Глава 1

# Афинни многообразия и действия с тях. Топология на Зариски.

## 1. Афинно пространство

Произволно $n$-мерно линейно пространство над поле $k$ е изоморфно на пространството $k^n$ на наредените $n$-торки $x = (x_1, \dots, x_n) \in k^n$ с елементи $x_i \in k$. Събирането $x+y = (x_1, \dots, x_n)+(y_1, \dots, y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$ на вектори $x, y \in k^n$ и умножението $\lambda x = \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ на вектор $x \in k^n$ със скалар $\lambda \in k$ са покомпонентни. Всяко линейно пространство $k^n$ над $k$ е абелева група относно събирането на вектори, която се нарича адитивна група на $k^n$ и се бележи с $(k^n, +)$. За да въведем крайномерните афинни пространства да напомним някои определения:

Определение 1.1. *Действие на група $G$ върху множество $M$ е изображение*

$$G \times M \longrightarrow M$$

*със свойствата:*
*(i) $ex = x$ за неутралния елемент $e \in G$, всяко $x \in M$ и*
*(ii) $(gh)x = g(hx)$ за произволни $g, h \in G$, $x \in M$.*

Определение 1.2. *Множеството $Orb_G(x) = \{gx \mid g \in G\}$ на образите на точка $x \in M$ под действие на групата $G$ се нарича орбита на $x$ или $G$-орбита на $x$.*

Различните орбити на група $G$ върху множество $M$ на се пресичат, т.е., ако орбитите $Orb_G(x)$ и $Orb_G(y)$ се пресичат в точка $z$, то те съвпадат, $Orb_G(x) = Orb_G(y)$. Наистина, ако съществува $z \in Orb_G(x) \cap Orb_G(y)$, то $z = g_1 x = g_2 y$ за някои $g_1, g_2 \in G$. Следователно $x = (g_1^{-1} g_2)y \in Orb_G(y)$, откъдето $gx = (gg_1^{-1}g_2)y$ за $\forall g \in G$ и $Orb_G(x) \subseteq Orb_G(y)$. Аналогично, $Orb_G(y) \subseteq Orb_G(x)$, откъдето $Orb_G(x) = Orb(G)$.

Определение 1.3. *Действието на група $G$ върху множество $M$ е транзитивно, ако $M = Orb_G(x)$ съвпада с орбитата на всеки свой елемент $x$.*

С други думи, $G$ действа транзитивно върху $M$, ако за произволни елементи $x, y \in M$ съществува $g \in G$ с $y = gx$.

Определение 1.4. *Ако група $G$ действа върху множество $M$, то за всяко $x \in M$ подмножеството $Stab_G(x) = \{g \in G \mid gx = x\}$ на $G$ се нарича стабилизатор на $x$ в $G$.*

Непосредствено се проверява, че стабилизаторът $Stab_G(x)$ на $x \in M$ е подгрупа на $G$, защото от $g, h \in Stab_G(x)$ следва $gh, g^{-1} \in Stab_G(x)$. Да означим с $G/Stab_G(x)$ множеството на левите съседни класове $gStab_G(x)$, $g \in G$ на $G$ относно $Stab_G(x)$.
Ако $x \in M$ и $g \in G$, то стабилизаторът

$$Stab_G(gx) = gStab_G(x)g^{-1}$$

на $gx$ е спрегнат на стабилизатора $Stab_G(x)$ на $x$ чрез $g$. За целта е достатъчно да се провери, че $gStab_G(x)g^{-1} \subseteq Stab_G(gx)$ за произволни $g \in G$ и $x \in M$. Заместваме $g$ с $g^{-1}$ и $x$ с $gx$, за да получим $g^{-1}Stab_G(gx)g \subseteq Stab_G(g^{-1}(gx)) = Stab_G(x)$. Оттук $Stab_G(gx) \subseteq gStab_G(x)g^{-1}$ след ляво умножение с $g$ и дясно умножение с $g^{-1}$.

