Глава 11

Тейлъров ред в гладка точка. Допирателен конус в особена точка.

1. Норма на цяло разширение на пръстени

Ако F е поле, то изоморфизмите на пръстени $\sigma : F \to F$ се наричат автоморфизми на F. Групата на автоморфизмите на F се бележи с $Aut(F)$.

Определение 11.1. *Ако $F = E(\theta) \supset E$ е крайно, нормално, сепарабелно разширение, то групата*

$$Gal(F/E) = \{\sigma \in Aut(F) \mid \sigma(\varepsilon) = \varepsilon \quad \text{за} \quad \forall \varepsilon \in E\}$$

на автоморфизмите на F, които оставят на място всеки елемент на E се нарича група на Galois на F над E.

Ако θ е сепарабелен примитивен елемент на крайното, нормално, сепарабелно разширение $F = E(\theta) \supset E$, то $\forall \sigma \in Gal(F/E)$ се определя еднозначно от образа $\sigma(\theta)$ на θ. Минималният полином $f_\theta(x) \in E[x]$ на θ над E е от степен $\deg(f_\theta) = [F : E] = n$ и има n различни корена $\theta_1 = \theta, \theta_2, \dots, \theta_n$. За $\forall 1 \leq i \leq n$ съществува еднозначно определен автоморфизъм $\sigma_i \in Gal(F/E)$ със $\sigma_i(\theta) = \theta_i$. Следователно редът $|Gal(F/E)| = n = [F : E]$ на групата на Galois на крайното разширение $F \supset E$ съвпада със степента $[F : E] = \dim_E(F)$ на разширението $F \supset E$. Ако $F = E(\theta) \supset E$ е крайно, нормално, сепарабелно разширение, то за $\forall \alpha \in F$ определяме нормата на α над E като $Nm_E^F(\alpha) = \prod_{\sigma \in Gal(F/E)} \sigma(\alpha)$. Елементът $Nm_E^F(\alpha) \in F$ остава на място под действие на $\forall \sigma \in Gal(F/E)$, така че $Nm_E^F(\alpha)$ ппринадлежи на фиксираното подполе $F^{Gal(F/E)}$ на F относно $Gal(F/E)$. Може да се докаже, че $F^{Gal(F/E)} = E$.

Определение 11.2. *Ако $F = E(\theta) \supset E$ е крайно, нормално, сепарабелно разширение, то изображението*

$$Nm_E^F : F \longrightarrow E,$$

$$Nm_E^F(\alpha) = \prod_{\sigma \in Gal(F/E)} \sigma(\alpha) \quad \text{за} \quad \forall \alpha \in F$$

се нарича норма на F над E.

Нормата се ограничава до хомоморфизъм $Nm_E^F : (F^*, .) \to (E^*, .)$ на мултипликативните групи, защото

$$Nm_E^F(\alpha\beta) = \prod_{\sigma \in Gal(F/E)} \sigma(\alpha\beta) = \prod_{\sigma \in Gal(F/E)} \sigma(\alpha)\sigma(\beta) =$$

$$= \prod_{\sigma \in Gal(F/E)} \sigma(\alpha) \prod_{\sigma \in Gal(F/E)} \sigma(\beta) = Nm_E^F(\alpha) Nm_E^F(\beta)$$

за $\forall \alpha, \beta \in E^*$.

Лема 11.3. *Нека S е комутативна област с единица, която е цяла над своя подпръстен с единица R, R е факториална ньотерова област и полето от частни F на S е крайно, нормално, сепарабелно разширение на полето от частни E на R. Тогава нормата $Nm_E^F : F \to E$ на F над E се ограничава до изображение $Nm : S \to R$ на S в R.*

Доказателство: За произволен елемент $s \in S$ да разгледаме минималния полином $f(x) \in E[x]$ на s над E и цялата зависимост $g(x) \in R[x]$ на s над R от минимална степен. Понеже $g(x) \in E[x]$, полиномът $f(x)$ дели полинома $g(x)$ в $E[x]$. С други думи, съществува полином $h(x) \in E[x]$ с $g(x) = f(x)h(x)$. Ако $\alpha \in R$ е най-малкото общо кратно на знаменателите на коефициентите на $f(x)$, а $\beta \in R$ е най-малкото общо кратно на знаменателите на коефициентите на $h(x)$, то съществуват полиноми $f_1(x), h_1(x) \in R[x]$, така че $f(x) = \frac{f_1(x)}{\alpha}$, $h(x) = \frac{h_1(x)}{\beta}$. В резултат получаваме равенството $\alpha\beta g(x) = f_1(x)h_1(x)$ на полиноми с коефициенти от факториалната ньотерова област R. Полиномът $g(x) \in R[x]$ със старши кофициент 1 е примитивен. Ако $d(f_1), d(h_1) \in R$ са най-големите общи делители на коефициентите на $f_1, h_1 \in R[x]$, то съществуват примитивни полиноми $f_0, h_0 \in R[x]$ с $f_1(x) = d(f_1)f_0(x)$, $h_1(x) = d(h_1)h_0(x)$. Сега в

$$\alpha\beta g(x) = d(f_1)d(h_1)f_0(x)h_0(x) \tag{11.1}$$

имаме примитивни полиноми $g(x) \in R[x]$ и $f_0(x)h_0(x) \in R[x]$, така че най-големият общ делител на коефициентите на полинома от (11.1) е

$$\alpha\beta = d(f_1)d(h_1) \in R \setminus \{0\}.$$

В областта $R[x]$ от $\alpha\beta[g(x) - f_0(x)h_0(x)] = 0$ и $\alpha\beta \neq 0$ следва $g(x) = f_0(x)h_0(x)$. Старшите коефициенти $LC(f_0), LC(h_0) \in R$ на $f_0(x), h_0(x) \in R[x]$ изпълняват равенството $1 = LC(f_0)LC(h_0)$ и са обратими елементи $LC(f_0), LC(h_0) \in R^*$ на R. Следователно $f_2(x) := LC(f_1)^{-1}f_0(x) \in R[x]$ и $h_2(x) := LC(h_0)^{-1}h_0(x) \in R[x]$ са примитивни полиноми със старши коефициенти 1, изпълняващи равенството $g(x) = f_2(x)h_2(x)$. Понеже s е корен на $f_2(x) = \frac{LC(f_0)^{-1}}{d(f_1)}\alpha f(x)$, можем да разглеждаме $f_2(x)$ като цяла зависимост на s над R. Съгласно избора на $g(x)$ като цяла зависимост на s над R от минимална степен, $\deg(f_2) \geq \deg(g)$. От друга страна, $\deg(f_2) \leq \deg(g)$, защото $f_2(x)$ е делител на $g(x)$ в $R[x]$. Следователно $f_2(x)$ и $g(x)$ са полиноми от една и съща степен с корен s и старши коефициент 1, така че $h_2 = 1 \in R^*$ и $g(x) = f_2(x) = \frac{\alpha}{LC(f_0)d(f_1)}f(x)$. Понеже $f(x)$ и $f_2(x)$ имат един и същи старши коефициент 1, от $f_2(x) = \frac{\alpha}{LC(f_0)d(f_1)}f(x)$ следва $f(x) \equiv f_2(x) \equiv g(x)$.

Да означим $G = Gal(F/E)$ и $H = Stab_G(s) = \{\sigma \in G \mid \sigma(s) = s\}$. Тогава H е подгрупа на G и съществува разлагане $G/H = \cup_{i=1}^m \sigma_i H$ в непресичащо се обадинение на $m = [G : H]$ различни леви съседни класове. Да отбележим, че $\sigma_1(s), \dots, \sigma_m(s)$ са различни корени на минималния полином $f(x)$ на s над E, защото равенството $\sigma_i(s) = \sigma_j(s)$ води до $\sigma_i^{-1}\sigma_j \in H$, откъдето $\sigma_i H = \sigma_j H$ и $i = j$. Може да се докаже, че за всеки корен s_i на $f(x)$ същаствува представител σ_i на съседен клас на G по H със $\sigma_i(s) = s_i$, така че $\sigma_1(s), \dots, \sigma_m(s)$ съвпада с множеството на корените на $f(x)$. Следователно $\prod_{i=1}^m \sigma_i(s) = (-1)^m f(0) \in R$ и нормата

$$Nm_E^F(s) = \prod_{i=1}^m \sigma_i(s)^{|H|} = (-1)^{m|H|} f(0)^{|H|} \in R,$$

където $|H| \in \mathbb{N}$ е редът на стабилизатора H на s в $G = Gal(F/E)$. Това доказва, че $Nm_E^F(S) \subset R$, Q.E.D.

