Глава 10

Рационални диференциални 1-форми

1. Определение и структура на свободен модул на рационалните диференциални 1-форми около гладка точка

Ако $X \subseteq k^n$ е квази-афинно многообразие над алгебрично затворено поле k, то можем да разглеждаме $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right), \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ като векторни полета върху X, т.е. като съответствия $X \ni p \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p X$, които на точка $p \in X$ съпоставят допирателните вектори $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p X$ към X в p. Съответствията ω, които на точка $p \in X$ съпоставят k-линеен функционал $\omega_p : T_p X \to k$ върху допирателното пространство към X в p се наричат рационални диференциални 1-форми върху X. Във всяка фиксирана точка $p \in X$ да означим с

$$\varepsilon_p : \mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2 \longrightarrow (T_p X)^*$$

каноничния k-линеен изоморфизъм на $\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$ с двойното дуално пространство, построен в Лема 9.1 (i). Всеки елемент на $\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$ е от вида $f - f(p) + \mathfrak{M}_p(X)^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i - p_i + \mathfrak{M}_p(X)^2)$ за някаква рационална функция $f \in \mathcal{O}_p(X)$ и константи $\lambda_i \in k$. Действието на $\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$ върху предишното равенство дава $\lambda_i = \frac{\partial f}{\partial x_j}(p)$ за $\forall 1 \leq j \leq n$, така че

$$f - f(p) + \mathfrak{M}_p(X)^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(x_i - p_o + \mathfrak{M}_p(X)^2).$$

Оттук следва, че всеки елемент на $(T_p X)^*$ е от вида

$$(df)_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)(dx_i)_p$$

за $(df)_p := \varepsilon_p(f - f(p) + \mathfrak{M}_p(X)^2)$, $(dx_i)_p := \varepsilon_p(x_i - p_i + \mathfrak{M}_p(X)^2)$, $1 \leq i \leq n$. За произволна рационална функция $f \in k(X)$ да разгледаме равенството

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \tag{10.1}$$

като определение на рационалната диференциална 1-форма df чрез диференциалните 1-форми $dx_1, \dots dx_n$ и формалните частни производни $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ на f относно x_i. Във всяка точка p от областта на регулярност $\mathcal{D}$ на f твърдим, че $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ са коректно определени. Наистина, ако рационалната функция се представя във вида $f = \frac{g}{h}$ с $g, h \in k[X]$, то във всяка точка $p \in \mathcal{D}$ имаме $h(p) \neq 0$ и рационалната функция

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{h \frac{\partial g}{\partial x_i} - g \frac{\partial h}{\partial x_i}}{h^2}$$

е регулряна в p като частно на регулярните функции $h\frac{\partial g}{\partial x_i} - g\frac{\partial h}{\partial x_i} \in k[X]$ и $h^2 \in k[X]$ с $h^2(p) \neq 0$. Рационалната диференциална 1-форма dx_i със стойности $(dx_i)_p = \varepsilon_p(x_i - p_i + \mathfrak{M}_p(X)^2)$ е коректно определена във всяка точка $p \in X \subseteq k^n$, в качеството си на на двойно дуална на глобално определения елемент $x_i - p_i + \mathfrak{M}_p(X)^2 \in \mathcal{O}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$. Следователно равенството (10.1) задава коректно определена рационална диференциална 1-форма df върху областта на регулярност $\mathcal{D}$ на $f \in k(X)$.

За произволно непразно Зариски отворено подмножество $U \subseteq X$ да разгледаме локалния пръстен $\mathcal{O}_U(X) = \cap_{p \in U} \mathcal{O}_p(X)$ на U в X и да определим

$$\Omega(U) := \mathcal{O}_U(X) d\mathcal{O}_U(X)$$

като $\mathcal{O}_U(X)$-модула, породен от рационалните диференциални 1-форми df на $f \in \mathcal{O}_U(X)$. За $\forall f \in \mathcal{O}_U(X)$ формалните частни производни $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ са регулярни върху U и $df = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ е коректно определена рационална диференциална 1-форма върху U. Изображението $d : \mathcal{O}_U(X) \to d\mathcal{O}_U(X)$, $f \mapsto df$ е k-диференциране, защото формалните частни производни $\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{O}_U(X) \to \mathcal{O}_U(X)$ са k-диференцирания. Съгласно формулата $df = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ с $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{O}_U(X)$ за $\forall f \in \mathcal{O}_U(X)$, $\mathcal{O}_U(X)$-модулът $\Omega(U) = \mathcal{O}_U(X) d\mathcal{O}_U(X)$ се поражда от рационалните диференциални 1-форми $dx_1, \ldots, dx_n$.