Лема 1.5. *Ако група $G$ действа върху множество $M$, то за всяка точка $x \in M$ съществува изоморфизъм на множества $f : G/Stab_G(x) \to Orb_G(x)$.*

**Доказателство:** Разглеждаме изображението

$$f : G/Stab_G(x) \longrightarrow Orb_G(x),$$
$$f(gStab_G(x)) = gx \quad \text{за} \quad \forall g \in G, \quad \forall x \in M.$$

То е коректно определено, защото ако $gStab_G(x) = g_1Stab_G(x)$, то $g^{-1}g_1 \in Stab_G(x)$ и $g^{-1}(g_1(x)) = (g^{-1}g_1)x = x$. Действайки с $g$ получаваме $g_1(x) = g(x)$. Ако $gx = hx$ за някои $g, h \in G$, то $g^{-1}h \in Stab_G(x)$ и $gStab_G(x) = hStab_G(x)$. С други думи, изображението $f$ трансформира различни леви съседни класове на $G$ по $Stab_G(x)$ в различни елементи от $G$-орбитата на $x$.
Всеки елемент $gx \in Orb_G(x)$ е образ $gx = gStab_G(x)$ на ляв съседен клас на $G$ относно $Stab_G(x)$, така че изображението $f$ е взеимно еднозначно, Q.E.D.

Определение 1.6. *Групата $G$ действа ефективно върху множеството $M$, ако стабилизаторите $Stab_G(x) = \{e\}$ на всички елементи $x \in M$ са тривиални.*

От Лема 1.5 следва, че ако група $G$ действа транзитивно и ефективно върху множество $M$, то за всяка точка $x_o \in M$ съществува изоморфизъм на множества

$$f_{x_o} : G = G/Stab_G(x_o) \longrightarrow Orb_G(x_o) = M,$$
$$f_{x_o}(g) = gx_o \quad \text{за} \quad \forall g \in G.$$

Точката $x_o = f(e)$ е образът на неутралния елемент $e$ на $G$.

Лема-Определение 1.7. *Адитивната група $(k^n, +)$ на линейно пространство $k^n$ действа транзитивно и ефективно върху множеството $A(k^n)$ на векторите от $k^n$ по правилото*

$$k^n \times A(k^n) \longrightarrow A(k^n),$$
$$(a, x) \mapsto a + x.$$

*Множеството $A(k^n)$ с това действие на $(k^n, +)$ се нарича афинно пространство, моделирано върху $k^n$.*

**Доказателство:** Неутралният елемент на $(k^n, +)$ е нулевият вектор $\mathcal{O}$ на $k^n$ и той изпълнява равенствата $\mathcal{O} + x = x$ за $\forall x \in A(k^n)$. Съгласно асоциативността на събирането на вектори, $(a + b) + x = a + (b + x)$ за $\forall a, b \in (k^n, +)$, $\forall x \in A(k^n)$. Това проверява, че посоченото изображение е действие на групата $(k^n, +)$ върху множеството $A(k^n)$.
За произволни вектори $x, y \in A(k^n)$ съществува елемент $y - x \in (k^n, +)$, така че $(y - x) + x = y$ и действието е транзитивно. Стабилизаторът на произволна точка $x \in A(k^n)$ относно това действие е

$$Stab_{(k^n,+)}(x) = \{a \in (k^n, +) \;\mid\; a + x = x\} = \{\mathcal{O}\},$$

така че действието е ефективно, Q.E.D.
По определение, афинното пространство $A(k^n)$, моделирано върху линейното пространство $k^n$ съвпада като множество с адитивната група $(k^n, +)$ на $k^n$. Отсега нататък ще означаваме с $k^n$ афинното пространство $A(k^n)$, моделирано върху линейното пространство $k^n$.

Задача 1.8. *(i) Нека $k$ е поле, а*

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n = b_i, \quad 1 \leq i \leq m, \tag{1.1}$$

*е система линейни уравнения с коефициенти $c_{ij} \in k$, свободни членове $b_i \in k$ и ранг $r$. Да се докаже, че множеството от решения на (1.1) е афинно пространство, моделирано върху $k^{n-r}$.*
*(ii) Подмножеството $A$ на линейното пространство $k^n$ е афинно подпространство на $k^n$, ако събирането на векотри в $k^n$ задава транзитивно действие на подпространство $V \subseteq k^n$ върху $A$. Да се докаже, че всяко афинно подпространство $A$ на линейното пространство $k^n$ може да се реализира като множеството от решения на система линейни уравнения.*

**Упътване:** (i) Отъждествете $k^{n-r}$ с пространството от решения на хомогенната линейна система

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{in}x_n = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \tag{1.2}$$

## 2. Афинни алгебрични множества

Полином на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от поле $k$ е крайна сума

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$$

от мономи $c_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ с неотрицателни цели степенни показатели $\alpha_i$ и коефициенти $c_\alpha \in k$. Отсега нататък ще означаваме с $k[x_1, \ldots, x_n]$ пръстена на полиномите на $x_1, \ldots, x_n$ с коефициенти от полето $k$.

