 4.25, съществуват хомогенни полиноми $f(x_0,\dots,x_n)$ и $g(x_0,\dots,x_n)$ от $k[x_0,\dots,x_n]\setminus I_h(X)$ с $fg\in I_h(X)$. Твърдим, че

$$X_1:=V_{\mathbb{P}^n}(f)\not\supseteq V_{\mathbb{P}^n}I_h(X)=X,\quad X_2:=V_{\mathbb{P}^n}(g)\not\supseteq V_{\mathbb{P}^n}I_h(X)=X,$$

защото предположението $X_1\supseteq X$ води до $f|_X=0$, откъдето $f\in I_h(X)$, противно на избора на $f\not\in I_h(X)$. От друга страна, $V_{\mathbb{P}^n}(fg)\supseteq V_{\mathbb{P}^n}I_h(X)=X$, съгласно Лема 4.10 (ii). Прилагаме Лема 4.8 (ii) и получаваме

$$X=V_{\mathbb{P}^n}(fg)\cap X=(V_{\mathbb{P}^n}(f)\cup V_{\mathbb{P}^n}(g))\cap X=(X_1\cap X)\cup(X_2\cap X).$$

Подмножествата $X_1\cap X$ и $X_2\cap X$ на X са затворени и различни от X съгласно $X\not\subseteq X_1$, $X\not\subseteq X_2$. Това противоречи на неприводимостта на X и доказва простотата на хомогенния идеал на неприводимо проективно алгебрично множество.

Обратно, нека $X\subseteq\mathbb{P}^n(k)$ е проективно алгебрично множество с прост хомогенен идеал $I_h(X)\lhd k[x_0,\dots,x_n]$ и $X=Z_1\cup Z_2$ за Зариски затворени $Z_i\subsetneq X$. Тогава

$$I_h(X)=I_h(Z_1\cup Z_2)=I_h(Z_1)\cap I_h(Z_2)$$

съгласно Лема 4.8 (ii) и $I_h(Z_i)\supsetneq I_h(V)$ за $1\le i\le 2$. По-точно, от $Z_i\subseteq X$ следва $I_h(Z_i)\supseteq I_h(X)$ и предположението $I_h(Z_i)=I_h(X)$ води до $Z_i=V_{\mathbb{P}^n}I_h(Z_i)=V_{\mathbb{P}^n}I_h(X)=X$, което противоречи на допускането за приводимост на X. Избираме хомогенни полиноми $f_i\in I_h(Z_i)\setminus I_h(X)$ и забелязваме, че $f_1f_2\in I_h(Z_i)\cap I_h(Z_2)=I_h(V)$. Това противоречи на простотата на идеала $I_h(X)$ и доказва неприводимостта на проективните алгебрични множества X с прост хомогенен идеал $I_h(X)$, Q.E.D.

Всеки неразложим хомогенен полином $f\in k[x_0,\dots,x_n]$ поражда прост идеал $\langle f\rangle\lhd k[x_0,\dots,x_n]$. Следващият пример илюстрира съществуването на неразложими хомогенни полиноми $f,g\in k[x_0,\dots,x_n]$, за които идеалът $\langle f,g\rangle$ не е прост.

Пример 4.27. *(i) Съществуват неприводими проективни алгебрични множества $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ и $Y \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ с приводимо сечение $X \cap Y$.*
(ii) Съществуват неразложими хомогенни полиноми $f, g \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$, за които идеалът $\langle f, g\rangle \lhd \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$ не е прост.