За произволен полином $h(x) \in I(X) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ от идеала на квази-афинното многообразие $X \subseteq k^n$ и произволна точка $p \in X$ твърдим, че

$$(dh)_p = \mathbb{O} : T_pX \longrightarrow k$$

е нулевият линеен функционал върху T_pX, така че $dh = 0 \in \Omega(U)$. Наистина, за произволен допирателен вектор $v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_pX$ е изпълнено

$$(dh)_p(v) = \varepsilon_p(h - h(p) + \mathfrak{M}_p(X)^2)(v) = v(h - h(p) + \mathfrak{M}_p(X)^2) = v(h) = 0,$$

съгласно Твърдение 9.8.

Ако $p \in X^{\mathrm{smooth}}$ е гладка точка на квази-афинно многообразие $X \subseteq k^n$ над алгебрично затворено поле k, то

$$\dim_k \left(\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2\right) = \dim_k(T_pX) = \dim(X) = d.$$

Нека $t_1, \ldots, t_d \in \mathfrak{M}_p(X) \subset \mathcal{O}_p(X)$ са такива елементи, чиито съседни класове $t_i + \mathfrak{M}_p(X)^2 \in \mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$, $1 \leq i \leq d$ образуват k-базис на $\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$. Тогава максималният идеал $\mathfrak{M}_p(X) = \langle t_1, \ldots, t_d \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$ се поражда от $t_1, \ldots, t_d$.

Определение 10.1. *Ако p е гладка точка на квази-афинно мвногообразие $X \subseteq k^n$ с размерност $\dim(X) = d$, то пораждащите системи $t_1, \ldots, t_d \in \mathfrak{M}_p(X)$ с d елемента на максималния идеал $\mathfrak{M}_p(X) = \langle t_1, \ldots, t_d \rangle_{\mathcal{O}_p(X)}$ на $\mathcal{O}_p(X)$ се наричат локални параметри върху X в p.*

Определение 10.2. *Нека R е комутативен пръстен с единица, M е модул над R. Казваме, че M е свободен R-модул с ранг d, ако съществуват d линейно независими над R пораждащи $x_1, \ldots, x_d \in M$ на $M = Rx_1 + \ldots + Rx_d$ над R.*

Последното е еквивалентно на това всеки елемент $x \in M$ да има единствено представяне $x = \sum\limits_{i=1}^{d} r_i x_i$ като линейна комбинация на $x_1, \ldots, x_d$ с коефициенти $r_1, \ldots, r_d \in R$.

Лема 10.3. *Всяка гладка точка $p \in X^{\mathrm{smooth}}$ на квази-афинно многообразие $X \subseteq k^n$ над алгебрично затворено поле k има Зариски отворена околност U върху X, така че модулът $\Omega(U) = \mathcal{O}_U(X) d\mathcal{O}_U(X)$ на рационалните диференциални 1-форми върху U е свободен $\mathcal{O}_U(X)$-модул с ранг $d = \dim(X)$, който се поражда от диференциалите на локални параметри върху X в p.*

Доказателство: Нека $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ са пораждащи на идеала $I(X) = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle_{k[x_1,\ldots,x_n]}$. Матрицата на Jacobi $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}$ има ранг $\mathrm{rk} \frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(p) = n - d$ в гладка точка $p \in X^{\mathrm{smooth}}$. След евентуална пермутация на $f_1, \ldots, f_m$ можем зда считаме, че първите $n-d$ реда на $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(p)$ са линейно независими, а останалите редове са в тяхната линейна обвивка. Аналогично, след евентуална пермутация на афинните координати $x_1, \ldots, x_n$ можем да считаме, че матрицата $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-d})}{\partial(x_{d+1},\ldots,x_n)}(p)$ е неособена.

Разглеждаме матриците $A = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-d})}{\partial(x_1,\ldots,x_d)}$ и $B = \frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-d})}{\partial(x_{d+1},\ldots,x_n)}$, чиито елементи са полиноми на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от k. Умножаваме отляво равенството

$$0_{(n-d)\times 1} = \begin{pmatrix} (df_1)_p \\ \ldots \\ (df_{n-d})_p \end{pmatrix} = A(p) \begin{pmatrix} (dx_1)_p \\ \ldots \\ (dx_d)_p \end{pmatrix} + B(p) \begin{pmatrix} (x_{d+1})_p \\ \ldots \\ (dx_n)_p \end{pmatrix}$$

с обратната матрица $B(p)^{-1}$ и получаваме

$$-B(p)^{-1} A(p) \begin{pmatrix} (dx_1)_p \\ \ldots \\ (dx_d)_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_{d+1})_p \\ \ldots \\ (dx_n)_p \end{pmatrix}.$$