2. Теорема за хиперповърхнината

ТЕОРЕМА 7. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие над k, а $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ е такъв полином, че $\emptyset \subsetneq X \cap V(f) \subsetneq X$. Тогава всяка неприводима компонента Y на $X \cap V(f)$ е с размерност*

$$\dim(Y) = \dim(X) - 1.$$

Доказателство: Можем да заменим X с непразно Зариски отворено подмножество $X_o \subseteq X$, така че $X_o \cap V(f)$ да е неприводимо. По-точно, ако $X \cap V(f) = Y_1 \cup \ldots \cup Y_m$ е несъкратимото разлагане на $X \cap V(f)$ в крайно обединение на неприводими компоненти, то съществува точка $p \in Y_1 \setminus (\cup_{i=1}^m Y_i)$. Непразното Зариски отворено подмножество $W := k^n \setminus (\cup_{i=1}^m Y_i) \subseteq k^n$ пресича X в квази-афинно многообразие $X_o = X \cap W$ с

$$X_o \cap V(f) = X \cap V(f) \cap W = [Y_1 \cup (\cup_{i=1}^m Y_i)] \setminus (\cup_{i=1}^m Y_i) = Y_1 \setminus (\cup_{i=1}^m Y_i) = Y_1 \cap W.$$

Зариски отвореното подмножество $Y_1 \cap W$ на неприводимата компонента Y_1 на $X \cap V(f)$ е неприводимо.
Ако $Y = X \cap V(f)$ е квази-афинно многообразие, то можем да считаме, че полиномът $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ е неразложим. В противен случай разлагаме $f = f_1 \ldots f_s$ в крайно произведение на (необезателно различни) наразложими множители f_i и представяме

$$X \cap V(f) = X \cap V(f_1 \ldots f_s) = [X \cap V(f_1)] \cup \ldots \cup [X \cap V(f_s)]$$

като крайно обединение на Зариски затворени подмножества. Съгласно неприводимостта на $X \cap V(f)$ имаме $X \cap V(f) = X \cap V(f_i)$ за някое неразложим делител f_i на f и можем да считаме, че полиномът $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$ е неразложим.
Полиномиалният идеал на $Y = X \cap V(f)$ е

$$I(Y) = r(I(X) + IV(f)) = r(I(X) + r(\langle f \rangle)) = r(I(X) + \langle f \rangle),$$

съгласно радикалността $r(\langle f \rangle) = \langle f \rangle$ на простия идеал $\langle f \rangle \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$.
За произволни идеали $I \subseteq J$ в комутативен пръстен с единица R имаме

$$r(J)/I = r\left(J/I\right).$$

Наистина, ако $x + I \in r\left(J/I\right)$, то съществува $m \in \mathbb{N}$ с $(x+I)^m = x^m + I \in J/I$. Сега от $x^m + I = y + I$ за някое $y \in J$ получаваме, че $x^m - y \in I \subseteq J$, откъдето $x^m = (x^m - y) + y \in J$. С други думи, $x \in r(J)$ и $x + I \in r(J)/I$. Това доказва включването $r\left(J/I\right) \subseteq r(J)/I$. Обратно, ако $z \in r(J)$, то съществува $l \in \mathbb{N}$ с $z^l \in J$ и $(z+I)^l = z^l + I \in J/I$. Следователно $z + I \in R\left(J/I\right)$ и $r(J)/I \subseteq r\left(J/I\right)$. Това доказва, че $r(J)/I = r\left(J/I\right)$.
Оттук следва, че относителният идеал на Y в афинния координатен пръстен $k[X]$ на X е

$$I_X(Y) = I(Y)/I(X) = r(\langle f \rangle + I(X))/I(X) =$$
$$= r\left(\langle f \rangle + I(X)/I(X)\right) = r\left(\langle f + I(X) \rangle\right) = r(\langle \overline{f} \rangle_{K[X]}).$$

Съгласно Следствие 10.17 от Лемата на Noehter за нормализация съществува базис на трансцендентност $z_1, \ldots, z_d \in k[X]$ на $k(X)$ над k, така че $k[X]$ е цял над $k[z_1, \ldots, z_d]$ и $F = K(X)$ е крайно, нормално, сепарабелно разширение на $E = k(z_1, \ldots, z_d)$. Полиномиалният пръстен $k[z_1, \ldots, z_d]$ е факториална ньотерова комутативна област, така че по Лема 11.3, нормата Nm_E^F на F над E се ограничава до изображение $Nm_E^F : k[X] \to k[z_1, \ldots, z_d]$. В частност, $\overline{f} \in k[X]$ има норма $Nm_E^F(\overline{f}) = f_o \in k[z_1, \ldots, z_d]$. Достатъчно е да докажем, че $I_X(Y) \cap k[z_1, \ldots, z_d] = r(\langle \overline{f} \rangle) \cap k[z_1, \ldots, z_d] = r(\langle f_o \rangle)$. Тогава хомоморфизмът на пръстени $k[z_1, \ldots, z_d] \to k[X]/I_X(Y) = k[Y]$ индуцира влагане

$$k[z_1, \ldots, z_d]/I_X(Y) \cap k[z_1, \ldots, z_d] = k[z_1, \ldots, z_d]/r(\langle f_o \rangle) \hookrightarrow k[Y].$$

Хиперповърхнината $V_d(f_o) \subset k^d$ има идеал $IV_d(f_o) = r(\langle f_o \rangle)$ и афинен координатен пръстен $k[V_d(f_o)] = k[z_1, \ldots, z_d]/r(\langle f_o \rangle)$, който се влага в областта $k[Y]$ и няма делители на нулата. Следователно $V_d(f_o) \subset k^d$ е неприводима хипероповърхнина. Ако $V_d(f_o) = \emptyset$, то $IV_d(f_o) = r(\langle f_o \rangle) = k[z_1, \ldots, z_d] = I_X(Y) \cap k[z_1, \ldots, z_d]$ и $k \subseteq I(Y)$. В резултат, $Y = \emptyset$, противно на избора на $Y = X \cap V(f) \neq \emptyset$. Ако $V_d(f_o) = k^d$, то $f_o \in I(k^d) = \{0\}$. Но ненулевият елемент $\overline{f} \neq \overline{0} \in k[X]$ има ненулева норма $f_o \neq 0$, така че $\emptyset \subsetneq V_d(f_o) \subsetneq k^d$. Съгласно Следствие 9.16 (i), $\dim(V_d(f_o)) = d - 1$. Понеже $k[Y] = k[X]/I_X(Y)$ е цял над $k[V_d(f_o)] = k[z_1, \ldots, z_d]/I_X(Y)$, $\dim(Y) = \dim(V_d(f_o)) = d - 1$.
Сега ще проверим, че $I_X(Y) \cap k[z_1, \ldots, z_d] = r(\langle \overline{f} \rangle) \cap k[z_1, \ldots, z_d] = r(\langle f_o \rangle)$. Ако $g(x) \in k[z_1, \ldots, z_d][x]$ е минималният полином на $\overline{f} \in k[X] \subset k(X)$ над $k(z_1, \ldots, z_d)$ от степен $m \in \mathbb{N}$ и стабилизаторът

$$H = Stab_{Gal(F/E)}(\overline{f}) = \{\sigma \in Gal(F/E) \ \mid \ \sigma(\overline{f}) = \overline{f}\}$$