Определение 1.9. *За произволно подмножество от полиноми $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ с коефициенти от поле $k$, множеството на точките*

$$V(S) := \{a = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n \quad | \quad f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad \text{за} \quad \forall f \in S\}$$

*от афинното пространство $k^n$, върху които се анулират всички полиноми от $S$ се нарича афинно алгебрично множество, определено от $S$.*

Лема-Определение 1.10. *За произволно подмножество $V \subseteq k^n$ на афинното пространство $k^n$, множеството на полиномите*

$$I(V) := \{f \in k[x_1, \ldots, x_n] \quad | \quad f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad \text{за} \quad \forall a = (a_1, \ldots, a_n) \in V\},$$

*които се анулират във всяка точка на $V$ е идеал в $k[x_1, \ldots, x_n]$, наречен идеал на множеството $V$.*

**Доказателство:** Непосредствено се проверява, че за произволни $f, g \in I(V)$ и $h \in k[x_1, \ldots, x_n]$ е в сила $f - g, fh = hf \in I(V)$, съгласно $(f - g)(a) = f(a) - g(a) = 0 - 0 = 0$ и $(fh)(a) = f(a)h(a) = 0.h(a) = 0$ за всяка точка $a \in V$, Q.E.D.

Пример 1.11. *(i) Афинното алгебрично множество $V(2x - 3y + 5z - 1) \subset k^3$ е равнина.*
*(ii) Афинното алгебрично множество $V(xy, xy - 1) = \emptyset$ е празно във всяко афинно пространство $k^n$ с размерност $n \geq 2$.*

Ще се спрем на операциите сечение и обединение на афинни алгебрични множества $V(S_\alpha) \subseteq k^n$, $\alpha \in A$. Тези операции отговарят на операции с определящите им множества от полиноми $S_\alpha \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$. По-точно, сечението на $V(S_\alpha) \subseteq k^n$ се задава от обединението на $S_\alpha$ и от сумата на идеалите $\langle S_\alpha \rangle \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$, породени от $S_\alpha$. Идеалът на обединението на $V(S_\alpha)$ отговаря на на сечението на $IV(S_\alpha)$. В случая на крайно индексиращо множество $A = \{1, \ldots, n\}$, $\cup_{i=1}^n V(S_\alpha)$ се определя от произведението на множества

$S_1 \ldots S_n = \{s_1 \ldots s_n \mid s_i \in S_i\}$, произведението $\langle S_1 \rangle \ldots \langle S_n \rangle$ на идеалите $\langle S_i \rangle$, породени от $S_i$ и от сечението $\langle S_1 \rangle \cap \ldots \cap \langle S_n \rangle$ на тези идеали.
Продължаваме с някои елементарни свойства на афинните алгебрични множества:

Лема 1.12. *За произволно подмножество $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ да означим с $V(S) \subseteq k^n$ афинното алгебрично множество, определено от $S$. Тогава:*
*(i) $V(0) = k^n$.*
*(ii) $V(k[x_1, \ldots, x_n]) = \emptyset$.*
*(iii) $V(S) = V(\langle S \rangle)$ за идеала $\langle S \rangle \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$, породен от $S$.*