Елементите на адюнгираната матрица B^* на B са полиноми на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от k, така че обратната матрица $B(p)^{-1} = \frac{1}{\det B(p)} B^*(p)$ е съставена от рационални функции на $p_1, \ldots, p_n$ със знаменател $\det B(p)$. Ако

$$U = \{x \in X \mid \det B \neq 0\}$$

е Зариски отвореното подмножество на X, върху което матрицата $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_{n-d})}{\partial(x_{d+1},\ldots,x_n)}$ е обратима, то във всяка точка $q \in U$ имаме

$$-\frac{1}{\det B(q)} B^*(q) A(q) \begin{pmatrix} (dx_1)_q \\ \ldots \\ (dx_d)_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (dx_{d+1})_q \\ \ldots \\ (dx_n)_q \end{pmatrix}.$$

Матрицата $-\frac{1}{\det B} B^* A$ с $n-d$ реда и d стълба е съставена от рационални функции $\varphi_{ij} = \frac{\psi_{ij}}{\det B}$ със знаменател $\det B \in k[x_1, \ldots, x_n]$ и някакви числители $\psi_{ij} \in k[x_1, \ldots, x_n]$ за $\forall 1 \leq i \leq n-d$, $\forall 1 \leq j \leq d$. За $\forall 1 \leq i \leq n-d$ е в сила равенството

$$\sum_{j=1}^{d} \frac{\psi_{ij}}{\det B} dx_j = \sum_{j=1}^{d} \varphi_{ij} dx_j = dx_{d+i}$$

на рационалните диференциални 1-форми върху U. Понеже $\mathcal{O}_U(X)$-модулът $\Omega(U) = \mathcal{O}_U(X) d\mathcal{O}_U(X)$ се поражда от $dx_1, \ldots, dx_n$ и $dx_{d+1}, \ldots, dx_n$ са в $\mathcal{O}_U(X)$-модула, породен от $dx_1, \ldots, dx_d$, стигаме до извода, че $dx_1, \ldots, dx_d$ пораждат $\Omega(U)$ като модул над $\mathcal{O}_U(X)$.

Твърдим, че $x_1 - p_1, \ldots, x_d - p_d \in \mathfrak{M}_p(X)$ са локални параметри върху X в p. Достатъчно е да проверим, че k-линейната обвивка на $x_i - p_i + \mathfrak{M}_p(X)^2$ за $1 \leq i \leq d$ съвпада с $\mathfrak{M}_p(X)/\mathfrak{M}_p(X)^2$. Последното условие е еквивалентно на това k-линейната обвивка на $(dx_1)_p, \ldots, (dx_d)_p$ да съвпада с $(T_pX)^*$ и това е вече доказано.

За $\mathcal{O}_U(X)$-линейната независимост на $dx_1, \ldots, dx_d \in \Omega(U) = \mathcal{O}_U(X)d\mathcal{O}_U(X)$ да предположим, че съществуват $g_1, \ldots, g_d \in \mathcal{O}_U(X)$ с $g_1dx_1 + \ldots + g_d dx_d = 0$ и $g_d \not\equiv 0$. Тогава съществува непразно Зариски отворено подмножество $U_o \subseteq U$, така че $g_d(q) \neq 0$ за $\forall q \in U_o$ и $dx_d \in l_{\mathcal{O}_{U_o}(X)}(dx_1, \ldots, dx_{d-1})$. Следователно $\Omega(U_o) = \mathcal{O}_{U_o}(X)d\mathcal{O}_{U_o}(X)$ има $d-1$ пораждащи $dx_1, \ldots, dx_{d-1}$ и във всяка точка $q \in U_o$ линейното пространство $(T_qX)^*$ е с размерност $\dim_k(T_qX)^* \leq d-1$. Но във всяка точка $q \in X$ е в сила $\dim_k(T_qX)^* = \dim_k T_qX \geq d$. Противоречието доказва линейната независимост на $dx_1, \ldots, dx_d$ над $\mathcal{O}_U(X)$, Q.E.D.

Задача 10.4. *Нека $f(x) \in \mathbb{C}[x_1]$ е полином от нечетна степен $2k+1 \in \mathbb{N}$ с различни корени $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k+1} \in \mathbb{C}$, $C \subset \mathbb{C}^2$ е афинната крива*

$$C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid x_2^2 = f(x_1)\},$$

а $p = (p_1, p_2) \in C$ е точка от C. Да се докаже, че:
(i) ако $p_1 \notin \{\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k+1}\}$, то $x_1 - p_1$ е локален параметър върху C в p;
(ii) ако $p_1 = \alpha_i$ за някое $1 \leq i \leq 2k+1$, то $y - p_2$ е локален параметър върху C в p.