на $\overline{f}$ в групата на Galois $Gal(F/E)$ има $|H| = l$ елемента, то нормата $Nm_E^F(\overline{f}) = (-1)^{ml} g(0)^l = f_o$ се дели на $\overline{f} \in k[X]$ в $k[X]$. По-точно, по Лема 11.3, $g(x) \in k[z_1, \ldots, z_d][x]$ съвпада с цялата зависимост на $\overline{f}$ над $k[z_1, \ldots, z_d]$ от минимална степен. Корените на $g(x) = 0$ са цели над $k[z_1, \ldots, z_d]$ елементи на $k(X)$, а оттам и цели над $k[X]$. Можем да пресечем X с достатъчно малка Зариски отворена околност, така че X да се състои само от гладки точки. Тогава X е нормално квази-афинно многообразие и афинният координатен пръстен $k[X]$ е целозатворен, т.е. всички цели над $k[X]$ елементи на $k(X)$ принадлежат на $k[X]$. Тогава всички корени на $g(x) = 0$ са от $k[X]$. По формулите на Виет, $(-1)^m g(0)$ е произведението на корените на $g(x) = 0$ и се дели на $\overline{f} \in k[X]$ в $k[X]$. Следователно $f_o = (-1)^{ml} g(0)^l = f_o$ се дели на $\overline{f}$ в $k[X]$ и $f_o \in \langle \overline{f} \rangle_{k[X]}$. Оттук следва включването на идеали $\langle f_o \rangle_{k[z_1, \ldots, z_d]} \subseteq \langle \overline{f} \rangle_{k[X]}$ и включването на съответните радикали $r(\langle f_o \rangle_{k[z_1, \ldots, z_d]} \subseteq r(\langle \overline{f} \rangle_{k[X]})$. По определение, $r(\langle f_o \rangle_{k[z_1, \ldots, z_d]}$ е идеал в $k[z_1, \ldots, z_d]$ и $r(\langle f_o \rangle_{k[z_1, \ldots, z_d]} \subseteq r(\langle \overline{f} \rangle_{k[X]}) \cap k[z_1, \ldots, z_d]$. За обратното включване $r(\langle \overline{f} \rangle_{k[X]} \cap k[z_1, \ldots, z_d] \subseteq r(\langle f_o \rangle_{k[z_1, \ldots, z_d]}$ избираме $g \in r(\langle \overline{f} \rangle_{k[X]}) \cap k[z_1, \ldots, z_d]$. Тогава съществува естествено число $p \in \mathbb{N}$ с $g^p = \overline{fh}$ за някое $\overline{h} \in k[X]$. Минималният полином на $\overline{fh} \in k[z_1, \ldots, z_d]$ над $k(z_1, \ldots, z_d)$ е от степен 1 и цялата група на Galois $Gal(F/E)$ на $F = k(X)$ над $E = k(z_1, \ldots, z_d)$ стабилизира $\overline{fh}$. Ако $Gal(F/E)$ е от ред $|Gal(F/E)| = \nu$, то нормата

$$g^{p\nu} = (\overline{fh})^\nu = Nm_E^F(\overline{fh}) = Nm_E^F(\overline{f}) Nm_E^F(\overline{h}) = f_o Nm_E^F(\overline{h}) \in \langle f_o \rangle_{k[z_1, \ldots, z_d]},$$

защото $Nm_E^F(k[X]) \subseteq k[z_1, \ldots, z_d]$ по Лема 11.3. Оттук $g \in r(\langle f_o \rangle_{k[z_1, \ldots, z_d]}$ и $r(\langle \overline{f} \rangle_{k[X]}) \cap k[z_1, \ldots, z_d] \subseteq r(\langle f_o \rangle_{k[z_1, \ldots, z_d]})$. Това завършва доказателството на равенството $I_X(Y) \cap k[z_1, \ldots, z_d] = r(\langle f_o \rangle_{k[z_1, \ldots, z_d]})$ и на теоремата, Q.E.D.

Следствие 11.4. *Ако k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие и $f_1, \ldots, f_r \in k[x_1, \ldots, f_r]$ са полиноми с $X \cap V(f_1, \ldots, f_r) \neq \emptyset$, то всяка неприводима компонента Y на $X \cap V(f_1, \ldots, f_r)$ има размерност $\dim(Y) \geq \dim(X) - r$.*

Доказателство: С индукция по $r \geq 1$, за $r = 1$ и $X \cap V(f_1) = X$ имаме $\dim(Y) = \dim(X)$, докато в случая $\emptyset \subsetneq X \cap V(f_1) \subsetneq X$ е в сила $\dim(Y) = \dim(X) - 1$, съгласно Теорема 7. Това доказва, че всяка неприводима компонента Y на $X \cap V(f_1)$ е с размерност $\dim(Y) \geq \dim(X) - 1$. В общия случай, произволна неприводима компонента Y на

$$X \cap V(f_1, \ldots, f_r) = X \cap V(f_1, \ldots, f_{r-1}) \cap V(f_r)$$

се съдържа в някаква неприводима компонента Z на $X \cap V(f_1, \ldots, f_{r-1})$, съгласно своята неприводимост. Следователно Y е неприводима компонента на

$Z \cap V(f_r)$ и $\dim(Y) \geq \dim(Z) - 1$. По индукционно предположение $\dim(Z) \geq \dim(X) - (r-1)$, така че $\dim(Y) \geq \dim(X) - (r-1) - 1 = \dim(X) - r$, Q.E.D.

3. Теорема на Krull за сечението

Теоремата на Krull за сечението гласи, че ако R е ньотерова локална комутативна област с единица, то естествените степени $\mathfrak{M}^n$ на максималния идеал $\mathfrak{M}$ на R се пресичат само в нулата, $\cap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}^n = 0$.
За да докажем тази теорема определяме ньотеровото частно $I : J$ на идеали I, J в комутативен пръстен с единица R като множеството

$$I : J = \{r \in R \mid rJ \subseteq I\}$$

Забелязваме, че $I : J$ е идеал в R. По-точно, ако r_1, r_2 принадлежат на ньотеровото частно $I : J$, то $(r_1 - r_1)J \subseteq r_1 J + r_2 J \subseteq (I, +) \leq (R, +)$, откъдето $r_1 - r_2 \in I : J$ и $(I : J, +)$ е подгрупа на $(R, +)$. Ако $r \in I : J$ и $s \in R$, то $rs \in I : J$, защото от $rJ \subseteq I$ следва $rsJ \subseteq I$ за идеала I в R.

Лема 11.5. *Нека R е ньотерова локална комутативна област с единица, чийто максимален идеал $\mathfrak{M} = \langle a_1, \ldots a_r \rangle$ е породен от $a_1, \ldots, a_r \in \mathfrak{M}$, а $I \triangleleft R$ е идеал в R. Тогава съществуват естествени числа $p_j \in \mathbb{N}$, така че $b_j = a_j^{p_j}$ за $1 \leq j \leq r$ пораждат идеал $\langle b_1, \ldots, b_r \rangle$, пресичащ $\mathfrak{M}I : \langle b_1, \ldots, b_r \rangle$ в подмножество на $\mathfrak{M}I$,*

$$\langle b_1, \ldots, b_r \rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1, \ldots, b_r \rangle \subseteq \mathfrak{M}I.$$

Доказателство: За всяко $1 \leq j \leq r$ ще установим съществуването на $p_j \in \mathbb{N}$, изпълняващи равенствата

$$(\mathfrak{M}I + \langle a_1^{p_1}, \ldots, a_{j-1}^{p_{j-1}} \rangle) : \langle a_j^{p_j} \rangle = (\mathfrak{M}I + \langle a_1^{p_1}, \ldots, a_{j-1}^{p_{j-1}} \rangle) : \langle a_j^{p_j + k} \rangle \quad \text{за} \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

За целта да разгледаме идеалите

$$\mathcal{I}_1(m) := \mathfrak{M}I : \langle a_1^m \rangle \quad \text{за} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Те образуват ненамаляваща редица

$$\mathcal{I}_1(1) \subseteq \mathcal{I}_1(2) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{I}_1(m) \subseteq \mathcal{I}_1(m+1) \subseteq \ldots.$$