Доказателство: (i) Достатъчно е да забележим, че неприводимата елиптична крива

$$X = V_{\mathbb{P}^2}(x_2^2x_0 - x_1^3 + x_1x_0^2) = \{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid x_2^2x_0 = x_1^3 - x_1x_0^2\}$$

и проективната права $Y = V_{\mathbb{P}^2}(x_1) \simeq \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ имат приводимо сечение

$$X \cap Y = \{[0 : 0 : 1], \quad [1 : 0 : 0 :]\}.$$

(ii) Хомогенните полиноми

$$f(x_0, x_1, x_2) = x_2^2x_0 - x_1^3 + x_1x_0^2, \quad g(x_0, x_1, x_2) = x_1 \in \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$$

са неразложими, така че хомогенните идеали $\langle f\rangle$ и $\langle g\rangle$ в $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$ са прости, а оттам и радикални, $r(\langle f\rangle) = \langle f\rangle$, $r(\langle g\rangle) = \langle g\rangle$. Проективните алгебрични множества $X = V_{\mathbb{P}^2}(f)$ и $Y = V_{\mathbb{P}^2}(g)$ са неприводими. Тяхното сечение $X \cap Y = \{[0 : 0 : 1], \quad [1 : 0 : 0]\}$ е приводимо, така че хомогенният идеал $I_h(X \cap Y)$ не е прост. Съгласно Следствие 4.23 и Следствие 4.20 - Проективна форма на Теоермата на Хилберт за нулите имаме

$$I_h(X \cap Y) = r(I_h(X) + I_h(Y)) = r(I_hV_{\mathbb{P}^2}(f) + I_hV_{\mathbb{P}^2}(g)) =$$
$$= r(r(\langle f\rangle) + r(\langle g\rangle)) = r(\langle f\rangle + \langle g\rangle) = r(\langle f, g\rangle).$$

Ако идеалът $\langle f, g\rangle$ беше прост, то и $r(\langle f, g\rangle) = \langle f, g\rangle$ щеше да е прост. Противоречието доказва, че идеалът $\langle f, g\rangle \lhd \mathbb{C}[x_0, x_1, x_2]$, породен от неразложимите хомогенни полиноми $f = x_2^2x_0 - x_1^3 + x_1x_0^2$ и $g = x_1$ не е прост, Q.E.D.
От простотата на нулевия хомогенен идеал в областта $k[x_0, \dots, x_n]$ следва неприводимостта на проективното пространство $\mathbb{P}^n(k)$.

Задача 4.28. *Да се докаже, че проектиивните алгебрични множества*

$$X = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \;\middle|\; x_2^2x_0^{2n-1} + \sum_{i=0}^{2n+1} a_ix_1^ix_0^{2n+1-i} = 0\right\}$$

и

$$X = \left\{[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \;\middle|\; x_2^3x_0^{3n-2} + \sum_{i=0}^{3n+1} a_ix_1^ix_0^{3n+1-i} = 0\right\}$$

са неприводими.

По аналогия с Твърдение 1.45 получаваме следното

Твърдение 4.29. *Следните условия са еквивалентни за проективно алгебрично множество $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$:*
(i) X е неприводимо, т.е. X е проективно многообразие;
(ii) всеки две непразни Зариски отворени подмножества $U, V \subset X$ имат непразно сечение $U \cap V \neq \emptyset$;
(iii) всяко непразно Зариски отворено подмножество U на X е навсякъде гъсто в X.

Твърдение 4.30. *(i) Ако $W \subseteq k^n \simeq U_i \subset \mathbb{P}^n(k)$ е неприводимо афинно алгебрично множество, то Зариски затворената обвивка $\overline{W} \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$ в $\mathbb{P}^n(k)$ е неприводимо проективно алгебрично множество.*
(ii) Ако $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ е неприводимо проективно алгебрично множество,

$$U_i = \{x = [x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid x_i \neq 0\}$$

е стандартно афинно отворено подмножество на $\mathbb{P}^n(k)$ и сечението $V \cap U_i \neq \emptyset$ не е празно, то $V \cap U_i \subseteq U_i \simeq k^n$ е неприводимо афинно афинно алгебрично множество.