Задача 10.5. *Нека $g(x_1) \in \mathbb{C}[x_1] \setminus \mathbb{C}$ е сепарабелен полином, чиято степен не се дели на 3, $X \subseteq \mathbb{C}^2$ е афинната крива*

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid x_2^3 = g(x_1)\}.$$

Да се докаже, че съществува естествено число $m \leq \deg(g) - 1$ и точки $p_i = (p_i', p_i'') \in X$, $1 \leq i \leq m$, така че $x_2 - q_2$ е локален параметър върху X във всяка точка $q = (q_1, q_2) \in X \setminus \{p_1, \ldots, p_m\}$.

Задача 10.6. *Нека $X = V(f, h) \subset \mathbb{C}^3$ е афинното многообразие, зададено с полиномите*

$$f = x_1^2 + 2x_2x_3 - x_1x_3 \quad и \quad h = x_1^3 + x_1^2 - 3x_1x_3 + 1$$

от $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_3]$. Да се докаже, че $x_1 - p_1$ е локален параметър върху X във всяка точка $p = (p_1, p_2, p_3) \in X$.

Упътване: Използвайте, че ако $p = (p_1, p_2, p_3) \in X$, то $p_1 \neq 0$ и $p_3 \neq 0$.

2. Координатно описание на диференциала на регулярно изображение на афинни пространства

Лема 10.7. *Нека $f = (f_1, \ldots, f_m) : k^n \to k^m$ е регулярно изображение на афинни пространства, зададено с полиноми $f_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$, $1 \leq i \leq m$. Тогава матрицата на диференциала*

$$(df)_p : T_pk^n \longrightarrow T_qk^m, \quad q = f(p),$$

на f в точка $p \in k^n$ спрямо базиса $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$, $1 \leq i \leq n$ на T_pk^n и базиса $\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q$, $1 \leq j \leq m$ на T_qk^m съвпада с матрицата на Jacobi

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(p) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(p) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(p) & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(p) \end{pmatrix}$$

на $f = (f_1, \ldots, f_m)$ относно $x_1, \ldots, x_n$ в $p \in k^n$.
Още повече, диференциалът

$$(df)_p = \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)_p \right) \begin{pmatrix} (df_1)_p \\ \ldots \\ (df_m)_p \end{pmatrix}$$

на f в $p \in k^n$ се определя еднозначно от стойностите $(df_j)_p$ на диференциалните 1-форми df_j в p по правилото

$$(df)_p(D) = \sum_{j=1}^{m} (df_j)_p(D) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q \quad \text{за} \quad \forall D \in T_p k^n, \quad q = f(p). \tag{10.2}$$

Доказателство: Ако $M = (M_{ji})_{1 \leq j \leq m,\, 1 \leq i \leq n}$ е матрицата на $(df)_p$ спрямо фиксираните базиси, то

$$(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p = \sum_{j=1}^{m} M_{ji} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q .$$

Действайки с това равенство върху $(dy_j)_q$ получаваме, че

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p (f^*(y_j - q_j + \mathfrak{M}_q(k^m)^2)) = \left[(df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right] (dy_j)_q = M_{ji}. \tag{10.3}$$

Съгласно k-линейността на двете страни на равенството (10.2), достатъчно е да го докажем за $D = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$, $1 \leq i \leq n$. Използвайки (10.3) получаваме

$$\sum_{j=1}^{m} \left[(df_j)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right] \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q = (df)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p ,$$

Q.E.D.

Задача 10.8. *Нека $X = V(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{C}^n$ е афинно многообразие, зададено с полиномите $f_1, \ldots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, а $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$. Да се докаже, че $\dim_{\mathbb{C}} \ker(df)_p \geq \dim(X)$ във всяка точка $p \in X$. Да се опишат афинните многообразия X, за които съществува точка $p \in \mathbb{C}^n$, в която диференциалът $(df)_p : T_p\mathbb{C}^n \to T_{f(p)}\mathbb{C}^n$ е влагане.*

Задача 10.9. *Нека $f_1, \ldots, f_m \in k[x_1, \ldots, x_n]$ са полиноми с коефициенти от алгебрично затворено поле k, а $f = (f_1, \ldots, f_m) : X \to Y$ е бирегулярно изображение на афинни многообразия $X \subset k^n$, $Y \subset k^m$. Без да се прилага Лема 10.7 да се докаже, че $v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \in T_pX$ е допирателен вектор към X в $p \in X$ тогава и само тогава, когато $w = \sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{m} a_i \left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_{f(p)} \in T_{f(p)}Y$ е допирателен вектор към Y в $f(p)$.*

Упътване: Използвайте, че $f^*I(Y) = I(X)$.

