Глава 12

Теорема на Chow за алгебричност на аналитичните подпространства на $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$.

Навсякъде в този въпрос работим над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа. Отворените подмножества $U \subseteq \mathbb{C}^n$ са относно метричната топология върху $\mathbb{C}^n$.

Определение 12.1. *Подмножеството X на отворена околност $U \subset \mathbb{C}^n$ е аналитично подпространство, ако за всяка точка $p \in X$ съществуват отворена околност U_p и холоморфни функции $f_j : U_p \to \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq m$, така че*

$$X \cap U_p = \{x \in U_p \ \mid \ f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0\}.$$

Подмножеството $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ е аналитично подпространство, ако за $\forall 0 \leq i \leq n$ с $X \cap U_i \neq \emptyset$ сечението $X \cap U_i$ е аналитично подпространство на стандартното афинно отворено подмножество

$$U_i = \{[x_0 : \ldots : x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \ \mid \ x_i \neq 0\} \simeq \mathbb{C}^n.$$

Всяко проективно алгебрично множество $V_{\mathbb{P}^n}(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, зададено с хомогенни полиноми $f_i \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]^{(d_i)}$ от степен $d_i \in \mathbb{N}$ е аналитично подпространство на $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, защото полиномите на $\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}$ са холоморфни функции на $\frac{x_0}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}$.

Теорема 9. (Chow) *Произволно комплексно аналитично подпространство $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ е проективно алгебрично множество $X = V_{\mathbb{P}^n}(f_1, \ldots, f_m)$, зададено с хомогенни полиноми $f_j \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]^{(d_j)}$ от степен d_j.*

Ще изложим идеята за доказателство на тази теорема, като използваме наготово някои факти за комплексно аналитични пространства.

Определение 12.2. *Точката p на аналитично подпространство $X \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$ е гладка, ако съществуват околност $U_p \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$ на p и холоморфни функции $f_1, \ldots, f_{n-d} : U_p \to \mathbb{C}$, така че*

$$X \cap U_p = \{x \in U_p \ \mid \ f_1(x) = \ldots = f_{n-d}(x) = 0\}$$

и

$$\mathrm{rk}\frac{\partial(f_1, \ldots, f_{n-d})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(p) = n - d.$$

Нека $p \in X^{\mathrm{smooth}}$ е гладка точка на аналитично подпространство $X \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$ и $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-d})}{\partial(x_1,\ldots,x_{n-d})}(p)$ е обратима $(n-d)\times(n-d)$-матрица. Полагаме $x' = (x_1, \ldots, x_{n-d})$ и $x'' = (x_{n-d+1}, \ldots, x_n)$ за $\forall x = (x', x'') \in \mathbb{C}^n$. По теоремата за неявната функция съществуват околности $p' \in U' \subseteq \mathbb{C}^{n-d}$, $p'' \in U'' \subseteq \mathbb{C}^d$ и холомофно изображение $g = (g_1, \ldots, g_{n-d}) : U'' \to U'$, зададено с холоморфни функции $g_i : U'' \to \mathbb{C}$, така че $U' \times U'' \subseteq U_p$ и

$$X \cap (U' \times U'') = \{(g(x''), x'') \ \mid \ x'' \in U''\}.$$

По този начин, в околност на гладка точка $p \in X^{\mathrm{smooth}}$ комплексно аналитичното пространство X е d-мерно комплексно многообразие.

Ще обясним накратко защо всяко комплексно аналитично пространство $X \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$ има гладка точка. Ще работим с индукция по n. Аналитичните подпространства $X \subsetneq \mathbb{C}$ са изолирани точки. Те могат да се задават с уравнения $x_1 - p_1 = 0$ за някакви $p_1 \in \mathbb{C}$ и са винаги гладки. С индукция по n, избираме нетъждествено нулева холоморфна функция $f_1 : U_1 \to \mathbb{C}$ върху околност $U_1 \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$, така че f_1 се анулира върху $X \cap U_1 \neq \emptyset$. Ако $\operatorname{grad}(f_1) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \right)|_{X \cap U_1} \equiv 0$ се анулира тъждествено върху $X \cap U_1$, избираме минималното естествено число $k \in \mathbb{N}$ с $\frac{\partial^k f_1}{\partial x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}}|_{X \cap U_1} \not\equiv 0$ и $k = k_1 + \ldots k_n$. След евентуална преномерация на $x_1, \ldots, x_n$ можем да считаме, че $k_1 \geq 1$ и да разгледаме мулти-индекса $l = (k_1 - 1, k_2, \ldots, k_n)$. Тогава

$$g_1 := \frac{\partial^l f_1}{\partial x_1^{k_1 - 1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}}|_{X \cap U_1} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial g_1}{\partial x_1}|_{X \cap U_1} \not\equiv 0.$$

Следователно $M = \{x \in U_1 \mid g_1(x) = 0\}$ е $(n-1)$-мерно комплексно многообразие след евентуално свиване на U_1, така че $\frac{\partial g_1}{\partial x_1}$ да не се анулира върху M. По построение, $X \cap U_1 \subseteq M$. Съгласно теоремата за неявната функция съществуват околност $p_1 \in U' \subseteq \mathbb{C}$, $p'' = (p_2, \ldots, p_n) \in U'' \subseteq \mathbb{C}^n$ на $p = (p_1, p'') \in X \cap U_1$ и холоморфна функция $\varphi : U'' \to U'$, така че $U' \times U'' \subseteq U_1$ и $M \cap (U' \times U'') = \{(\varphi(x''), x'') \mid x'' \in U''\}$. Сега $X \cap U_1$ е аналитично подпространство на $(n-1)$-мерното многообразие M и можем да разглеждаме $X \cap U_1$ като аналитично подпространство на $U'' \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$. По индукционно предположение, всяко аналитично подпространство на $U'' \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$ има гладка точка p''. Тогава

$$X \cap (U' \times U'') = \{(\varphi(x''), x'') \mid x'' \in U'', \ \ g_2(x'') = \ldots = d_{n-d}(x'') = 0\}$$

за холоморфни функции $g_j : U'' \to \mathbb{C}$ с $\operatorname{rk} \frac{\partial(g_2, \ldots, g_{n-d})}{\partial(x_2, \ldots, x_n)}(p'') = n - d - 1$. Непосредствено се вижда, че матрицата

$$\frac{\partial(x_1 - \varphi(x''), g_2, \ldots, g_{n-d})}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)}(p'') = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(p) & \ldots & \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(p) \\ 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(p) & \ldots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(p) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \frac{\partial g_{n-d}}{\partial x_2}(p) & \ldots & \frac{\partial g_{n-d}}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

е от ранг $n - d$ и $p = (\varphi(p''), p'') \in X^{\text{smooth}} \cap U_1$.
Доказателството на теоремата на Chow използва следния критерий за аналитичност на подмножество $X \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$.