Пръстенът R е ньотеров, така че участв,ва $m \in \mathbb{N}$ с $\mathcal{I}_1(m) = \mathcal{I}_1(m+1)$. Означаваме с p_1 минималното естествено число, за което $\mathcal{I}_1(p_1) = \mathcal{I}_1(p_1 + 1)$. Тогава за $\forall k \in \mathbb{N}$ е в сила $\mathcal{I}_1(p_1 + k) = \mathcal{I}_1(p_1 + k + 1)$. По-точно, ако $x \in \mathcal{I}_1(p_1 + k + 1)$, то $x a_1^k \in \mathcal{I}_1(p_1 + 1)$, откъдето $x a_1^k \in \mathcal{I}_1(p_1)$ и $x \in \mathcal{I}_1(p_1 + k)$. С индукция по $2 \leq j \leq r$, означаваме

$$\mathcal{I}_j(m) := (\mathfrak{M}I + \langle a_1^{p_1}, \ldots, a_{j-1}^{p_{j-1}} \rangle) : \langle a_j^m \rangle \quad \text{за} \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

при условие, че сме избрали $p_s \in \mathbb{N}$ като минималните естествени числа с $\mathcal{I}_s(p_s) = \mathcal{I}_s(p_s + k)$ за $\forall k \in \mathbb{N}$, $1 \leq s \leq j-1$. Ненамаляващата редица

$$\mathcal{I}_j(1) \subseteq \mathcal{I}_j(2) \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{I}_j(m) \subseteq \mathcal{I}_j(m+1) \subseteq \ldots$$

от идеали в ньотеровата комутативня област R се стабилизира след краен брой стъпки. Ако $p_j \in \mathbb{N}$ е минималното естествено число с $\mathcal{I}_j(p_j) = \mathcal{I}_j(p_j + 1)$, то $\mathcal{I}_j(p_j) = \mathcal{I}_j(p_j + k)$ за $\forall k \in \mathbb{N}$. В частност, имаме $\mathcal{I}_j(p_j) = \mathcal{I}_j(2p_j)$ за $\forall 1 \leq j \leq r$. Полагаме $b_j = a_j^{p_j}$ за $\forall 1 \leq j \leq r$.
С индукция по $1 \leq j \leq r$ ще проверим, че

$$\langle b_1, \ldots, b_j \rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1, \ldots, b_j \rangle) \subseteq \mathfrak{M}I.$$

За $j = 1$ твърдим, че $\langle b_1 \rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1 \rangle) = b_1(\mathfrak{M}I : \langle b_1^2 \rangle)$. Ако елементът $b_1 x \in \langle b_1 \rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1 \rangle)$, то $b_1^2 x \in \mathfrak{M}I$ и $x \in \mathfrak{M}I : \langle b_1^2 \rangle$. Това доказва включването $\langle b_1 \rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1 \rangle) \subseteq b_1(\mathfrak{M}I : \langle b_1^2 \rangle)$. Обратно, ако $y \in \mathfrak{M}I : \langle b_1^2 \rangle$, то произведението $b_1 y \in \langle b_1 \rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1 \rangle)$, защото $b_1(b_1 y) = b_1^2 y \in \mathfrak{M}I$. Това доказва включването

$b_1(\mathfrak{M}I : \langle b_1^2\rangle) \subseteq \langle b_1\rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1\rangle)$ и $\langle b_1\rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1\rangle) = b_1(\mathfrak{M}I : \langle b_1^2\rangle)$. Условието $\mathcal{I}_1(p_1) = \mathcal{I}_1(2p_1)$ приема вида $\mathfrak{M}I : \langle b_1\rangle = \mathfrak{M}I : \langle b_1^2\rangle$ и доказва, че $b_1(\mathfrak{M}I : \langle b_1^2\rangle) = b_1(\mathfrak{M}I : \langle b_1\rangle) \subseteq \mathfrak{M}I$. С това установихме, че $\langle b_1\rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1\rangle) \subseteq \mathfrak{M}I$.
Да допуснем, че $\langle b_1,\dots,b_j\rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1,\dots,b_j\rangle) \subseteq \mathfrak{M}I$ за $\forall 1 \le j \le s-1$. Тогава

$$\langle b_1,\dots,b_s\rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1,\dots,b_s\rangle) = \langle b_1\dots,b_s\rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_s\rangle) \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle),$$

защото $x\langle b_1,\dots,b_s\rangle \subseteq \mathfrak{M}I$ е в сила тогава и само тогава, когато $x\langle b_s\rangle \subseteq \mathfrak{M}I$ и $x\langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle \subseteq \mathfrak{M}I$. По-нататък, твърдим, че

$$\langle b_1,\dots,b_s\rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_s\rangle) \subseteq \mathfrak{M}I + \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle.$$

За да докажем това включване да разгледаме елемента

$$x = \sum_{j=1}^{s} b_j y_j \in \langle b_1,\dots,b_s\rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_s\rangle) \quad \text{с} \quad y_j \in R.$$

Тогава $x - b_s y_s = \sum\limits_{j=1}^{s-1} b_j y_j \in \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle$, откъдето и $b_s x - b_s^2 y_s \in \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle$.
Сега $b_s x \in \mathfrak{M}I$, така че $b_s^2 y_s \in \mathfrak{M}I + \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle$. С други думи,

$$y_s \in (\mathfrak{M}I + \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle) : \langle b_s^2\rangle = \mathcal{I}_s(2p_s) = \mathcal{I}_s(p_s) = (\mathfrak{M}I + \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle) : \langle b_s\rangle$$

и $b_s y_s \in \mathfrak{M}I + \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle$. В резултат, $x = b_s y_s + \sum\limits_{j=1}^{s-1} b_j y_j \in \mathfrak{M}I + \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle$, откъдето $\langle b_1,\dots,b_s\rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_s\rangle) \subseteq \mathfrak{M}I + \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle$.
По този начин получаваме, че

$$\begin{aligned}\langle b_1,\dots,b_s\rangle\cap(\mathfrak{M}I : \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle) = \langle b_1,\dots,b_s\rangle\cap(\mathfrak{M}I : \langle b_s\rangle)\cap(\mathfrak{M}I : \langle b_1,\dots,b_{s-1}) \subseteq \\ \subseteq (\mathfrak{M}I + \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle) \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle) \subseteq \\ \subseteq (\mathfrak{M}I) \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle) + \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle) \subseteq \mathfrak{M}I,\end{aligned}$$

прилагайки индукционното предположение за $j = s-1$. При $j = r$ получаваме твърдението на лемата, Q.E.D.

Теорема 8. *Нека R е ньотерова локална комутативна област с единица с максимален идеал $\mathfrak{M}$. Тогава*

$$\cap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}^n = \{0\}.$$

Доказателство: Ако $I \triangleleft R$ е идеал в R и $\mathfrak{M} = \langle a_1,\dots,a_r\rangle$ се поражда от $a_1,\dots,a_r \in \mathfrak{M}$, то съгласно Лема 11.5 съществуват $p_j \in \mathbb{N}$, така че $b_j := a_j^{p_j}$ за $1 \le j \le r$ изпълняват включването

$$\langle b_1,\dots,b_r\rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1,\dots,b_r\rangle) \subseteq \mathfrak{M}I. \tag{11.2}$$

Полагаме $p := \max(p_1,\dots,p_r)$ и избираме $m := pr$. Твърдим, че

$$\mathfrak{M}^m \cap (\mathfrak{M}I : \mathfrak{M}) \subseteq \langle b_1,\dots,b_r\rangle \cap (\mathfrak{M}I : \langle b_1,\dots,b_r\rangle). \tag{11.3}$$

За целта е достатъчно да установим, че $\mathfrak{M}^m \subseteq \langle b_1,\dots,b_r\rangle$, защото от $x\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}I$ следва $x\langle b_1,\dots,b_r\rangle \subseteq x\langle a_1,\dots,a_r\rangle = x\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}I$, съгласно $b_1 = a_1^{p_1},\dots,b_r = a_r^{p_r} \in \langle a_1,\dots,a_r\rangle$. Идеалът $\mathfrak{M}^m = \langle a_1^{\alpha_1}\dots a_r^{\alpha_r} \mid \alpha_j \in \mathbb{Z}^{\ge 0}, \ \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_j = m\rangle$ се поражда от мономите на $a_1,\dots,a_r$ от степен m. Твърдим, че във всеки такъв моном $a_1^{\alpha_1}\dots a_r^{\alpha_r}$ съществува степенен показател $\alpha_j \ge p_j$, така че $a_1^{\alpha_1}\dots a_r^{\alpha_r} \in \langle b_1,\dots,b_r\rangle$ за $\forall \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_r) \in (\mathbb{Z}^{\ge 0})^r$ с $\sum\limits_{j=1}^{r} \alpha_r = m$ и $\mathfrak{M}^m \subseteq \langle b_1,\dots,b_r\rangle$. В портивен случай, допускането $\alpha_j < p_j$ за $\forall 1 \le j \le r$ води до

$$m = \sum_{j=1}^{r} \alpha_j < \sum_{j=1}^{r} p_j \le rp = m,$$

което не може да е в сила. С това доказахме (11.3).
Непосредствено се вижда, че

$$\mathfrak{M}^m \cap I \subseteq \mathfrak{M}^m \cap (\mathfrak{M}I : \mathfrak{M}), \tag{11.4}$$