Задача 10.10. *Нека $f_1, \ldots, f_n \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ са такива полиноми, за които $f_j - f_j(p) + \mathfrak{M}_p(\mathbb{C}^n)^2$, $1 \leq j \leq n$ пораждат ко-допирателното пространство $\mathfrak{M}_p(\mathbb{C}^n)/\mathfrak{M}_p(\mathbb{C}^n)^2 \simeq \mathbb{C}^n$ към $\mathbb{C}^n$ в $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{C}^n$. Да се докаже, че регулярното изображение $f = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ има диференциал $(df)_p : T_p\mathbb{C}^n \to T_q\mathbb{C}^n$, $q = f(p)$ с ранг n в p.*

3. Етални изображения

Определение 10.11. *Регулярното изображение $f : X \to Y$ на афинни многообразия $X \subseteq k^n$ и $Y \subseteq k^m$ е етално в точка $p \in X$, ако диференциалът му $(df)_p : T_pX \to T_qY$, $q = f(p)$ е k-линеен изоморфизъм.*
Ако регулярното изображение $f : X \to Y$ на афинни многообразия е етално във всяка точка $p \in X$, казваме, че f е етално.

Твърдение 10.12. *Нека k е алгебрично затворено поле, $X \subseteq k^n$ е афинно многообразие с афинен координатен пръстен $k[X] = k[\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}]$,*

$$f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}, x_{n+1}) \in k[X][x_{n+1}] = k[\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n}][x_{n+1}]$$

е полином на x_{n+1} с коефициенти от $k[X]$, пораждащ прост идеал $\langle f \rangle_{k[X][x_{n+1}]}$ в $k[X][x_{n+1}]$, а $Y \subseteq k^{n+1}$ е афинното многообразие с афинен координатен пръстен $k[Y] = k[X][x_{n+1}]/\langle f \rangle_{k[X][x_{n+1}]}$. Тогава проекцията

$$\pi : k^{n+1} \longrightarrow k^n,$$

$$\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$$

върху първите n компоненти се ограничава до регулярно изображение

$$\pi : Y \longrightarrow X$$

на Y в X, което е етално в точка $(p, p_{n+1}) \in Y$ тогава и само тогава, когато полиномът $f(p, x_{n+1})$ няма кратни корени. Последното е еквивалентно на неразклоненост на π в (p, p_{n+1}).

Доказателство: Понеже $k[X][x_{n+1}] = k[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]/J(X)$ е фактор на полиномиалния пръстен $k[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$ по идеала $J(X) := \langle I(X) \rangle_{k[x_1,\dots,x_n,x_{n+1}]}$, породен от $I(X) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$, простият идеал $\langle f \rangle_{k[X][x_{n+1}]} \triangleleft k[X][x_{n+1}]$ се повдига до простия идеал

$$J(Y) = \langle f \rangle_{k[x_1,\dots,x_n,x_{n+1}]} + J(X) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$$

с фактори $J(Y)/J(X) = \langle f \rangle_{k[X][x_{n+1}]}$ и

$$k[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]/J(Y) \simeq k[X][x_{n+1}]/\langle f \rangle_{k[X][x_{n+1}]} = k[Y].$$

Това доказва, че $J(Y) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$ е простият идеал на Y в полиномиалния пръстен $k[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$. Съгласно $I(X) \subseteq J(X) \subseteq J(Y)$, всяка точка $p = \pi(p, p_{n+1})$ от образа на $Y \ni (p, p_{n+1})$ под действие на π изпълнява уравненията от $I(X)$ и принадлежи на $X = VI(X)$. Това доказва, че π е изображение $\pi : Y \to X$ на Y в X.

Ако идеалът $I(X) = \langle f_1, \dots, f_m \rangle_{k[x_1,\dots,x_n]}$ на X се поражда от полиномите $f_1, \dots, f_m$, то идеалът $J(Y) = \langle f_1, \dots, f_m, f \rangle_{k[x_1,\dots,x_n,x_{n+1}]}$ на Y се поражда от $f_1, \dots, f_m, f \in k[x_1, \dots, x_n, x_{n+1}]$ и допирателните пространства на Зариски към Y в $(p, p_{n+1}) \in Y$ са

$$T_{(p,p_{n+1})}Y \left\{ w = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{(p,p_{n+1})} \;\middle|\; w(f_1) = \ldots = w(f_m) = w(f) = 0 \right\}.$$