Теорема 10. *Нека $U \subseteq \mathbb{C}^n$ е отворено подмножество, $X \subseteq U$. В такъв случай, X е аналитично подпространство на U тогава и само тогава, когато X е затворено в U, разлага се в обединение $X = X^{(d)} \cup X^{(d-1)} \cup \ldots \cup X^{(0)}$ на i-мерни комплексни многообразия $X^{(i)}$ и затворените обвивки*

$$\overline{X^{(i)}} \subseteq X^{(i)} \cup \ldots \cup X^{(0)}$$

на $X^{(i)}$ съдържат само комплексни многообразия с размерност $\leq i$.

За да обясним необходимостта на формулираното условие да разгледаме аналитично подпространство $X \subseteq U$ с локално крайно разлагане $X = \cup_{i \in I} X_i$ в неприводими компоненти X_i. Локалната крайност на разлагането следва от ньотеровостта на индуцираната топология върху отворените подмножества с компактна затворена обвивка. Гладките точки X_i^{smooth} на X_i образуват d_i-мерно

многообразие $X_i^{\text{smooth}} = X_i^{(d_i)}$. Особените точки $X_i^{\text{sing}} = X_i \setminus X_i^{\text{smooth}}$ са собствено аналитично подмножество на X_i. Следователно $(X_i^{\text{sing}})^{\text{smooth}} = (X_i)^{(c_i)}$ е комплексно многообразие с размерност $c_i < d_i$. Продължавайки по същия начин представяме всяка неприводима компонента X_i като обединение на комплексни многообразия и получаваме $X = X^{(d)} \cup \ldots \cup X^{(0)}$ за някое $d \in \mathbb{Z}$, $d \geq 0$. Аналитичните подпространства $X \subseteq U$ са затворени поради непрекъснатостта на холоморфните функции. Поради дискретност на 0-мерните комплексни многообразия имаме $\overline{X^{(0)}} = X^{(0)}$. За $\forall 1 \leq i \leq d$ твърдим, че $\overline{X^{(i)}} \setminus X^{(i)} \subseteq X^{(i-1)} \cup x^{(i-2)} \cup \ldots \cup X^{(0)}$, защото $X^{(i)} \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$ се задава с $n-i$ холоморфни уравнения, а $\overline{X^{(i)}} \setminus X^{(i)}$ се задава с поне $n-i+1 = n-(i-1)$ холоморфни уравнения. Следователно $\overline{X^{(i)}} \setminus X^{(i)}$ се състои от комплексни многообразия с размерност $\leq i-1$.
За достатъчността на условието за аналитичност, дадено в Теорема 10 да забележим, че ако $X \subseteq U$ е затворено и $X = X^{(d)} \cup X^{(d-1)} \cup \ldots \cup X^{(0)}$ е обединение на комплексни многообразия с размерност $\leq d$, то $X = \overline{X} = \overline{X^{(d)}} \cup \overline{X^{(d-1)}} \cup \ldots \cup \overline{X^{(1)}} \cup X^{(0)}$ е комплексно аналитично пространство, стига затворените обвивки $\overline{X^{(i)}}$ на $X^{(i)}$ в U да са комплексно аналитични подпространства на U. След като докажем теоремата на Chow, използвайки Теорема 10 ще обясним аналитичността на $\overline{X^{(i)}} \subseteq U$ с индукция по $i \geq 0$. По-точно, ако $X_1 = X^{(i-1)} \cup \ldots \cup X^{(0)} \subset U \subseteq \mathbb{C}^n$ е аналитично подпространство, което се разлага в обединение на комплексни мнгогообразия с размерност $< i$, а $X^{(i)} \subseteq U \setminus X_1$ е аналитично подпространство на $U \setminus X_1$ и комплексно многообразие с размерност i, чиято затворена обвивка $\overline{X^{(i)}} \subseteq X^{(i)} \cup X_1$ се съдържа в обединението на $X^{(i)}$ с X_1, то $\overline{X^{(i)}}$ е аналитично подпространство на U.
Доказателство на Теорема 9 на Chow: Нека $X \subseteq \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ е аналитично подпространсво. Холоморфната проекция

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{C}),$$

$$\pi(x_0, x_1, \ldots, x_n) = [x_0 : x_1 : \ldots : x_n]$$

издърпва X в комплексно аналитично подпространство $\pi^{-1}(X) \subseteq \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$. Твърдим, че затворената обвивка $Z = \overline{\pi^{-1}(X)} = \pi^{-1}(X) \cup \{0^{n+1}\} \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ на $\pi^{-1}(X)$ в $\mathbb{C}^{n+1}$ е комплексно аналитично подпространство. За целта ще приложим Теорема 10 към затвореното подмножество $X = \overline{\pi^{-1}(X)} \subset \mathbb{C}^{n+1}$. Ако аналитичното подпространство $X = X^{(d)} \cup X^{(d-1)} \cup \ldots \cup X^{(0)}$ е обединение на комплексни многообразия с размерност $\leq d$, то

$$\pi^{-1}(X) = \pi^{-1}(X^{(d)}) \cup \pi^{-1}(X^{(d-1)}) \cup \ldots \cup \pi^{-1}(X^{(0)})$$

е обединение на комплексни многообразия $\pi^{-1}(X^{(i)}) = Z^{(i+1)}$ с размерност $i+1$. Следователно $Z = Z^{(d+1)} \cup Z^{(d)} \cup \ldots \cup Z^{(1)} \cup \{0^{n+1}\}$ е обединение на комплексни многообразия с размерност $\leq d+1$. Ясно е, че затворената обвивка $\overline{\{0^{n+1}\}} = \{0^{n+1}\}$. За $\forall 1 \leq i \leq d+1$ затворената обвивка

$$\overline{Z^{(i)}} \cap (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}) \subseteq Z^{(i)} \cup Z^{(i-1)} \cup \ldots \cup Z^{(1)}$$

на $Z^{(i)}$ в $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$ се съдържа в обединение на комплексни многообразия с размерност $\leq i$, съгласно аналитичността на $\pi^{-1}(X)$ в $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$. Следователно

$$\overline{Z^{(i)}} = [\overline{Z^{(i)}} \cap (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\})] \cup \{0^{n+1}\} \subseteq Z^{(i)} \cup Z^{(i-1)} \cup \ldots \cup Z^{(1)} \cup \{0^{n+1}\}.$$

Съгласно Теорема 10, $Z = \pi^{-1}(X) \cup \{0^{n+1}\}$ е аналитично подпространство на $\mathbb{C}^{n+1}$.