защото ако $x \in \mathfrak{M}^m \cap I$, то $x\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}I$. Комбинирайки (11.2), (11.3) и (11.4) получаваме

$$\mathfrak{M}^m \cap I \subseteq \mathfrak{M}I. \tag{11.5}$$

Да допуснем, че $\cap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M} \neq \{0\}$ и да изберем $x \in \cap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}^n \setminus \{0\}$. Тогава за главния идеал $I = \langle x \rangle$ съществува естествено число $m \in \mathbb{N}$ с $\mathfrak{M}^m \cap \langle x \rangle \subseteq \mathfrak{M}\langle x \rangle$. Но $\langle x \rangle \cap \mathfrak{M}^m = \langle x \rangle$, съгласно $x \in \mathfrak{M}^m$ и $\mathfrak{M}\langle x \rangle = \mathfrak{M}x$, така че

$$\langle x \rangle \subseteq \mathfrak{M}x.$$

Следователно съществува $\mu \in \mathfrak{M}$ с $x = \mu x$. Оттук, $x(1-\mu) = 0$ в областта R с $x \neq 0$ дава $1 = \mu \in \mathfrak{M}$, което е противоречие. По този начин установяваме, че $\cap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{M}^n = \{0\}$, Q.E.D.

4. Тейлъров ред на регулярна функция в гладка точка

Определение 11.6. *Формален степенен ред $\Phi(t_1, \dots, t_d)$ на променливите $t_1, \dots, t_d$ с коефициенти от поле k е безкрайна сума*

$$\Phi(t_1, \dots, t_d) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi(t_1, \dots, t_d)^{(i)}$$

на хомогенни полиноми $\Phi(t_1, \dots, t_d)^{(i)} \in k[t_1, \dots, t_d]^{(i)}$ от степен $i \geq 0$.

Определение 11.7. *Нека $X \subseteq k^n$ е свази-афинно многообразие, $p \in X^{\text{smooth}}$ е гладка точка, а $t_1, \dots, t_d \in \mathfrak{M}_p(X)$ са локални параметри на локалния пръстен $\mathcal{O}_p(X)$ на p в X. Тейлъров ред на $f \in \mathcal{O}_p(X)$ е формален степенен ред $\Phi(t_1, \dots, t_d)$ на $t_1, \dots, t_d$ с коефициенти от k, който изпълнява условията*

$$f - \sum_{j=0}^{i} \Phi(t_1, \dots, t_d)^{(j)} \in \mathfrak{M}_p(X)^{i+1} \quad \text{за} \quad \forall i \geq 0.$$

Твърдение 11.8. *Нека p е гладка точка на афинно многообразие $X \subseteq k^n$ над алгебрично затворено поле, а $t_1, \dots, t_d \in \mathfrak{M}_p(X)$, $d = \dim(X)$ са локални параметри върху X в p. Тогава всеки елемент $f \in \mathcal{O}_p(X)$ на локалния пръстен $\mathcal{O}_p(X)$ на p в X има единствен Тейлъров ред*

$$\Phi(t_1, \dots, t_d) = \sum_{s=0}^{\infty} \Phi(t_1, \dots, t_d)^{(s)},$$

който съвпада с f.

Доказателство: За $\forall f \in \mathcal{O}_p(X)$ имаме $f(p) \in k$ и $f_1 = f - f(p) \in \mathfrak{M}_p(X)$. Пораждащите $t_1, \dots, t_d$ на максималния идеал $\mathfrak{M}_p(X) = \langle t_1, \dots, t_d \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$ отговарят на пораждащи $t_1 + \mathfrak{M}_p(X)^2, \dots, t_d + \mathfrak{M}_p(X)^2$ на линейното пространство

$$\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2 = l_k(t_1 + \mathfrak{M}_p(X)^2, \dots, t_d + \mathfrak{M}_p(X)^2).$$

В гладка точка $p \in X^{\text{smooth}}$ имаме $\dim_k\left(\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2\right) = d = \dim(X)$, така че $t_1 + \mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2, \dots, t_d + \mathfrak{M}_p(X)^2$ е базис на $\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$ над k. Следователно съществуват константи $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in k$, изпълняващи условието

$$f_1 + \mathfrak{M}_p(X)^2 = f - f(p) + \mathfrak{M}_p(X)^2 = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i(t_i + \mathfrak{M}_p(X)^2) = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i t_i + \mathfrak{M}_p(X)^2.$$

Оттук

$$f_2 := f - f(p) - \sum_{i=1}^{d} \alpha_i t_i \in \mathfrak{M}_p(X)^2.$$

Да забележим, че $\mathfrak{M}_p(X)^2 = \langle t_i t_j \mid 1 \leq i \leq j \leq d \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$ се поражда от произведенията $t_i t_j$ за $1 \leq i \leq j \leq d$. Следователно съществуват елементи $r_{i,j} \in \mathcal{O}_p(X)$, така че

$$f_2 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} r_{i,j} t_i t_j.$$

След разлагане на $r_{i,j} = (r_{i,j} - r_{i,j}(p)) + r_{i,j}(p)$ в сума на елемент $r_{i,j} - r_{i,j}(p) \in \mathfrak{M}_p(X)$ и $r_{i,j}(p) \in k$, получаваме

$$f_2 + \mathfrak{M}_p(X)^3 = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} r_{i,j}(p) t_i t_j + \mathfrak{M}_p(X)^3.$$

Продължаваме по същия начин с

$$f_3 := f_2 - \sum_{1 \leq u \leq v \leq d} \left(\sum_{i=1}^{s} \alpha_{i,u,v} \right) t_u t_v \in \mathfrak{M}_p(X)^3.$$

Да допуснем, че сме намерили полином

$$P_{s-1}(t_1, \ldots, t_d) = \sum_{j=0}^{s-1} P_{s-1}(t_1, \ldots, t_d)^{(j)}$$

от обща степен $\leq s-1$ с хомогенни компоненти $P_{s-1}(t_1, \ldots, t_d)^{(j)}$ от степен j, така че $f_{s-1} := f - P_{s-1}(t_1, \ldots, t_d) \in \mathfrak{M}_p(X)^s$. Идеалът

$$\mathfrak{M}_p(X)^s = \langle t_1^{i_1} \ldots t_d^{i_d} \mid i_j \geq 0, i_1 + \ldots + i_d = s \rangle$$

се поражда от мономите $t_1^{i_1} \ldots t_d^{i_d}$ на $t_1, \ldots, t_d$ от степен $i_1 + \ldots + i_d = s$. Означаваме съкратено $i = (i_1, \ldots, i_d)$ и представяме $f_{s-1} = \sum_i t_1^{i_1} \ldots t_d^{i_d} r_i$ чрез $r_i \in \mathcal{O}_p(X)$. Разлагаме $r_i = (r_i - r_i(p)) + r_i(p)$ в сума на $r_i(p) \in k$ и $r_i - r_i(p) \in \mathfrak{M}_p(X)$ и забелязваме, че

$$f_{s-1} + \mathfrak{M}_p(X)^{s-1} = \sum_i r_i(p) t_1^{i_1} \ldots t_d^{i_d} + \mathfrak{M}_p(X)^{s-1}.$$

По този начин получаваме полином

$$P_s(t_1, \ldots, t_d) := P_{s-1}(t_1, \ldots, t_d) + \sum_i r_i(p) t_1^{i_1} \ldots t_d^{i_d}$$