Доказателство: (i) Трябва да проверим неприводимостта на Зариски затворената обвивка $\overline{W} \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ относно топологията на Зариски върху $\mathbb{P}^n(k)$. Да допуснем, че $\overline{W} = Z_1 \cup Z_2$ за Зариски затворени подмножества $Z_j \subset \mathbb{P}^n(k)$. Тогава

$$W = (Z_1 \cap W) \cup (Z_2 \cap W)$$

за Зариски затворените подмножества $Z_j \cap W$ на W. Съгласно Твърдение 4.16, индуцираната от $\mathbb{P}^n(k)$ топология на Зариски върху $W \subseteq U_i \simeq k^n$ съвпада с топологията на Зариски, индуцирана от k^n. Сега от неприводимостта на W имаме $W = Z_1 \cap W$ или $W \subset Z_1$. Следователно Зариски затворената обвивка $\overline{W} \subseteq \overline{Z_1} = Z_1$ или $\overline{W} = Z_1$ и $\overline{W}$ е неприводимо относно топологията на Зариски върху $\mathbb{P}^n(k)$.

(ii) Ще докажем, че ако $V \subset \mathbb{P}^n(k)$ е неприводимо проективно алгебрично множество, а $U \subset \mathbb{P}^n(k)$ е Зариски отворено подмножество с непразно сечение $V \cap U \neq \emptyset$, то сечението $V \cap U$ е неприводимо, Зариски гъсто, Зариски отворено подмножество на V. Разглеждаме разлагането

$$V = (V \cap U) \cup (V \setminus U)$$

и неговата проективна Зариски затворена обвивка

$$V = \overline{V} = \overline{(V \cap U)} \cup (V \setminus U),$$

вземайки предвид, че $V \setminus U$ е Зариски затворено. Съгласно неприводимостта на V, оттук следва $\overline{V \cap U} = V$ или $V = V \setminus U$. Но условието $V = V \setminus U$ е еквивалентно на $V \cap U = \emptyset$, така че $V = \overline{V \cap U}$ и $V \cap U$ е Зариски гъсто във V. Да представим $V \cap U = Z_1 \cup Z_2$ като обединение на относително затворени подмножества $Z_j \subseteq V \cap U$ относно проективната топология. По определение, $Z_j = V_j \cap U$ за Зариски затворени подмножества $V_j \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. Затворената обвивка

$$V = \overline{V \cap U} = \overline{(V_1 \cap U)} \cup \overline{(V_2 \cap U)} = V_1 \cup V_2,$$

така че $V \equiv V_j$ за $j = 1$ или $j = 2$, съгласно неприводимостта на проективното затворено множество $V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$. Оттук $Z_j = V_j \cap U = V \cap U$ и $V \cap U$ е неприводимо Зариски отворено подмножество на V относно проективната топология. В частност, стандартните афинни отворени подмножества $U_i \subset \mathbb{P}^n(k)$ пресичат V в неприводими относно проективната топология подмножества. Съгласно Твърдение 4.16, проективната топология върху $V \cap U_i$ съвпада с афинната топология, индуцирана от хомеоморфизма $U_i \simeq k^n$, така че $V \cap U_i$ е неприводимо афинно алгебрично подмножество на $U_i \simeq k^n$, Q.E.D.

Задача 4.31. *Да се намери проективната обвивка $\overline{W}$ на афинното многообразие*

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^2 = x^3 + x\} \subset \mathbb{C}^2.$$

6. Разлагане на алгебрично множество в крайно обединение на неприводими компоненти

Твърдение-Определение 4.32. *Произволно афинно или проективно алгебрично множество X се представя като крайно обединение*

$$X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$$

на неприводими афинни алгебрични подмножества $X_i \subseteq X$ или афинни многообразия X_i, които се наричат неприводими компоненти на X.

Доказателство: Да допуснем противното и да изберем алгебрично множество X, което не може да се представи като крайно обединение на неприводими афинни алгебрични подмножества. Тогава X не е неприводимо, така че може да се представи като обединение $X = X_1 \cup X_1'$ на собствени алгебрични подмножества $X_1 \subsetneqq X$ и $X_1' \subsetneqq X$. Поне едното от X_1 или X_1' не е крайно обединение от неприводими алгебрични подмножества, защото в противен случай X ще се окаже крайно обединение от неприводими алгебрични множества. За определеност да предположим, че X_1 не е крайно обединение на неприводими алгебрични множества. Повтаряйки горното разсъждение получаваме представяне $X_1 = X_2 \cup X_2'$ в обединение на собствени алгебрични подмножества $X_2 \subsetneqq X_1$ и $X_2' \subsetneqq X_1$, така че X_2 не се представя като крайно обединение от неприводими алгебрични множества. Продължавайки по същия начин построяваме безкрайна строго намаляваща редица

$$X \supsetneqq X_1 \supsetneqq X_2 \supsetneqq \ldots \supsetneqq X_n \supsetneqq X_{n+1} \supsetneqq \ldots$$