По определение, съществува достатъчно малко реално $\varepsilon > 0$ и холоморфни функции $f_j : B(0^{n+1}, \varepsilon) \to \mathbb{C}$, $1 \leq j \leq l$ в отвореното кълбо

$$B(0^{n+1}, \varepsilon) = \left\{ x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \quad \Big| \quad \sum_{i=0}^{n} |x_i|^2 < \varepsilon \right\}$$

с център в началото и радиус ε, така че

$$Z \cap B(0^{n+1}, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{C}^{n+1} \quad | \quad f_1(x) = \ldots = f_l(x) = 0\}.$$

Да означим с $\overline{\Delta}^* = \{\lambda \in \mathbb{C} \quad | \quad 0 < |\lambda| \leq 1\}$ затворения единичен диск в $\mathbb{C}$ с премахнат център $0 \in \mathbb{C}$. Тогава за $\forall x \in B(0^{n+1}, \varepsilon)$ и за $\forall \lambda \in \overline{\Delta}^*$ е в сила $\lambda x \in B(0^{n+1}, \varepsilon)$. Аналитичното подпространство $Z = \pi^{-1}(X) \cup \{0^{n+1}\}$ е обединение на $\mathbb{C}^*$-орбити, така че за $\forall x \in Z$ и $\forall \lambda \in \overline{\Delta}^*$ е изпълнено $\lambda x \in Z$. Следователно за $\forall x \in B(0^{n+1}, \varepsilon) \cap Z$ и $\forall \lambda \in \overline{\Delta}^*$ имаме $\lambda x \in B(0^{n+1}, \varepsilon) \cap Z$. По този начин, от $f_j(x) = 0$ за $1 \leq j \leq l$ следва $f_j(\lambda x) = 0$ за $\forall \lambda \in \overline{\Delta}^*$ и $\forall 1 \leq j \leq l$. Можем да считаме, че кълбото $B(0^{n+1}, \varepsilon)$ е с достатъчно малък радиус $\varepsilon > 0$, така че всяка холоморфна функция $f_j : B(0^{n+1}, \varepsilon) \to \mathbb{C}$ се представя със сходящ Тейлъров ред с център 0^{n+1}. Разглеждаме Тейлъровия ред на $f_j(x)$ като безкрайна сума $f_j(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_j(x)^{(i)}$ на хомогенни полиноми $f_j(x)^{(i)} \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]^{(i)}$ от степен $i \geq 1$. Условието $f_j(\lambda x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i f_j(x)^{(i)} = 0$ за $\forall \lambda \in \overline{\Delta}^*$ е изпълнено тогава и само тогава, когато всяка хомогенна компонента $f_j(x)^{(i)} = 0$ на $f_j(x)$ се анулира в x. Това следва от $\frac{d^i f(\lambda x)}{d\lambda^i}|_{\lambda=0} = 0$. Следователно $Z \cap B(0^{n+1}, \varepsilon) \subseteq V \cap B(0^{n+1}, \varepsilon)$ за афинния конус

$$V := V(f_j^{(i)} \quad | \quad 1 \leq j \leq l, \quad i \in \mathbb{N})$$

с център 0^{n+1}. Обратното включване следва от $f_j = \sum_{i=1}^{\infty} f_j^{(i)}$ за $\forall 1 \leq j \leq l$. Това дава съвпадението $Z \cap B(0^{n+1}, \varepsilon) = V \cap B(0^{n+1}, \varepsilon)$ на аналитичното подпространство $Z \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$ с афинния конус V в достатъчно малък диск $B(0^{n+1}, \varepsilon)$ с център 0^{n+1}. Благодарение на $\mathbb{C}^*$-инвариантността на Z и V оттук получаваме, че $Z = V$. По-точно, ако $x \in Z$, то съществува $\lambda \in \mathbb{C}^*$ с достатъчно малък модул $|\lambda| \in \mathbb{R}^{>0}$, така че $\lambda x \in Z \cap B(0^{n+1}, \varepsilon) = V \cap B(0^{n+1}, \varepsilon)$. Оттук следва, че $\lambda x \in V$ и $x = \lambda^{-1}(\lambda x) \in V$, съгласно $\mathbb{C}^*$-инвариантността на V. Аналогични разсъждение доказват $V \subseteq Z$, а оттам и $V = Z$. Следователно

$$X = \pi(Z \setminus \{0^{n+1}\}) =$$

$$= \pi(V(f_j^{(i)} \quad | \quad 1 \leq j \leq l, \quad i \in \mathbb{N}) \setminus \{0^{n+1}\}) = V_{\mathbb{P}^n}(f_j^{(i)} \quad | \quad 1 \leq j \leq l, \quad i \in \mathbb{N})$$

е проективното алгебрично множество, зададено с хомогенните полиноми $f_j^{(i)} \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]^{(i)}$ от степен $i \in \mathbb{N}$. Това завършва доказателството на Теорема 9 на Chow.

Определение 12.3. *Непрекъснатото изображение на топологични пространства $f : X \to Y$ е собствено, ако всяко компактно подмножество $K \subseteq Y$ има компактен праобраз $f^{-1}(K) \subseteq X$.*

Твърдим, че непрекъснатото изображение $f : X \to Y$ на подпространства на $X \subseteq \mathbb{C}^m$, $Y \subseteq \mathbb{C}^n$ е собствено тогава и само тогава, когато всичките му слоеве $f^{-1}(y)$, $y \in f(X)$ са компактни. Необходимостта на това условие следва от компактността на точка. Нека всички слоеве на $f : X \to Y$ са компактни и $K \subseteq Y$ е компактно подмножество. За $\forall y \in f(X) \cap K$ с компактен слой $f^{-1}(y) \subset X$ съществува отворено кълбо B върху X с достатъчно голум радиус, което съдържа $f^{-1}(y)$. Избираме достатъчно малка околност $y \in V_u \subseteq V$ на

y, така че $f^{-1}(z) \subset B$ за $\forall z \in V_y$. По теоремата на Heine-Borel, $f^{-1}(V_y \cap K)$ е компактно подмножество на X като затворено подмножество на ограниченото кълбо B. Покриваме $K = \cup_{y \in K}(K \cap V_y)$ с околности $K \cap V_y$ и избираме крайно подпокритие $K = \cup_{i=1}^{s}(K \cap V_{y_i})$. Праобразът $f^{-1}(K) = \cup_{i=1}^{s} f^{-1}(K \cap V_{y_i})$ е компактен като крайно обединение на компактни множества $f^{-1}(K \cap V_{y_i})$ и изображението $f : X \to Y$ е собствено.
В обяснението на Теорема 10 ще използваме следното