от обща степен s с $f_s := f - P_s(t_1, \ldots, t_d) \in \mathfrak{M}_p(X)^{s+1}$. Описаната процедура се осъществява за $\forall s \in \mathbb{N}$ и дава Тейлъров ред на $f \in \mathcal{O}_p(X)$.
Нека Φ и Φ' са Тейлърови редове на f. Тогава за $\forall i \geq 0$ имаме

$$\sum_{j=0}^{i} \Phi(t_1, \ldots, t_d)^{(j)} - \Phi'(t_1, \ldots, t_d)^{(j)} =$$

$$= \left[f - \sum_{j=0}^{i} \Phi(t_1, \ldots, t_d)^{(j)} \right] - \left[f - \sum_{j=0}^{i} \Phi'(t_1, \ldots, t_d)^{(j)} \right] \in \mathfrak{M}_p(X)^{i+1},$$

така че формалният степенен ред $\Phi - \Phi'$ е Тейлъров ред на $0 \in \mathcal{O}_p(X)$. Достатъчно е да докажем, че тъждествено нулевият формален степенен ред е единственият Тейлъров ред на $0 \in \mathcal{O}_p(X)$, за да получим едиствеността на Тейлъровия ред на f за $\forall f \in \mathcal{O}_p(X)$. Допускаме съществуването на нетъждествено нулев формален степенен ред $\Phi(t_1,\dots,t_d) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \Phi(t_1,\dots,t_d)^{(j)}$, който е Тейлъров ред на $0 \in \mathcal{O}_p(X)$. Означаваме с i минималното неотрицателно цяло число, за което хомогенната компонента $P(t_1,\dots,t_d) := \Phi(t_1,\dots,t_d)^{(i)}$ на $\Phi(t_1,\dots,t_d)$ от степен i е нетъждествено нулев хомогенен полином. След евентуална пермутация на локалните параметри $t_1,\dots,t_d$ можем да считаме, че $P(t_1,\dots,t_d)$ зависи от t_d и $i \geq 1$. Твърдим, че афинното алгебрично множество $V(P) \subsetneqq k^d$ не съвпада с k^d. В противен случай, за произволни фиксирани $t_i = a_i \in k$, $1 \leq i \leq d-1$ полиномът $P(a_1,\dots,a_{d-1},t_d) \in k[t_d]$ се анулира за $\forall t_d \in k$. Следователно $P(a_1,\dots,a_{d-1},t_d) \equiv 0 \in k[t_d]$ е тъждествено нулевият полином. Ако $P = \sum\limits_{j=0}^{d} c_j(t_1,\dots t_{d-1})t_d^j$ с $c_j(t_1,\dots,t_{d-1}) \in k[t_1,\dots,t_{d-1}]$, то $c_j(a_1,\dots,a_{d-1}) = 0$ за $\forall (a_1,\dots,a_{d-1}) \in k^{d-1}$. С индукция по $d \in \mathbb{N}$ оттук следва противоречие, така че $V(P) \subsetneqq k^d$.

Нека $a = (a_1,\dots,a_d) \in k^d \setminus V(P)$ и $s_1(t_1,\dots,t_d),\dots,s_d(t_1,\dots,t_d)$ са хомогенни линейни полиноми на $t_1,\dots,t_d$ с $s_j(a_1,\dots,a_d) = 0$ за $\forall 1 \leq j \leq d-1$ и $s_d(a_1,\dots,a_d) = 1$. Ако $s_i(t_1,\dots,t_d) = \sum\limits_{j=1}^{d} s_{ij}t_j$ има коефициенти $s_{ij} \in k$, то за $1 \leq i \leq d-1$ избираме $s_{i,1},\dots,s_{i,d}$ като ненулево решение на хомогенното линейно уравнение $a_1z_1 + \dots + a_dz_d = 0$. За $i = d$ вземаме $(s_{d,1},\dots,s_{d,d})$ да е решение на $a_1z_1 + \dots + a_dz_d = 1$. Последното уравнение е съвместимо за $\forall a = (a_1,\dots,a_d) \neq (0,\dots,0) \in V(P)$. Хомогенният полином $Q(s_1,\dots,s_d) = P(t_1,\dots,t_d)$ има стойност $s(0,\dots,0,1) \neq 0$ и се представя като сума

$$Q(s_1,\dots,s_d) = \lambda s_d^i + Q_1(s_1,\dots,s_d)$$

с $\lambda \in k^*$, $Q_1(s_1,\dots,s_d) \in \langle s_1,\dots,s_{d-1}\rangle_{k[s_1,\dots,s_d]} \cap k[s_1,\dots,s_d]^{(i)}$. Максималният идеал

$$\mathfrak{M}_p(X) = \langle s_1,\dots,s_d\rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$$

се поражда от $s_1,\dots,s_d$, така че

$$\mathfrak{M}_p(X)^{i+1} = \langle s_1^{\alpha_1}\dots s_d^{\alpha_d} \ \mid \ \alpha_j \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \ \ \sum_{j=1}^{d}\alpha_j = i+1\rangle.$$

Сега от $Q(s_1,\dots,s_d) \in \mathfrak{M}_p(X)^{i+1}$ следва дъществуването на $\sigma \in \mathcal{O}_p(X)$ с $Q(s_1,\dots,s_d) - s_d^{i+1}\sigma \in \langle s_1,\dots,s_{d-1}\rangle_{\mathcal{O}_p(X)} \cap \mathfrak{M}_p(X)^{i+1}$. Вземайки предвид

$$\langle s_1,\dots,s_{d-1}\rangle_{k[s_1,\dots,s_{d-1}]} \subseteq \langle s_1,\dots,s_{d-1}\rangle_{\mathcal{O}_p(X)},$$

получаваме че $\lambda s_d^i - \sigma s_d^{i+1} \in \langle s_1,\dots,s_{d-1}\rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$. от $s_d \in \mathfrak{M}_p(X)$ и $\lambda \in k^*$ следва, че $\lambda - \sigma s_d \in \mathcal{O}_p(X) \setminus \mathfrak{M}_p(X) = \mathcal{O}_p(X)^*$. Следователно

$$s_d^i = [s_d^i(\lambda - \sigma s_d)](\lambda - \sigma s_d)^{-1} \in \langle s_1,\dots,s_{d-1}\rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$$

и съществуват елементи $r_j \in \mathcal{O}_p(X)$, така че $s_d^i = \sum\limits_{j=1}^{d-1} s_jr_j$. Да напомним, че $\mathcal{O}_p(X) = k[X]_{I_X(p)} = (k[X] \setminus I_X(p))^{-1}k[X]$ е локализацията на афинния координатен пръстен $k[X]$ на X отонсно максималния идеал $I_X(p)$ на p в $K[X]$. Нека $f_1,\dots,f_d \in k[X]$ са числителите на $s_1,\dots,s_d \in \mathcal{O}_p(X)$ относно някакви представяния $s_i = \frac{f_i}{g_i}$ като частни на $f_i, g_i \in k[X]$ с $g_i(p) \neq 0$. Твърдим, че $V(f_1,\dots,f_{d-1}) \subseteq V(f_d)$. Наистина, ако $q \in V(f_1,\dots,f_{d-1})$, то $s_j(q) = 0$ за $\forall 1 \leq j \leq d-1$. Следователно $\frac{f_d^i(1)}{g_d^i(q)} = s_d^i(q) = \sum\limits_{j=1}^{d} s_j(q)r_j(q) = 0$, откъдето $f_d(q) = 0$. Но от $V(f_1,\dots,f_{d-1}) \subseteq V(f_d)$ следва $V(f_1,\dots,f_{d-1}) \subseteq$

$V(f_1, \ldots, f_{d-1}, f_d)$. Комбинирайки с $V(f_1, \ldots, f_{d-1}, f_d) \subseteq V(f_1, \ldots, f_{d-1})$ получаваме, че $V(f_1, \ldots, f_{d-1}) = V(f_1, \ldots, f_d)$. По Следствие 11.4, всяка неприводима компонента Y на $X \cap V(f_1, \ldots, f_{d-1}) = X \cap V(f_1, \ldots, f_d)$ е с размерност ≥ 1. Но ако $q \in X \cap V(f_1, \ldots, f_d)$, то $s_1(q) = \ldots = s_d(q) = 0$, така че всяко $\mu \in \mathfrak{M}_p(X) = \langle s_1, \ldots, s_d \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$ се анулира в q. Вземайки предвид

$$\mathfrak{M}_p(X) = (k[X] \setminus I_X(p))^{-1} I_X(p) = \langle x_1 - p_1 + I(X), \ldots, x_n - p_n + I(X) \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$$

получаваме, че $q_i - p_i = 0$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ и $q = p$. В резултат, сечението

$$X \cap V(f_1, \ldots, f_{d-1}) = X \cap V(f_1, \ldots, f_d) = \{p\}$$

е с размерност 0. Противоречието доказва тъждественото анулиране на Тейлъровия ред на $0 \in \mathcal{O}_p(X)$ и единствеността на Тейлъровия ред на произволен елемент $f \in \mathcal{O}_p(X)$.