Твърдим, че диференциалът

$$(d\pi)_{(p,p_{n+1})} : T_{(p,p_{n+1})}k^{n+1} \longrightarrow T_p k^n,$$

$$(d\pi)_{(p,p_{n+1})} \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{(p,p_{n+1})} \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

на проекцията $\pi : k^{n+1} \to k^n$ е проектирането върху първите n координати на съответните допирателни вектори. За целта е достатъчно да приложим Лема 10.7 към $\pi : k^{n+1} \to k^n$, $\pi(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = (x_1, \dots, x_n)$ и до забележим, че матрицата на $(d\pi)_{(p,p_{n+1})}$ спрямо базиса $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{(p,p_{n+1})}$, $1 \leq i \leq n+1$ на $T_{(p,p_{n+1})}k^{n+1}$ и базиса $\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p$, $1 \leq j \leq n$ на $T_p k^n$ е

$$\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(x_1, \dots, x_{n+1})}(p) = \begin{pmatrix} E_n & 0_{n\times 1} \end{pmatrix},$$

където E_n е единичната $n\times n$-матрица, а $0_{n\times 1}$ е стълб от n нули. Допирателните пространства на Зариски към X в $p \in X$ са

$$T_pX = \left\{ v = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \ \middle| \ v(f_1) = \ldots = v(f_m) = 0 \right\}.$$

По определение, регулярното изображение $\pi : Y \to X$ е етално в точка (p, p_{n+1}) от Y точно когато диференциалът $(d\pi)_{(p,p_{n+1})} : T_{(p,p_{n+1})}Y \to T_pX$ е k-линеен изоморфизъм. Последното е в сила точно когато първите n координати $a_1, \ldots, a_n$ на допирателен вектор $w = \sum\limits_{i=1}^{n+1} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{(p,p_{n+1})} \in T_{(p,p_{n+1})}Y$ към Y в (p, p_{n+1}) определят еднозначно последната координата a_{n+1}. Съгласно

$$0 = w(f) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{(p,p_{n+1})} + a_{n+1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}} \right)(p, p_{n+1}),$$

$(d\pi)_{(p,p_{n+1})}$ е k-линеен изоморфизъм тогава и само тогава, когато

$$\frac{\partial f}{\partial x_{n+1}}(p, p_{n+1}) \neq 0$$

и p_{n+1} е прост корен на $f(p, x_{n+1}) = 0$, Q.E.D.

Задача 10.13. *Нека k е алгебрично затворено поле,*

$$X = V(x_2, x_3) \cup V(x_1, x_3) \cup V(x_1, x_2) \subset k^3$$

е обединението на координатните оси в k^3, а

$$Y = V(y_1 y_2 (y_1 - y_2)) \subset k^2.$$

Да се докаже, че:
(i) Y е обединение на три афинни прави през началото $(0, 0) \in k^2$;
(ii) афинните алгебрични множества X и Y не са бирегулярни.

Упътване: (ii) Ако допуснем съществуването на бирегулярно изображение $\varphi : X \to Y$, то φ се ограничава до изоморфизъм $\varphi : V(x_i, x_j) \to \varphi(V(x_i, x_j))$ за $\forall 1 \leq i < j \leq 3$ и трансформира единствената особена точка $0^3 = (0, 0, 0)$ на X в единствената особена точка $0^2 - (0, 0)$ на Y. Допирателното пространство на Зариски

$$T_{0^3}X = T_{0^3}V(x_2, x_3) + T_{0^3}V(x_1, x_3) + T_{0^3}V(x_1, x_2) =$$

$$= l_k \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{0^3} \right) + l_k \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_{0^3} \right) + l_k \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right)_{0^3} \right) =$$

$$= l_k \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_{0^3}, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_{0^3}, \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right)_{0^3} \right) \simeq k^3$$

към X в 0^3 се изобразява изоморфно върху допирателното пространство на Зариски

$$T_{0^2}Y = T_{0^2}V(y_1) + T_{0^2}V(y_2) + T_{0^2}V(y_1 - y_2) =$$

$$= l_k \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_2} \right)_{0^2} \right) + l_k \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_{0^2} \right) + l_k \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_{0^2} + \left(\frac{\partial}{\partial y_2} \right)_{0^2} \right) =$$

$$= l_k \left(\left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_{0^2}, \left(\frac{\partial}{\partial y_2} \right)_{0^2} \right) \simeq k^2$$

към Y в 0^2, което е противоречие.

Задача 10.14. *Нека* $f_1, \dots, f_m \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ *са такива полиноми, за които регулярното изображение* $f = (f_1, \dots, f_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ *е етално в някаква точка* $p \in \mathbb{C}^n$. *Да се докаже, че:*
(i) $m = n$;
(ii) съществува полином $g \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, *така че* f *е етално във всяка точка на непразното, Зариски отворено подмножество* $\mathbb{C}^n \setminus V(g) \subseteq \mathbb{C}^n$.