Твърдение 12.4. *Нека $p : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^n$ е линейно изображение с максимален ранг n, а $0^{n+m} \in U \subseteq \mathbb{C}^{n+m}$ и $0^n \in V \subseteq \mathbb{C}^n$ са отворени околности с $p(U) \subseteq V$. Ако $X \subset U$ е аналитично подпространство и ограничението $p : X \to p(X)$ е собствено изображение, то p е крайно и образът му $p(X) \subset V$ е аналитично подпространство на V.*

Доказателство: Достатъчно е да докажем твърдението за линейното изображение $p : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$, изпускащо една координата. По-точно, всяко линейно изображение $p : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^n$ с $p(U) \subseteq V$ за $0^{n+m} \in U \subseteq \mathbb{C}^{n+m}$, $0^n \in V \subseteq \mathbb{C}^n$ се разлага в композиция

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{n+m} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p_1"'] & \mathbb{C}^n \\ \mathbb{C}^{n+m-1} \arrow[ur, "p_2"'] & \end{tikzcd} \quad \text{с} \quad \begin{tikzcd} U \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p_1"'] & V \\ p_2^{-1}(V) \arrow[ur, "p_2"'] & \end{tikzcd} ,$$

където

$$p_1 : \mathbb{C}^{n+m} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+m-1},$$

$$p_1(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}, x_{n+m}) = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1})$$

е изпускането на последната координата, а

$$p_2 : \mathbb{C}^{n+m-1} \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

$$p_2(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m-1}) = (x_1, \ldots, x_n)$$

е изпускането на последните $m-1$ координати. Тук $p_2^{-1}(V) \subseteq \mathbb{C}^{n+m-1}$ е отворена околност на $0^{n+m-1} \in \mathbb{C}^{n+m-1}$ като праобраз на отвореното подмножество $V \subseteq \mathbb{C}^n$ под действие на непрекъснатото изображение p_2. Непосредствено се проверява, че от $p(U) = p_2 p_1(U) \subseteq V$ следва $p_1(U) \subseteq p_2^{-1}(V)$. Ограничението на $p = p_2 p_1$ върху аналитичното подпространство $X \subseteq U$ дава комутативната диаграма

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p_1"'] & p(X) \\ p_1(X) \arrow[ur, "p_2"'] & \end{tikzcd} .$$

По предположение, $p : X \to p(X)$ е собствено изображение. Това е еквивалентно на компактността на слоевете $p^{-1}(y)$ на $p : X \to p(X)$ за $\forall y = p(x) \in p(X)$, $x \in X$. Ако $p_1(x) = x_1$, то слоят

$$p_1^{-1}(x_1) = \{z \in X \ \mid \ p_1(z) = p_1(x) = x_1\} \subseteq \{z \in X \ \ p(z) = p(x) = y\} = p^{-1}(y)$$

на $p_1 : X \to p_1(X)$ е затворено подмножество на слоя на $p : X \to p(X)$, така че $p_1^{-1}(x_1)$ е компактно за $\forall x_1 \in p_1(X)$ и $p_1 : X \to p_1(X)$ е собствено изображение. По-нататък, слоят

$$p_2^{-1}(y) = p_2^{-1}(p_2 p_1(x)) = \{p_1(z) \ \mid \ z \in p^{-1}(y)\}$$

е образ на компакта $p^{-1}(y)$ под действие на непрекъснатото изображение $p_2 : p_1(X) \to p(X)$, така че $p_2|_{p_1(X)}$ има компактни слоеве и е собствено изображение. Ако сме доказали твърдението за изпускането $p_1 : \mathbb{C}^{n+m} \to \mathbb{C}^{n+m-1}$ на една координата, то собственото изображение $p_1 : X \to p_1(X)$ е крайно и образът му $p_1(X) \subseteq p_2^{-1}(V)$ е аналитично подпространство. С индукция по броя на изпуснатите координати, ако допуснем, че собственото изображение $p_2 : p_1(X) \to p(X)$ е крайно и $p_2 p_1(X) = p(X) \subset V$ е аналитично подпространство, то композицията $p = p_2 p_1 : X \to p(X)$ на крайните изображения $p_1 : X \to p_1(X)$ и $p_2 : p_1(X) \to p(X)$ е крайно изображение $p : X \to p(X)$.
Ядрото на линейното изображение $p : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^n$ е комплексната права $p^{-1}(0^n)$. За произволна точка $y = p(x) \in p(X)$ слоят $X \cap p^{-1}(y)$ на $p : X \to p(X)$ е аналитично подпространство на правата $p^{-1}(y) \simeq \mathbb{C}$ през y, успоредна на $\ker(p) = p^{-1}(0^n)$. Ако изображението $p : X \to p(X)$ е собствено, аналитичното подпространство $X \cap p^{-1}(y)$ на $p^{-1}(y)$ е компактно и се състои от краен брой изолирани точки. Това следва от дискретността на собствените аналитични подпространства на $\mathbb{C}$ и некомпактността на $\mathbb{C}$. Следователно $p : X \to p(X)$ е крайно изображение. Ако $p : X \to p(X)$ е m-листно в обща точка $y \in p(X)$, то $p^{-1}(y) \cap X = \{x^{(1)}, \dots, x^{(m)}\} \subset X$. Избираме взаимно непресичащи се отворени околности $x^{(i)} \in U_i \subseteq X$ и достатъчно малка отворена околност $y \in V \subseteq p(X)$, така че $X \cap p^{-1}(V) \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_m$. Разлагаме $X \cap p^{-1}(V) = \cup_{i=1}^m (X \cap p^{-1}(V) \cap U_i)$ в обединение на аналитични подпространства $X \cap p^{-1}(V) \cap U_i$ и забелязваме, че $p(X \cap p^{-1}(V)) = \cup_{i=1}^m p(X \cap p^{-1}(V) \cap U_i)$ е аналитично подпространство на V, стига $p(X \cap p^{-1}(V) \cap U_i) \subset V$ да е аналитично подпространство на V за $\forall 1 \leq i \leq m$. Да обърнем внимание, че точката $y \in p(X \cap p^{-1}(V) \cap U_i)$ има единствен праобраз $p^{-1}(y) \cap X \cap U_i = \{x^{(i)}\}$ под действие на $p : X \cap p^{-1}(V) \cap U_i \to p(X \cap p^{-1}(V) \cap U_i)$.
Остава да докажем, че ако X е аналитично подпространство на околност $0^{n+1} \in U \subseteq \mathbb{C}^{n+1}$, $p : X \to p(X) \subseteq V$ е крайно изображение в околност $0^n \in V \subseteq \mathbb{C}^n$ и $p^{-1}(0^n) = \{0^{n+1}\}$, то $p(X)$ е аналитично подпространство на V. След евентуално свиване на U и X можем да предполагаме, че

$$X = \{x \in U \ \mid \ f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_s(x)\}$$