Остава да проверим, че $\forall f \in \mathcal{O}_p(X)$ съвпада с Тейлъровия си ред $\Phi(t_1, \ldots, t_d) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \Phi(t_1, \ldots, t_d)^{(i)}$. По определение, $f - \sum\limits_{j=0}^{i} \Phi(t_1, \ldots, t_d)^{(j)} \in \mathfrak{M}_p(X)^{i+1}$ за всички $i \geq 0$. Вземайки предвид $\sum\limits_{j=i+1}^{\infty} \Phi(t_1, \ldots, t_d)^{(j)} \in \mathfrak{M}_p(X)^{i+1}$, получаваме, че $f - \Phi(t_1, \ldots, t_d) \in \mathfrak{M}_p(X)^{i+1}$ за $\forall i \geq 0$. Следователно

$$f - \Phi(t_1, \ldots, t_d) \in \cap_{s=1}^{\infty} \mathfrak{M}_p(X)^s = \{0\}$$

по Теоремата на Krull за сечението и $f = \Phi(t_1, \ldots, t_d)$, Q.E.D.

5. Допирателен конус към точка и раздуване

Нека $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие през началото $\check{o} = (0, \ldots, 0) \in X$, чийто идеал $I(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle_{k[x_1, \ldots, x_n]}$ се поражда от полиномите $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$. Тогава f_j имат нулеви свободни членове и разлаганията им

$$f_j = f_j^{i_j} + f_j^{l_j} + \ldots + f_j^{m_j}$$

с сума на хомогенни компоненти от степени $1 \leq i_j < l_j < \ldots < m_j$ започват с нетъждествено нулев хомогенен полином $f_j^{i_j}$ от степен i_j. Афинното алгебрично множество $TC_{\check{o}}(X) = V(f_1^{i_1}, \ldots, f_m^{i_m})$ съставено от общите нули на хомогенните компоненти на $f_1, \ldots, f_m$ от минимална степен е конус с връх в началото $\check{o} \in k^n$, който се нарича допирателен конус към X в точката $\check{o} \in X$.

Лема 11.9. *Ако $\check{o} \in X^{\text{smooth}}$ е гладка точка на афинно многообразие $X \subseteq k^n$ над алгебрично затворено поле k, то допирателният конус $TC_{\check{o}}(X) = T_{\check{o}} X$ към X в $\check{o}$ съвпада с допирателното пространство на Зариски към X в $\check{o}$.*

Доказателство: Нека $\dim(X) = d$ и $\overline{x_1} = x_1 + I(X), \ldots, \overline{x_d} = x_d + I(X)$ е базис на трансцендентност на $k(X) = F(k[X])$ над k. Тогава за $\forall d+1 \leq i \leq n$ съществуват полиноми $g_i(x_1, \ldots, x_d, x_i) \in k[x_1, \ldots, x_d, x_i]$, които пораждат идеала $I(X) = \langle g_{d+1}, \ldots, g_n \rangle_{k[x_1, \ldots, x_n]}$ на X. От определението за гладка точка $p \in X^{\text{smooth}}$ следва, че $\text{rk} \frac{\partial(g_{d+1}, \ldots, g_n)}{\partial x_1, \ldots, x_n)}(\check{o}) = n - d$. Полиномите $g_i \in I(X) \subset \mathfrak{M}_{\check{o}} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle_{k[x_1, \ldots, x_n]}$ се анулират в началото $\check{o}$, така че $g_i = \sum\limits_{j \geq 1} g_i^{(j)}$ имат нулеви хомогенни компоненти от степен 0. Ако $g_i^{(1)} = \sum\limits_{s=1}^{n} g_{i,s} x_s$, то

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_s}(\check{o}) = g_{i,s} + \sum_{j \geq 2} \frac{\partial g_i^{(j)}}{\partial x_s}(\check{o}) = g_{i,s},$$

защото за $j \geq 2$ формалните частни производни $\frac{\partial g_i^{(j)}}{\partial x_s}$ са хомогенни полиноми от степен $j - 1 \geq 1$ и се анулират в началото $\check{o} = (0, \ldots, 0)$. Следователно

$$\frac{\partial(g_{d+1},\dots,g_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(\check{o})\left(\begin{array}{c} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} g_{d+1}^{(1)} \\ \dots \\ g_n^{(1)} \end{array}\right)$$

и $n-d = \mathrm{rk}\frac{\partial(g_{d+1},\dots,g_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(\check{o}) = \mathrm{rk}(g_{d+1}^{(1)},\dots,g_n^{(1)})$. В частност, $g_i^{(1)} \not\equiv 0$ за $\forall d+1 \leq i \leq n$ и допирателният конус $TC_{\check{o}}(X) = V(g_{d+1}^{(1)},\dots,g_n^{(1)})$ към X в $\check{o}$ съвпада с пространството от решения $T_{\check{o}}X$ на хомогенната линейна система с матрица от коефициенти $\frac{\partial(g_{d+1},\dots,g_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)}(\check{o})$, Q.E.D.

Сега ще определим раздуването на афинно многообразие $X \subseteq k^n$ над алгебрично затворено поле k в $f_0,\dots,f_r \in k[x_1,\dots,x_n] \setminus I(X)$. Допълнението $U := X \setminus V(f_0,\dots,f_r)$ е непразно Зариски отворено подмножество на X. Разглеждаме регулярното изображение

$$f = [f_0 : \dots : f_r] : U \longrightarrow \mathbb{P}^r(k),$$

$$f(p) = [f_0(p) : \dots : f_r(p)]$$

и неговия график

$$\Gamma_f = \{(p, f(p)) \ \ p \in U\} \subseteq X \times \mathbb{P}^r(k)$$

с бирегулярна първа канонична проекция $\pi_1 : \Gamma_f \to U$, $\pi_1(p, f(p)) = p$ за всички точки $p \in U$. В общия случай, Γ_f не е затворено в $X \times \mathbb{P}^r(k)$ при $X \setminus U \neq \emptyset$. Затворената обвивка $\widehat{X}$ на Γ_f в $X \times \mathbb{P}^r(k)$ ще наричаме раздуване на X в $f_0,\dots,f_r$. Поради неприводимостта на Γ_f, $\widehat{X}$ е неприводимо, Зариски затворено подмножество на $X \times \mathbb{P}^r(k)$. Да отбележим, че $\dim(X) = \dim(\widehat{X})$, защото X и $\widehat{X}$ съдържат U като Зариски отворено, Зариски навсякъде гъсто подмножество.

Например, раздуването $\widehat{X}$ на X в $f_0 \in k[x_1,\dots,x_n] \setminus I(X)$ е затворено подмножество $\widehat{X} \subseteq X \times \mathbb{P}^0(k) = X$ на X, така че съвпада с афинното многообразие $X \subseteq k^n$, $\widehat{X} = X$.