Задача 10.15. *Нека* $g(x) \in \mathbb{C}[x]$ *е полином от степен* $\deg(g) = 3m + 1$ *или* $\deg(g) = 3m - 1$ *за някое* $m \in \mathbb{N}$,

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid y^3 = g(x)\},$$

а $\pi : Y \to \mathbb{C}$, $\pi(x, y) = x$ *е проекцията върху първата компонента. Да се докаже, че:*
(i) изображението π *е етално във всички точки* $p \in Y \setminus (V(g) \times \{0\})$;
(ii) $\pi : Y \cap (V(g) \times \{0\}) \to V(g)$ *е взаимно еднозначно и* $(d\pi)_{(p_1, 0)} = \mathbb{O}$ *е нулевото* $\mathbb{C}$-*линейно изображение във всички точки* $(p_1, 0) \in Y \cap (V(g) \times \{0\})$.

4. Едно следствие от лемата на Noether за нормализация

Определение 10.16. *Крайното сепарабелно разширение* $F = E(\theta) \supset E$ *е нормално, ако всички корени* θ_i *на минималния полином* $f_\theta(x) \in E[x]$ *на* θ *над* E *принадлежат на* F.

Ще продължим с едно следствие от Лемата на Noether за нормализация, което е в сила само над алгебрично затворени полета k.

Следствие 10.17. *Нека* k *е алгебрично затворено поле,* $A = k[\eta_1, \dots, \eta_n]$ *е крайно породена* k-*алгебра без делители на нулата, а* $F = k(\eta_1, \dots, \eta_n)$ *е полето от частни на* A. *Тогава съществува базис на трансцендентност* $\xi_1, \dots, \xi_d \in A$ *на* F *над* k, *така че пръстенът* A *е цял над* $A_o = k[\xi_1, \dots, \xi_d]$ *и* F *е крайно нормално сепарабелно разширение на полето от частни* F_o *на* A_o.

Доказателство: Ако $\operatorname{tr}\deg_k F = n$, то $\eta_1, \dots, \eta_n$ е базис на трансцендентност на F над k, k-алгебрата $A_o = k[\eta_1, \dots, \eta_n] = A$ е цяла над себе си и нейното поле от частни $F_o = k(\eta_1, \dots, \eta_n) = F$ е крайно нормално сепарабелно разширение над себе си. Ако $\operatorname{tr}\deg_k F = 0$, то $\forall \eta_i$ е алгебрично над алгебрично затвореното поле k, така че $\eta_i \in k$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ и $A = A_o = k$, $F = F_o = k$.
Отсега нататък ще предполагаме, че степента на трансцендентност $\operatorname{tr}\deg_k F = d$ изпълнява неравенствата $0 < d < n$. Процедираме с индукция по разликата $1 \leq n - d \leq n - 1$ на броя n на пораждащите на A е степента на трансцендентност d на F над k. Избираме неразложим полином $f \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus k$. Твърдим, че съществува индекс $1 \leq i \leq n$, така че $f(x_1, \dots, x_n)$ зависи от x_i и $\frac{\partial f}{\partial x_i} \not\equiv 0$. В противен случай, полето k е с проста характеристика $\operatorname{char}(k) = p$ и степенните показатели на всички променливи във всички мономи с ненулев коефициент се делят на p. Всеки елемент $\alpha \in k$ на алгебрично затвореното поле k има p-ти корен $\sqrt[p]{\alpha} \in k$ в k, така че съществува полином $g \in k[x_1, \dots, x_n]$ с $f = g^p$. Това противоречи на неразложимостта на f и доказва съществуването на $1 \leq i \leq n$ с $\frac{\partial f}{\partial x_i} \not\equiv 0$. След евентуална пермутация на променливите $x_1, \dots, x_n$ можем да считаме, че $\frac{\partial f}{\partial x_1} \not\equiv 0$.
Ако полето k е с характеристика $\operatorname{char}(k) = 0$, то полагаме $\zeta_i = \eta_i - \eta_1^{N^{i-1}}$ за $\forall 2 \leq i \leq n$ и достатъчно голямо $N \in \mathbb{N}$. Полиномът

$$g(\eta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) := f\left(\eta_1, \zeta_2 + \eta_1^N, \dots, \zeta_n + \eta_1^{N^{n-1}}\right)$$