от Зариски затворени подмножества на k^n, съответно на $\mathbb{P}^n(k)$. Допълненията $U_i = X \setminus X_i$ на X_i са Зариски отворени подмножества, образуващи строго растяща редица

$$U_1 \subsetneqq U_2 \subsetneqq \ldots \subsetneqq U_n \subsetneqq U_{n+1} \subsetneqq \ldots.$$

Това противоречи на ньотеровостта на топологията на Зариски и доказва, че всяко афинно или проективно алгебрично множество се представя като крайно обединение на неприводими алгебрични подмножества, Q.E.D.
За да имаме единственост на разлагането на алгебрично множество в крайно обединение на неприводими компоненти, трябва да се ограничим с така наречените несъкратими разлагания.

Определение 4.33. *Разлагането $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ на афинно афинно алгебрично множество $X \subseteq k^n$ в крайно обединение от неприводими афинни алгебрични подмножества $X_i \subseteq X$ се нарича несъкратимо, ако $X_i \not\subseteq X_j$ за всички $i \neq j$.*

Твърдение 4.34. *Всяко афинно или проективно алгебрично множество X има несъкратимо разлагане $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ в крайно обединение от неприводими афинни, съответно, проективни алгебрични подмножества $X_i \subseteq X$. Всеки две несъкратими разлагания $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m = Y_1 \cup \ldots \cup Y_l$ в крайни обединения от неприводими афинни алгебрични подмножества $X_i \subseteq X$ или $Y_j \subseteq X$ съвпадат, т.е. $m = l$ и съществува пермутация $j \in Sym_m$, така че $X_i = Y_{j(i)}$ за всички $1 \leq i \leq m$.*

Доказателство: Ако $X = X_1 \cup \ldots \cup X_s$ е произволно разлагане на афинно или проективно алгебрично множество X в крайно обединение от неприводими компоненти X_i, то за всяка двойка индекси $1 \leq i \neq j \leq s$ с $X_i \subseteq X_j$ изпускаме X_i и отново получаваме разлагане на X в крайно обединение от неприводими алгебрични подмножества. Двойките индекси $1 \leq i \neq j \leq s$ са краен брой, така че след евентуално изпускане на краен брой X_i получаваме несъкратимо разлагане $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$, $m \leq s$ в обединение на краен брой неприводими алгебрични подмножества X_j.
Нека $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ и $X = Y_1 \cup \ldots \cup Y_l$ са две несъкратими разлагания на X в обединение от неприводими алгебрични подмножества X_i или Y_j. Тогава

$$X_i = X_i \cap X = X_i \cap (Y_1 \cup \ldots \cup T_{l-1} \cup Y_l) = (X_i \cap Y_1) \cup \ldots \cup (X_i \cap Y_{l-1}) \cup (X_i \cap Y_l) \quad (4.2)$$

за неприводимото алгебрично множество X_i. Твърдим, че $X_i = X_i \cap Y_{j(i)}$ за някое $1 \leq j(i) \leq l$. С индукция по l, за $l = 1$ твърдението е очевидно. Ако X_i изпълнява (4.2) и $X_i \cap Y_l \neq X_i$, то $X_i = (X_i \cap Y_1) \cup \ldots \cup (X_i \cap Y_{l-1})$, съгласно