е множеството на общите нули на s холоморфни функции $f_j : U \to \mathbb{C}$. След евентуална линейна смяна на променливите твърдим, че $f_1(0^n, x_{n+1}) \not\equiv 0$. В противен случай, от $f_1 \not\equiv 0$ следва съществуването на точка $(a, a_{n+1}) \in U \setminus V(f_1)$. Ако $(z, z_{n+1}) = (z_1, \dots, z_n, z_{n+1})$ са били старите холоморфни координати върху U, правим линейна смяна на променливите $(z, z_{n+1}) \mapsto (x, x_{n+1})$, така че $x_j(z_1, \dots, z_{n+1})$ са хомогенни линейни полиноми за $\forall 1 \leq j \leq n+1$ и $x_1(a, a_{n+1}) = \dots = x_n(a, a_{n+1}) = 0$, $x_{n+1}(a, a_{n+1}) = 1$. Тогава $f_1(0^n, x_{n+1}) \not\equiv 0$ спрямо новите холоморфни координати $(x, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$. Сега можем да приложим Подготвителната теорема на Weierstrass и да представим $f_1 = u g_1$ като произведение на холоморфна и неанулираща се в околност на $0^{n+1} \in \mathbb{C}^{n+1}$ функция u и полином на Weierstrass

$$g_1 = x_{n+1}^d + c_{d-1}(x) x_{n+1}^{d-1} + \dots + c_1(x) x_{n+1} + c_0(x)$$

от степен d. По-точно, g_1 е полином на x_{n+1}, чиито коефициенти $c_i(x)$ са холоморфни в околност на $0^n \in \mathbb{C}^n$ функции с $c_i(0^n) = 0$. По теоремата на Weierstrass за деление, за $\forall 2 \leq i \leq s$ съществуват полином

$$g_i = b_{i,d-1}(x) x_{n+1}^{d-1} + b_{i,d-2}(x) x_{n+1}^{d-2} + \dots + b_{i,1}(x) x_{n+1} + b_{i,0}(x)$$

на x_{n+1} от степен $< d$, чиито коефициенти $b_{i,j}(x)$ са холоморфни в околност на $0^n \in \mathbb{C}^n$ функции и холоморфна в околност на $0^{n+1} \in \mathbb{C}^{n+1}$ функция φ_i, така че

$$f_i = f_1 \varphi_i + g_i.$$

След евентуално свиване на U и X можем да предполагаме, че

$$X = \{(x, x_{n+1}) \in U \quad | \quad g_1(x, x_{n+1}) = g_2(x, x_{n+1}) = \ldots = g_s(x, x_{n+1}) = 0\}$$

е множеството на общите нули на $g_1, g_2, \ldots, g_m$ върху U. Ако $(a, a_{n+1}) \in X$, то за произволни $t_2, \ldots, t_s \in \mathbb{C}$ полиномите $g_1(a, x_{n+1})$ и $\sum\limits_{i=2}^{s} t_i g_i(a, x_{n+1})$ имат общ корен $x_{n+1} = a_{n+1}$. Следователно резултантата им

$$R\left(g_1(a, x_{n+1}), \sum_{i=2}^{s} t_i g_i(a, x_{n+1})\right) = 0$$

се анулира за $\forall t_2, \ldots, t_s \in \mathbb{C}$. Да напомним, че разглежданата резултанта е полином от степен $\deg_{x_{n+1}}(g_1) = d$ относно коефициентите на $\sum\limits_{i=2}^{s} t_i g_i(a, x_{n+1})$. Следователно

$$R\left(g_1(a, x_{n+1}), \sum_{i=2}^{s} t_i g_i(a, x_{n+1})\right) = \sum_{\alpha=(\alpha_2,\ldots,\alpha_s), |\alpha| = \sum\limits_{i=2}^{s} \alpha_i = d} t_2^{\alpha_2} \ldots t_s^{\alpha_s} r_\alpha(a)$$

е хомогенен полином на $t_2, \ldots, t_s$, чиито коефициенти $R_\alpha(a)$ са холоморфни в околност на $0^n \in \mathbb{C}^n$ функции. Сега $\sum\limits_{\alpha} t_2^{\alpha_2} \ldots t_s^{\alpha_s} R_\alpha(a) = 0$ за $\forall t_2, \ldots, t_s \in \mathbb{C}$ води до $R_\alpha(a) = 0$ за $\forall \alpha = (\alpha_2, \ldots, \alpha_s) \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^{s-1}$ с $|\alpha| = \sum\limits_{i=2}^{s} \alpha_i = d$. Това следва чрез прилагане на диференциалния оператор $\frac{\partial^d}{\partial t_s^{\alpha_2} \ldots \partial t_s^{\alpha_s}}$ за фиксирани $\alpha_2, \ldots, \alpha_s$. По този начин получихме, че $p(X)$ се съдържа в аналитичното подпространство

$$Z = \{y \in V \quad | \quad R_\alpha(y) = 0 \quad \text{за} \quad \forall \alpha \quad \text{с} \quad |\alpha| = d\}.$$

За да установим аналитичността на $p(X)$ ще докажем съвпадението $p(X) = Z$. Ако $y \in Z$, то полиномите $g_1(y, x_{n+1})$ и $\sum\limits_{i=2}^{s} t_i g_i(y, x_{n+1})$ имат общ корен за произволни $t_2, \ldots, t_s \in \mathbb{C}$,защото резултантата $R\left(g_1(y, x_{n+1}), \sum\limits_{i=2}^{s} t_i g_i(y, x_{n+2})\right) = \sum\limits_{\alpha} t_2^{\alpha_2} \ldots t_s^{\alpha_s} R_\alpha(y) \equiv 0$ се анулира за $\forall t_2, \ldots, t_s \in \mathbb{C}$. Нека корените на полинома $g_1(y, x_{n+1})$ от степен d са $\gamma_1(y), \ldots, \gamma_d(y)$. За $\forall 1 \leq j \leq d$ разглеждаме множеството

$$W_j = \left\{(t_2, \ldots, t_s) \in \mathbb{C}^{s-1} \quad \middle| \quad \sum_{i=2}^{s} t_i g_i(y, \gamma_j(y)) = 0\right\}.$$

Непосредствено се проверява, че всички W_j са $\mathbb{C}$-линейни подпространства на $\mathbb{C}^{s-1}$ и обединението им $W_1 \cup \ldots \cup W_d = \mathbb{C}^{s-1}$ покрива цялото пространство $\mathbb{C}^{s-1}$. Следователно съществува индекс $1 \leq j \leq d$, така че $W_j = \mathbb{C}^{s-1}$ и $\gamma_j(y)$ е общ корен на $g_1(y, x_{n+1})$ и $\sum\limits_{i=2}^{s} t_i g_i(y, x_{n+1})$ за $\forall t_2, \ldots, t_s \in \mathbb{C}$. В частност, $g_1(y, \gamma_j(y)) = g_2(y, \gamma_j(y)) = \ldots = g_s(y, \gamma_j(y)) = 0$ и $(y, \gamma_j(y)) \in X$. Това доказва, че $y = p(y, \gamma_j(y)) \in p(X)$ и $Z \subseteq p(X)$, откъдето $Z = p(X)$ е аналитично подпространство на V, Q.E.D.