има $\frac{\partial g}{\partial \eta_1} \not\equiv 0$ за произволно $N \in \mathbb{N}$. В случая на проста характеристика $p = \operatorname{char}(k)$ избираме достатъчно голямо естествено $Np \in \mathbb{N}$, кратно на p и полагаме

$\zeta_i = \eta_i - \eta_1^{(Np)^{i-1}}$ за $\forall 2 \leq i \leq n$. Тогава

$$g(\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) := f\left(\eta_1, \zeta_2 + \eta_1^{(Np)}, \ldots, \zeta_n + \eta_1^{(Np)^{n-1}}\right)$$

има $\frac{\partial g}{\partial \eta_1} = \frac{\partial f}{\partial \eta_1} \not\equiv 0$, защото $\frac{\partial f}{\partial \eta_i} \frac{\partial\left(\zeta_i + \eta_1^{(Np)^{i-1}}\right)}{\partial \eta_1} \equiv 0$ за $\forall 2 \leq i \leq n$. Както в доказателството на Лемата на Noether за нормализация, $g(\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ задава цяла зависимост на η_1 над $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$. По индукционно предположение, съществува базис на трансцендентност $\xi_1, \ldots, \xi_d \in k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ на $k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ над k, така че $k[\zeta_2, \ldots, \zeta_n]$ е цял над k-алгебрата $A_o = k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$ и $k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ е крайно нормално сепарабелно разширение на $F_o = k(\xi_1, \ldots, \xi_d)$. В Лемата на Noether за нормализация изведохме, че $A = k[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n] = k[\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_2]$ е цял над $A_o = k[\xi_1, \ldots, \xi_d]$. Остава да проверим, че $F = k(\eta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ е крайно нормално сепарабелно разширение на $F_o = k(\xi_1, \ldots, \xi_d)$. Ако $\theta_1 \in k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ е сепарабелен примитивен елемент на $k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n) = F_o(\theta_1)$ над F_o, то съгласно Теорема 9.14 за примитивния елемент, съществува примитивен елемент $\theta = \eta_1 + c\theta_1$, $c \in k$ на $F = k(\theta)$ над k. За да докажем сепарабелността на θ над k да разгледаме разширенията $k \subseteq k(\theta_1) \subseteq k(\theta)$. Да означим $\lambda = [k(\theta_1) : k]$, $\mu = [k(\theta) : k(\theta_1)]$ и да отбележим, че $[k(\theta) : k] = [k(\theta) : k(\theta_1)][k(\theta_1) : k] = \lambda\mu$. Елементът $\theta_1 \in k(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ е сепарабелен над k, така че минималният полином на θ_1 над F_o има λ различни корена и $F_o(\theta_1)$ има λ различни влагания в алгебричната обвивка $\overline{F_o}$ на F_o над F_o. По определение, влагане $F_o(\theta_1) \hookrightarrow \overline{F_o}$ над F_o е хомоморфизъм на пръстени с нулево ядро, който се ограничава до тъждественото изображение Id_{F_o} на F_o. За всяко фиксирано влагане $F_o(\theta_1) \hookrightarrow \overline{F_o}$ с образ $F_o(\theta_1^{(i)})$ за някакъв корен $\theta_1^{(i)}$ на минималния полином на θ_1 над F_o имаме точно толкова влагания $F_o(\theta) = F_o(\eta_1 + c\theta_1) \hookrightarrow \overline{F_o}$ над F_o, колкото са влаганията на η_1 в алгебричната обвивка $\overline{F_o(\theta_1^{(i)})} = \overline{F_o}$ на $F_o(\theta_1^{(i)})$ над $F_o(\theta_1^{(i)})$. Този брой е равен на μ, така че $F = F_o(\theta)$ има $\lambda\mu = [F : F_o]$ влагания в $\overline{F_o}$ над F_o и примитивният елемент θ на $F = F_o(\theta)$ над F_o е сепарабелен над F_o.
Остава да докажем, че всички корени θ_i на минималния полином $f_\theta(x) \in F_o[x]$ на θ над F_o принадлежат на $F = F_o(\theta)$. За целта прилагаме Следствие 9.16 (ii) към разширението $F = k(\xi_1, \ldots, x_d, \theta) \supset k$ с базис на трансцендентност $\xi_1, \ldots, \xi_d$ над k и получаваме съществуването на неприводима хиперповърхнина $V(f) \subset k^{d+1}$ с функционално поле $k(V(f)) = F$. Стойностите на θ са стойностите на афинната координата x_{d+1} върху $V(f)$ и принадлежат на афинния координатен пръстен $k[V(f)]$, а оттам и на функционалното поле $k(V(f))$. Това доказва, че крайното сепарбелно разширение $F = F_o(\theta) \supset F_o$ е нормално, Q.E.D.