Задача 11.10. *Да се докаже, че раздуването $\widehat{X}$ на $X = \mathbb{C}^2$ в x_0, x_1 е*

$$\widehat{X} = \{((x_0,x_1),[y_0 : y_1]) \ \ |x_0y_1 = x_1y_0\} \subset (X \setminus \{(0,0)\}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

Проекцията $\pi_1 : \widehat{X} \setminus \pi_!^{-1}(0,0) \to X \setminus \{(0,0)\}$ е взаимно еднозначна над допълнението $X \setminus \{(0,0)\}$ на началото $\check{o} = (0,0) \in \mathbb{C}^2$, а $\pi_1^{-1}(0,0) = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Задача 11.11. *Нека $C \subseteq X = \mathbb{C}^2$ е гладка афинна равнинна крива през началото $\check{o} = (0,0) \in C$ с уравнение $g(x_0,x_1) = a_{1,0}x_0 + a_{0,1}x_1 + \sum\limits_{i+j\geq 2} a_{i,j}x_0^ix_1^j = 0$, $\widehat{X}$ е раздуването на $X = \mathbb{C}^2$ в x_0, x_1 с проекция $\pi_1 : \widehat{X} \to X = \mathbb{C}^2$ и $\widehat{C}$ е раздуването на C в x_0, x_1. Да се докаже, че $\widehat{C}$ пресича $\pi_1^{-1}(0,0)$ в точката, отговаряща на допирателната права $a_{1,0}x_0 + a_{0,1}x_1 = 0$ към C в $\check{o} = (0,0)$.*

Упътване: Ако $x_0 \neq 0$ и $x_1 \neq 0$, то върху $\widehat{C}$ са в сила равенствата

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{y_1}{x_1}$$

и

$$\frac{y_0}{x_0}g(x_0,x_1) = a_{1,0}y_0 + a_{0,1}y_1 + \sum_{i+j\geq 2, i\geq 1} a_{i,j}x_0^{i-1}x_1^jy_0 + \sum_{j\geq 2} a_{0,j}x_1^{j-1}y_1 = 0.$$

Сега $\frac{y_0}{x_0}g(x_0,x_1)|_{x_0=x_1=0} = a_{1,0}y_0 + a_{0,1}y_1 = 0$.

Лема-Определение 11.12. *Нека $X \subseteq k^n$ е афинно многообразие над алгебрично затворено поле k, $f_0, \dots, f_r \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus I(X)$ са полиноми извън идеала на X, а $\widehat{X} \subset X \times \mathbb{P}^r(k)$ е раздуването на X в $f_0, \dots, f_r$ с първа канонична проекция $\pi_1 : \widehat{X} \to X$. Тогава:*
(i) $\widehat{X}$ се съдържа в множеството

$$\{(p, [y_0 : \dots : y_r]) \in X \times \mathbb{P}^r(k) \ \ | \ \ y_i f_j(p) = y_j f_i(p) \quad за \quad \forall 0 \leq i < j \leq k\};$$

(ii) всяка неприводима компонента Y на $\pi_1^{-1}(V(f_0, \dots, f_r))$ е с размерност $\dim(Y) = \dim(X) - 1$ и $\pi_1^{-1}(V(f_0, \dots, f_r))$ се нарича изключителна хиперповърхнина на $\widehat{X}$;
(iii) ако $\check{o} = (0, \dots, 0) \in X^{\mathrm{sing}}$ е особена точка на X, то изключителната хиперповърхнина $\pi_1^{-1}(V(x_1, \dots, x_n))$ на раздуването на X в $x_1, \dots, x_n$ е проективизацията на допирателния конус $TC_{\check{o}}(X)$ към X в $\check{o}$.

Доказателство: (i) По определение, за всяка точка $p \in X \setminus V(f_0, \dots, f_r)$ е в сила $[y_0 : \dots : y_r] = [f_0(p) : \dots : f_r(p)]$. Следователно $y_i f_j(p) = y_j f_i(p)$ за $\forall 0 \leq i < j \leq r$ за $\forall p \in X \setminus V(f_0, \dots, f_r)$. Тези равенства остават в сила върху затворената обвивка $\widehat{X}$ на $X \setminus V(f_0, \dots, f_r)$ в $X \times \mathbb{P}^r(k)$.
(ii) Достатъчно е да докажем твърдението за $V_i := \widehat{X} \cap (X \times U_i)$, където

$$U_i = \{[y_0 : \dots : y_r] \in \mathbb{P}^r(k) \ \ | \ \ y_i \neq 0\}$$

е стандартно афинно отворено подмножество на $\mathbb{P}^r(k)$ с $\widehat{X} \cap (X \times U_i) \neq \emptyset$. Ако за $(p, y) \in V_i$ допуснем, че $f_i(p) = 0$, то за $\forall j \in \{0, \dots, r\} \setminus \{i\}$ получаваме, че

$$f_j(p) = \frac{y_j}{y_i} f_i(p) = 0.$$

Следователно $V_i \cap \pi_1^{-1}(V(f_i)) \subseteq V_i \cap \pi_1^{-1}(V(f_0, \dots, f_r)) \subseteq V_i \cap \pi_1^{-1}(V(f_i))$ и $V_i \cap \pi_1^{-1}(V(f_i)) = V_i \cap \pi_1^{-1}(V(f_0, \dots, f_r))$. Съгласно Теорема 7, оттук следва, че

$$\dim(V_i \pi_1^{-1}(V(f_0, \dots, f_r)) = \dim(V_i \cap \pi_1^{-1}(V(f_i)) = \dim(V_i) - 1 = \dim(X) - 1,$$

защото $V_i \cap \pi_1^{-1}(V(f_i)) \neq \emptyset$ и f_i не се анулира навсякъде върху V_i.
(iii) По определение, раздуването $\widehat{X}$ на X в особената точка $\check{o} \in X$ е Зариски затворената обвивка на множеството X_o на точките

$$((x_1, \dots, x_n), [y_1 : \dots : y_n]) \in k^n \times \mathbb{P}^{n-1}(k),$$

изпълняващи равенствата $x_i y_j = x_j y_i$ за $\forall 1 \leq i \leq j \leq n$, $\forall x \in X \setminus \{\check{o}\}$. Изключителната хиперповърхнина $\pi_1^{-1}(V(x_1, \dots, x_n)) = \pi_1^{-1}(\check{o}) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}(k)$ се съдържа в проективизацията $\mathbb{P}^{n-1}(k)$ на k^n. Ако $I(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle \lhd k[x_1, \dots, x_n]$ се поражда от полиноми f_j с минимални ненулеви хомогенни компоненти $f_j^{(i_j)}$, то за всяка точка $x \in k^n \setminus (\cup_{i=1}^n V(x_i))$ и за произволни индекси $1 \leq i \leq j \leq n$ имаме $\frac{y_i}{x_i} = \frac{y_j}{x_j}$. Затова от $f_j(x_1, \dots, x_n) = f_j^{(i_j)}(x_1, \dots, x_n) + \sum\limits_{s > i_j} f_j^{(s)}(x_1, \dots, x_n) = 0$ следва

$$0 = \left(\frac{y_i}{x_i} \right)^{i_j} f_j(x_1, \dots, x_n) = f_j^{(i_j)}(y_1, \dots, y_n) + \sum_{s > i_j} \left(\frac{y_i}{x_i} \right)^{i_j} f_j^{(s)}(x_1, \dots, x_n) \tag{11.6}$$

за $\forall 1 \leq j \leq m$. При умножение на моном $c_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ от обща степен $\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i = s > i_j$ с $\left(\frac{y_i}{x_i} \right)^{i_j} = \left(\frac{y_1}{x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{y_2}{x_2} \right)^{\alpha_2} \dots$ получаваме моном на $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, x_n$, който е от обща степен i_j относно $y_1, \dots, y_n$ и от обща степен $s - i_j > 0$ относно $x_1, \dots, x_n$. В точката $\check{o} = (0, \dots, 0)$ с $x_1 = x_2 = \dots + x_n = 0$, всички такива мономи се анулират и уравнението (11.6) се свежда до $f_j^{(i_j)}(y_1, \dots, y_n) = 0$.

Ако $\nu : k^n \setminus \{\check{o}\} \to \mathbb{P}^{n-1}(k)$, $\nu(y_1, \ldots, y_n) = [y_1 : \ldots : y_n]$ е проективизацията на $k^n \setminus \{\check{o}\}$, то $\pi_1^{-1}(\check{o}) = \nu(TC_{\check{o}})$ е проективизацията на допирателния конус към X в $\check{o} \in X^{\mathrm{sing}}$, Q.E.D.