За да обясним Теорема 10 разглеждаме аналитично подпространство $X_1 = X^{(d-1)} \cup \ldots \cup X^{(0)} \subset U \subseteq \mathbb{C}^n$, съставено от комплексни многообразия с размерност $< d$ и комплексно многообразие $X^{(d)} \subset U \setminus X_1$ с размерност d, което е аналитично подпространство на $U \setminus X_1$. При предположение, че затворената обвивка $\overline{X^{(d)}} \subseteq X^{(d)} \cup X_1$ на $X^{(d)}$ в U се съдържа в $X^{(d)} \cup X_1$ ще докажем, че $\overline{X^{(d)}}$ е аналитично подпространство на U. За целта ще установим съществуването на d-мерно комплексно многообразие $M^{(d)} \subseteq X^{(d)}$, което е крайно неразклонено покритие на околност на $0^d \in \mathbb{C}^d$ и допълнението $X^{(d)} \setminus M^{(d)}$ се съдържа в собствено аналитично пространство. Следователно $\overline{X^{(d)}} = \overline{M^{(d)}}$ и е достатъчно да проверим, че затворената обвивка $\overline{M^{(d)}}$ на m-листно неразклонено покритие $M^{(d)}$ на околност на $0^d \in \mathbb{C}^d$ е аналитично подпространство. Ясно е, че в случая $\overline{X^{(d)}} = X^{(d)}$ няма какво да се доказва. Отсега нататък ще предполагаме съществуването на точка $p_o \in \overline{X^{(d)}} \setminus X^{(d)} \subseteq X_1 \setminus X^{(d)}$. Без ограничение на общността можем да считаме, че $p_o = 0^n \in \overline{X^{(d)}} \setminus X^{(d)} \subseteq X_1 \setminus X^{(d)}$. Избираме околност $0^n \in U \subseteq \mathbb{C}^n$. Ако $X^{(d)} \cup X_1 = U$, то $d = n$ и достатъчно малка околност върху $X^{(d)}$ е 1-листно покритие на околност на $0^d \in \mathbb{C}^d$. Ако $X^{(d)} \cup X_1 \subsetneq U$, то избираме точка $q \in U \setminus (X^{(d)} \cup X_1$ и разглеждаме правата l в $\mathbb{C}^n$ през 0^n и q. Сеченията $X_1 \cap l \subsetneq U \cap l$ и $X^{(d)} \cap l \subsetneq U \cap l$ са собствени поради наличието на точка q от $U \cap l$ извън X_1 и $X^{(d)}$.

Собственото аналитично подпространство $X_1 \cap l$ на отворената околност $U \cap l \subseteq l \simeq \mathbb{C}$ е дискретно подмножество. Ако изберем околност $U_1 \subsetneq U$ със затворена обвивка $\overline{U_1} \subset U$, то дискретното подмножество $X_1 \cap \overline{U_1} \cap l$ на компакта $\overline{U_1} \cap l$ е крайно, така че $X_1 \cap U_1 \cap l$ е крайно. След подходящо свиване на U можем да предполагаме, че $X_1 \cap U \cap l = \{0^n\}$. Собственото подмножество $X^{(d)} \cap l \subsetneq U \cap l$ се съдържа в $(U \cap l) \setminus (U \cap l \cap X_1) = (U \cap l) \setminus \{0^n\}$, съгласно $X^{(d)} \subseteq U \setminus X_1$. Отворените подмножества $U_1 \subseteq (U \cap l) \setminus \{0^n\}$ могат да съдържат 0^n в затворената си обвивка, така че $X^{(d)} \cap U \cap l$ е дискретно подмножество на $(U \cap l) \setminus \{0^n\}$ и има единствена гранична точка $0^n \in U \cap l$. Тук използваме предположенията $\overline{X^{(d)}} \subseteq X^{(d)} \cup X_1$ и $\overline{X^{(d)}} \setminus X^{(d)} \neq \emptyset$, за да твърдим, че $(\overline{X^{(d)}} \setminus X^{(d)}) \cap U \cap l \subseteq (X_1 \cap U \cap l) \setminus X^{(d)} = \{0^n\}$. Без ограничение на общността считаме, че $U \cap l = \Delta(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ |z| < 1\}$ е единичния диск в $\mathbb{C}$. Тогава холоморфната функция

$$e^{2\pi i z} : H = \{z \in \mathbb{C} \ \mid \ Im(z) > 0\} \longrightarrow \Delta(0,1)^* = \Delta(0,1) \setminus \{0\}$$

издръпва аналитичното подпространство $X^{(d)} \cap U \cap l \subset (U \cap l) \setminus \{0^n\} = \Delta(0,1)^*$ в аналитично подпространство на горната полуравнина H. Понеже

$$H = \cup_{N \in \mathbb{N}} \overline{N(0,N)} \cap H$$

се покрива от изброимо много компактни подмножества, всяко от които има крайно сечение с издърпването на $X^{(d)} \cap U \cap l$, сечението $X^{(d)} \cap U \cap l$ е изброимо. Забелязваме също, че $\overline{X^{(d)}} \cap U \cap l = (X^{(d)} \cup \{0^n\}) \cap U \cap l = (X^{(d)} \cup X_1) \cap U \cap l$ е компактно като затворено подмножество на ограничената околност $U \cap l$ на $l \simeq \mathbb{C}$. Следователно линейната проекция $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$, чието ядро $\ker(p) = l$ съвпада с разглежданата права има компактен слой $p^{-1}(0^{n-1}) \cap (X^{(d)} \cup X_1) \cap U$. Твърдим, че $p : (X^{(d)} \cup X_1) \cap U \to p(X^{(d)} \cup X_1) \cap U)$ е собствено изображение в околност на 0^{n-1}. С други думи, ако централният слой $p^{-1}(0^{n-1}) \cap (X^{(d)} \cup X_1) \cap U$ на p е компактен, то съществува околност $0^{n-1} \in V \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$, в която всички слоеве $p^{-1}(v) \cap (X^{(d)} \cup X_1) \cap U$, $v \in V$ са компактни. От $X^{(d)} \cup X_1 \subseteq \overline{X^{(d)} \cup X_1} = \overline{X^{(d)}} \cup \overline{X_1} = \overline{X^{(d)}} \cup X_1 \subseteq X^{(d)} \cup X_1$ следва затвореността на $X^{(d)} \cup X_1$. Следователно $p^{-1}(v) \cap (X^{(d)} \cup X_1) \cap U$ са затворени подмножества на $p^{-1}(v) \cap U \subseteq p^{-1}(v) \simeq \mathbb{C}$. След линейна смяна на координатите можем да предполагаме, че правата $\ker(p) = p^{-1}(0^{n-1}) = 0^{n-1} \times \mathbb{C} \subset \mathbb{C}^n$ съвпада с последната координатна ос в $\mathbb{C}^n$. Влагаме $\mathbb{C}^{n-1}$ в $\mathbb{C}^n$ като множеството от точки $\mathbb{C}^{n-1} \times 0 \subset \mathbb{C}^n$. Тогава за всяка точка v от околност $0^{n-1} \in V \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$ слоят