**Доказателство:** (i) Тъждествено нулевият полином $0 \in k[x_1, \ldots, x_n]$ се анулира във всяка точка $a = (a_1, \ldots, a_n) \in k^n$.
(ii) Елементите на мултипликативната група $k^*$ на полето $k$ не се анулират в нито една точка на афинното пространство $k^n$.
(iii) Ако $a \in V(S) \subset k^n$, то за произволен полином $f = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i g_i \in \langle S \rangle$ с $f_i \in S$, $g_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ е в сила $f(a) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(a) g_i(a) = \sum\limits_{i=1}^{m} 0.g_i(a) = 0$. Следователно $V(S) \subset V(\langle S \rangle)$.
За $a \in V(\langle S \rangle)$ и $f \in S \subset \langle S \rangle$ имаме $f(a) = 0$, така че $V(\langle S \rangle) \subseteq V(S)$ и $V(S) = V(\langle S \rangle$, Q.E.D.
Следващата лема доказва, че съответствието между подмножества от полиноми $S \subset k[x_1, \ldots, x_n]$ и афинните алгебрични множества $V(S) \subseteq k^n$, определени от тях обръща включванията

Лема 1.13. *Съответствието между множества от полиноми и афинни алгебрични множества обръща включванията. По-точно:*
*(i) ако $S \subset T \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$, то $V(S) \supseteq V(T)$;*
*(ii) ако $V \subset W \subseteq k^n$, то $I(V) \supseteq I(W)$.*

**Доказателство:** (i) За $\forall a \in V(T) \subseteq k^n$ и $\forall f \in S \subset T$ е изпълнено $f(a) = 0$, така че $a \in V(S)$.
(ii) Ако $f \in I(W)$, то за всяка точка $a \in V \subset W$ е в сила $f(a) = 0$. Следователно $f \in I(V)$, Q.E.D.
Да напомним определението и някои свойства на сумата на идеали.

Определение 1.14. *Ако $I_\alpha$, $\alpha \in A$ е фамилия от идеали в комутативен пръстен с единица $R$, то множеството*

$$\sum_{\alpha \in A} I_\alpha := \left\{ \sum_{\alpha \in A} x_\alpha \;\middle|\; x_\alpha \in I_\alpha \quad \text{с краен брой} \quad x_\alpha \neq 0 \right\}$$

*се нарича сума на идеалите $I_\alpha$.*

Лема 1.15. *Нека $I_\alpha$, $\alpha \in A$ е фамилия от идеали в комутативен пръстен с единица $R$. Тогава:*
*(i) $\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ е идеал в $R$;*
*(ii) $\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ е минималният идеал в $R$, съдържащ $\cup_{\alpha \in A} I_\alpha$, т.е. $\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ съдържа $\cup_{\alpha \in A} I_\alpha$ и ако идеал $J \triangleleft R$ съдържа $\cup_{\alpha \in A} I_\alpha$, то $J$ съдържа $\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$;*
*(iii) $\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha = \langle \cup_{\alpha \in A} S_\alpha \rangle$, ако идеалите $I_\alpha = \langle S_\alpha \rangle$ се пораждат от множествата $S_\alpha$.*

**Доказателство:** (i) За произволни $x_{\alpha_i} \in I_{\alpha_i}$, $y_{\beta_j} \in I_{\beta_j}$ с $\alpha_i, \beta_j \in A$ и произволно $r \in R$ проверяваме, че

$$(x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_k}) - (y_{\beta_1} + \ldots + y_{\beta_m}) = x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_k} + (-y_{\beta_1}) + \ldots + (-y_{\beta_m})$$

принадлежи на $I_{\alpha_1} + \ldots + I_{\alpha_k} + I_{\beta_1} + \ldots + I_{\beta_m} \subset \sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ и

$$r\left(\sum_{i=1}^{k} x_{\alpha_i}\right) = \left(\sum_{i=1}^{k} x_{\alpha_i}\right) r = \sum_{i=1}^{k} (x_{\alpha_i} r) \in \sum_{i=1}^{k} I_{\alpha_i} \subseteq \sum_{\alpha \in A} I_\alpha.$$

(ii) Достатъчно е да отбележим, че $\cup_{\alpha \in A} I_\alpha \subseteq \sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ и ако $\cup_{\alpha \in A} I_\alpha \subseteq J \triangleleft R$, то за произволни $x_{\alpha_i} \in I_{\alpha_i} \subseteq J$, $\alpha_i \in A$, $1 \leq i \leq k$ е в сила $x_{\alpha_1} + \ldots + x_{\alpha_k} \in J$.
(iii) Произволен елемент $x$ на $\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ е крайна сума на

$$x_\alpha \in I_\alpha = \langle S_\alpha \rangle \subseteq \langle \cup_{\alpha \in A} S_\alpha \rangle.$$