неприводимостта на X_i. По индукционно предположение, оттук следва $X_i = X_i \cap Y_{j(i)}$ за някое $1 \leq j(i) \leq l-1$.
От $X_i = X_i \cap Y_{j(i)}$ за някое $1 \leq j(i) \leq l$ получаваме $X_i \subseteq Y_{j(i)}$. Разменяме ролите на двете разлагания и с аналогични разглеждания получаваме съществуването на индекс $1 \leq k(j(i)) \leq m$ с $Y_{j(i)} \subseteq X_{k(j(i))}$. В резултат, $X_i \subseteq X_{k(j(i))}$. Съгласно несъкратимостта на разлагането $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$, оттук следва $k(j(i)) = i$ и $X_i = Y_{j(i)}$.
Различните помежду си неприводими алгебрични множества $X_1, \ldots, X_m$ съвпадат съответно с различните помежду си неприводими алгебрични множества $Y_{j(1)}, \ldots, Y_{j(m)}$, така че $m \leq l$. Аналогични разсъждения след размяна на ролите на двете разлагания дават $l \leq m$, откъдето $l = m$. Още повече, множествата $X_1, \ldots, X_m$ съвпадат съответно с множествата $Y_{j(1)}, \ldots, Y_{j(m)}$, получени от $Y_1, \ldots, Y_m$ чрез прилагане на пермутацията $j \in Sym(m)$, Q.E.D.
Нека k е алгебрично затворено поле, а $I \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ е идеал в пръстена на полиномите на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от k. Тогава радикалът $r(I) = \cap_{I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$ е сечение на простите идеали $\mathfrak{p} \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$, съдържащи I. Да предположим, че идеалът I е радикален, така че $I = \cap_{I \subseteq \mathfrak{p}} \mathfrak{p}$. Нека $V(I) = Z_1 \cup \ldots \cup Z_m$ е несъкратимото разлагане на афинното алгебрично множество $V(I) \subseteq k^n$ в крайно обединение на неприводими компоненти. Многообразията $Z_1, \ldots, Z_m$ са точно максималните неприводими Зариски затворени подмножества на $V(I)$. Твърдение 4.34 установява съществуването на краен брой максимални неприводими Зариски затворени подмножества $Z_1, \ldots, Z_m$ на $V(I)$, така че $V(I) = Z_1 \cup \ldots \cup Z_m$ се представя като тяхно обединение. Максималните неприводими Затриски затворени подмножества $Z_i \subseteq V(I)$ отговарят на минималните прости идеали $I(Z_i)$ в $k[x_1, \ldots, x_n]$, съдържащи $IV(I) = r(I) = I$. Идеалът

$$I = r(I) = IV(I) = I(Z_1) \cap \ldots \cap I(Z_m)$$

съвпада с тяхното сечение. Следователно за всеки радикален идеал $I \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ в полиномиален пръстен с коефициенти от алгебрично затворено поле k се съдържа в краен брой минимални прости идеали $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ в $k[x_1, \ldots, x_n]$ и съвпада със сечението им $I = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m$.
Аналогично, всеки хомогенен радикален идеал I в пръстена $k[x_0, \ldots, x_n]$ на полиномите на $x_0, \ldots, x_n$ с коефициенти от алгебрично затворено поле k се съдържа в краен брой хомогенни минимални прости идеали $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_m$ и съвпада със сечението им $I = \mathfrak{p}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{p}_m$.

Задача 4.35. *Дадени са полиномите*

$$f_1(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0 - x_1 + x_2 - x_3)(x_0 + 2x_1 + x_2 + x_3),$$
$$f_3(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0^2 + x_1^2)(x_0 + 2x_1 + x_2 + x_3),$$
$$f_2(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0 - x_1 + x_2 - x_3)(x_0^3 + 2x_0^2 x_2 + x_0^2 x_3),$$
$$f_4(x_0, x_1, x_2, x_3) = (x_0^2 + x_1^2)(x_0^3 + 2x_0^2 x_2 + x_0^2 x_3)$$

с комплексни коефициенти. Да се докаже, че проективното алгебрично множество $X = V_{\mathbb{P}^3}(f_1, \ldots, f_4) \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, *определено от тези полиноми се разлага в обединение на четири неприводими компоненти* $X = X_1 \cup \ldots \cup X_4$. *Да се докаже, че съществуват две двойки пресичащи се неприводими компоненти на* X *и четири двойки непресичащи се неприводими компоненти на* X.