$$p^{-1}(v) = p^{-1}(0^{n-1}) + (v, 0)$$

е транслация на ядрото $\ker(p) = p^{-1}(0^{n-1})$ на $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$. За произволна околност $0^n \in U \subseteq \mathbb{C}^n$, сеченията $p^{-1}(v) \cap U$ са околности върху $p^{-1}(v) \simeq \mathbb{C}$. За достатъчно малка околност $0^{n-1} \in V \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$, множеството $p^{-1}(V) \cap U = \cup_{v \in V}(p^{-1}(v) \cap U) = \cup_{v \in V}[p^{-1}(0^{n-1}) + (v, 0)] \cap U$ е ограничено и затворените подмножества $p^{-1}(v) \cap (X^{(d)} \cup X_1) \cap U \subseteq p^{-1}(v) \cap U$ са компактни. Това доказва, че ако линейна проекция $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$ с 1-мерно ядро има един компактен слой върху затворено подмножество $S \subset \mathbb{C}^n$, то в достатъчно малка околност на 0^{n-1} върху $\mathbb{C}^{n-1}$ слоевете на p в S са компактни и ограничението върху така получената околност на S е собствено изображение.

Ограничението $p : X_1 \cap U \to Y_1 = p(X_1 \cap U)$ върху аналитичното подпространство $X_1 \cap U$ на U е крайно и има аналитичен образ $Y_1 = p(X_1 \cap U$. Ограничението $p : X^{(d)} \setminus p^{-1}(Y_1) \to Y^{(d)} := p(X^{(d)} \setminus p^{-1}(Y_1))$ също е крайно и има аналитичен образ, съгласно аналитичността на $X^{(d)} \setminus p^{-1}(Y_1)$ в $U \setminus X_1$. Слоевете на

$$p : (X^{(d)} \cup X_1) \cap U \to p((X^{(d)} \cup X_1) \cap U)$$

са изброими, защото слоевете на $p : X_1 \cap U \to Y_1$ са крайни, а централният слой на $p : X^{(d)} \cap U \to p(X^{(d)} \cap U)$ е изброим. Подмножествата $Y_1 \subseteq V \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$ и $Y^{(d)} \subseteq V \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$ изпълняват свойствата на X_1 и $X^{(d)}$. По-точно, $Y_1 \subseteq V \subseteq \mathbb{C}^{n-1}$ е аналитично подпространство, което е обединение на комплексни многообразия с размерност $< d$, $Y^{(d)} \subset V \setminus Y_1$ е комплексно аналитично подпространство на $V \setminus Y_1$, което е d-мерно комплексно многообразие и $\overline{Y^{(d)}} \subseteq Y^{(d)} \cup Y_1$.

Продължаваме по същия начин проектирането по протежение на прави, докато образът съдържа отворена околност на $0^m \in \mathbb{C}^m$, в случай че последното проектиране е било върху $\mathbb{C}^m$. Всяка проекция с 1-мерно ядро има изброими слоеве върху съответните образи на $X^{(d)} \cup X_1$, така че композицията π на тези проекции изобразява $X^{(d)}$ в d-мерно аналитично пространство. Това доказва, че $d = m$ и имаме проекция $\pi : X^{(d)} \cup X_1 \to \pi(X^{(d)} \cup X_1)$ върху околност на $0^d \in \mathbb{C}^d$. По построение, $\pi = (f_1, \ldots, f_d)$ е наредена d-торка от афинно линейни функции. За произволна точка $(b_1, \ldots, b_d)$ от околност V на 0^d върху $\mathbb{C}^d$, системата линенийни уравнения

$$\left| \begin{array}{l} f_1(x_1, \ldots, x_n) = b_1 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots \\ f_d(x_1, \ldots, x_n) = b_d \end{array} \right. \tag{12.1}$$

има решение в $X^{(d)} \cup X_1$. Ако $f_i(x_1, \ldots, x_n) = l_i(x_1, \ldots, x_n) - a_i$ за хомогенни линейни полиноми $l_i(x_1, \ldots, x_n)$ и $a_i \in \mathbb{C}$, то за произволна точка $(b_1, \ldots, b_d) \in V$ векторът $(a_1 + b_1, \ldots, a_d + b_d)$, съставен от свободните членове на (12.1) е в линейната обвивка на вектор-стълбовета на матрицата от коефициенти $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_d)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}$, съгласно Теоремата на Руше. Оттук получаваме, че рангът на матрицата $\frac{\partial(f_1, \ldots, f_d)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \in M_{d \times n}(\mathbb{C})$ е равен на d.

Остава да обясним комплексната аналитичност на $\overline{M^{(d)}} = \overline{X^{(d)}}$. Избираме точка $x \in M^{(d)}$ с $\pi(x) = y$ и забелязваме, че праобразът

$$\pi^{-1}(y) = \{x^{(1)}(y) = x, x^{(2)}(y), \ldots, x^{(m)}(y)\}$$

се състои от m точки, които зависят холоморфно от y в достатъчно малка околност на y. За произволен хомогенен линеен полином $l(x) = l(x_1, \ldots, x_n)$, стойностите $l(x^{(j)}(y))$ са локълни холоморфни функции на y, както и елементарните симетрични полиноми $\sigma_i(y)$, $1 \leq i \leq m$ на $l(x^{(1)}(y)), \ldots, l(x^{(m)}(y))$. Твърдим, че $\sigma_i(y)$ се продължават до холоморфни функции върху околност V на 0^d върху $\mathbb{C}^d$. За целта да напомним, че $(X^{(d)} \cup X_1) \cap U = M^{(d)} \cup \pi^{-1}(Y_1)$, така че $V \subseteq \pi((X^{(d)} \cup X_1) \cap U) = \pi(M^{(d)}) \cup Y_1$ се съдържа в обединението на $\pi(M^{(d)})$ със собственото аналитично подпространство $Y_1 \subset V$. Функциите

$\sigma_i(y)$, $1 \leq i \leq m$ са коректно определени върху $M^{(d)}$. Съгласно Теорема на Riemann, те се продължават аналитично върху собственото аналитично подпространство $Y_1 \subset V$, стига да са локално ограничени въху Y_1. Но Y_1 е компактно и собственото изображение π издърпва Y_1 в компакт върху $X^{(d)} \cup X_1$. Непрекъснатата функция $l(x_1, \ldots, x_n)$ е ограничена върху компакта $\pi^{-1}(Y_1)$, а оттам и $\sigma_1(y), \ldots, \sigma_m(y)$ са ограничени. Това доказва холоморфната продължимост на $\sigma_i(y)$ върху V за $\forall 1 \leq i \leq m$.
За всеки хомогенен линеен полином $l(x)$ разглеждаме функцията

$$F_l(x) = l(x)^m - \sigma_1(y)l(x)^{m-1} + \ldots + (-1)^j \sigma_j(y) l(x)^{m-j} + \ldots + (-1)^m \sigma_m(y)$$

за $\forall y \in V$ и $\forall x \in \pi^{-1}(V)$. Ако $y \in \pi(M^{(d)})$, то $\pi^{-1}(y) = \{x^{(1)}(y), \ldots, x^{(m)}(y)\}$ и $F_l(x) = \prod_{i=1}^{m} [l(x) - l(x^{(i)}(y))]$. Следователно $M^{(d)}$ се съдържа в аналитичното подпространство

$$Z = \{x \in \pi^{-1}(V) \ \mid \ F_l(x) = 0 \quad \text{за} \quad \forall l\}$$

на общите нули на F_l за всички хомогенни линейни полиноми $l(x) = l(x_1, \ldots, x_n)$. Поради затвореност на аналитичното подпространство Z, затворената обвивка $\overline{M^{(d)}} \subseteq Z$. Достатъчно е да докажем, че $Z \subseteq \overline{M^{(d)}}$, за да получим, че $\overline{M^{(d)}} = Z$ е аналитично порстранство. Вместо $Z \subseteq \overline{M^{(d)}}$ ще проверим обратното включване на допълненията $\pi^{-1}(V) \setminus \overline{M^{(d)}} \subseteq \pi^{-1}(V) \setminus Z$. За целта избираме точка $x \in \pi^{-1}(V) \setminus \overline{M^{(d)}}$ и разглеждаме образа и $y = \pi(x) \in V$. Допълнението $V \setminus Y_1 = \pi(M^{(d)})$ на собственото аналитично подпространство $Y_1 \subset V$ е навсякъде гъсто във V. Следователно съществува редица $\{y_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \subset \pi(M^{(d)})$, схоняща към $\lim\limits_{\nu \to \infty} y_\nu = y$. За $\forall \nu \in \mathbb{N}$, слоят $\pi^{-1}(y_\nu) = \{x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(m)}\}$ се състои от m точки. Границите $x^{(j)} = \lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu^{(j)}$ принадлежат на затворената обвивка $\overline{M^{(d)}}$. По предположение, $x \notin \overline{M^{(d)}}$, така че $x \neq x^{(j)}$ за $\forall 1 \leq j \leq m$. Избираме хомогенен линеен полином l с $l(x) \neq l(x^{(j)})$ за $\forall 1 \leq j \leq m$. С други думи, $l(x - x^{(j)}) \neq 0$ за $\forall 1 \leq j \leq m$. Ако $H_j = \{z \in M_{1 \times n}(\mathbb{C}) \ \mid \ (x - x^{(j)})z^t = 0\}$ и $l(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ с $a_i \in \mathbb{C}$, то $a = (a_1, \ldots, a_n) \notin H_j$ за $\forall 1 \leq j \leq m$. По този начин получаваме, че $a \in \mathbb{C}^n \setminus H_j$ за $\forall 1 \leq j \leq m$, откъдето $a \in \cap_{j=1}^m (\mathbb{C}^n \setminus H_j) = \mathbb{C}^n \setminus (\cup_{j=1}^m H_j)$. От $x - x^{(j)} \neq 0^n$ следва, че $H_j \simeq \mathbb{C}^{n-1}$ и $\mathbb{C}^n \setminus (\cup_{j=1}^m H_j) \neq \emptyset$. Това доказва съществуването на хомогенен линеен полином $l(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$ с $l(x) \neq l(x^{(j)})$ за избраната точка $x \in \pi^{-1}(V) \setminus \overline{M(d)})$. Следователно $F_l(x) \neq 0$ за този линеен полином l и $x \notin Z$. Това завършва обянението на доказателството на Теорема 10.
Междувременно, направените разглеждания установяват, че всички слоеве на $\pi : \overline{M^{(d)}} \to \pi(\overline{M^{(d)}})$ се състоят от $\leq m$ точки като граници на слоеве от m точки. Оттук следва, че изображението $\pi : X^{(d)} \cup X_1 \to \pi(X^{(d)} \cup X_1)$ е крайно, защото $X^{(d)} \cup X_1 = \overline{X^{(d)}} \cup (X_1 \setminus \overline{X^{(d)}}) = \overline{M^{(d)}} \cup (X_1 \setminus M^{(d)})$, а слоевете на $\pi : \overline{M^{(d)}} \to \pi(\overline{M^{(d)}})$ и $\pi : X_1 \setminus \overline{M^{(d)}} \to \pi(X_1 \setminus \overline{M^{(d)}})$ са крайни.
Твърдим също, че $\pi : \overline{M^{(d)}} \to \pi(\overline{M^{(d)}})$ е отворено изображение. При допускане на противното съществува отворено подмножество $U \subset \overline{M^{(d)}}$, чийто образ $\pi(U)$ не е околност върху $\mathbb{C}^d$. Тогава за $x \in U$ и $y = \pi(x)$ съществува редица $\{y_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \subset \pi(\overline{M^{(d)}}) \setminus \pi(U)$ с граница $\lim\limits_{\nu \to \infty} y_\nu = y$. Ако $\pi^{-1}(y_\nu) = \{x_\nu^{(1)}, \ldots, x_\nu^{(1)}\} \subset \overline{M^{(d)}}$ и $\lim\limits_{\nu \to \infty} x_\nu^{(j)} = x^{(j)} \in \overline{M^{(d)}} \setminus U$, то слоят на $\pi : \overline{M^{(d)}} \to \pi(\overline{M^{(d)}})$ над y съдържа поне $m+1$ точки. Това са $x \in U$ и $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)} \in \overline{M^{(d)}} \setminus U$. Противоречието доказва, че $\pi : \overline{M^{(d)}} \to \pi(\overline{M^{(d)}})$ е отворено изображение.