Идеалът $\langle \cup_{\alpha \in A} S_\alpha \rangle$ е затворен относно събиране, така че $x \in \cup_{\alpha \in A} \langle S_\alpha \rangle$ и $\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ се съдържа в $\langle \cup_{\alpha \in A} S_\alpha \rangle$.
Всеки елемент $y$ на $\langle \cup_{\alpha \in A} S_\alpha \rangle$ е крайна сума на произведения $s_\alpha r$ за някакви $s_\alpha \in S_\alpha$, $r \in R$. Следователно $s_\alpha r \in \langle S_\alpha \rangle = I_\alpha \subseteq \sum\limits_{\beta \in A} I_\beta$ и $y \in \sum\limits_{\beta \in A} I_\beta$ поради затвореността на $\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ относно събиране. Това дава $\langle \cup_{\alpha \in A} S_\alpha \rangle \subseteq \sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$, Q.E.D.

Лема 1.16. *(i) Ако $I_\alpha$, $\alpha \in A$ са идеали в $k[x_1, \ldots, x_n]$, то $V(\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha) = \cap_{\alpha \in A} V(I_\alpha)$.*
*(ii) Ако $S_\alpha \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$, $\alpha \in A$ са множества от полиноми, то афинното алгебрично множество $V(\cup_{\alpha \in A} S_\alpha) = \cap_{\alpha \in A} V(S_\alpha)$.*
*(iii) Ако $V_\alpha \subseteq k^n$, $\alpha \in A$ са подмножества на афинното пространство $k^n$, то идеалът на обединението им е $I(\cup_{\alpha \in A} V_\alpha) = \cap_{\alpha \in A} I(V_\alpha)$.*

**Доказателство:** (i) От $I_\alpha \subseteq \sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ получаваме $V\left(\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha\right) \subseteq V(I_\alpha)$ за $\forall \alpha \in A$, съгласно Лема 1.13 (i). Това доказва, че $V\left(\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha\right) \subseteq \cap_{\alpha \in A} V(I_\alpha)$. Обратно, за произволна точка $a \in \cap_{\alpha \in A} V(I_\alpha)$ и произволен полином $f = \sum\limits_{i=1}^{k} f_{\alpha_i} \in \sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha$ с $f_{\alpha_i} \in I_{\alpha_i}$, $\alpha_i \in A$ имаме $f(a) = \sum\limits_{i=1}^{k} f_{\alpha_i}(a) = 0 + \ldots + 0 = 0$, защото $a \in V(I_{\alpha_i})$ за $\forall 1 \leq i \leq k$. Оттук $\cap_{\alpha \in A} V(I_\alpha) \subseteq V\left(\sum\limits_{\alpha \in A} I_\alpha\right)$.
(ii) е непосредствено следствие от Лема 1.12(iii) и вече доказаното условие (i), приложено към идеалите $\langle S_\alpha \rangle$, породени от $S_\alpha$.
(iii) Възоснова на Лема 1.13 (ii), от $V_\alpha \subseteq \cup_{\alpha \in A} V_\alpha$ следва $I(\cup_{\alpha \in A} V_\alpha) \subseteq I(V_\alpha)$ за всяко $\alpha \in A$, така че $I(\cup_{\alpha \in A} V_\alpha) \subseteq \cap_{\alpha \in A} I(V_\alpha)$. За произволна точка $a \in \cup_{\alpha \in A} V_\alpha$ съществува индекс $\alpha_o \in A$ с $a \in V_{\alpha_o}$. Следователно полиномите $f \in \cap_{\alpha \in A} I(V_\alpha) \subseteq I(V_{\alpha_o})$ се анулират в $a$ и $\cap_{\alpha \in A} I(V_\alpha) \subseteq I(\cup_{\alpha \in A} V_\alpha)$, Q.E.D.

Задача 1.17. *За произволен полином $f \in k[x_1, \ldots, x_n]$, афинното алгебрично множество*

$$V(f) = \{a \in k^n \mid f(a) = 0\}$$

*се нарича хиперповърхнина.*
*Да се докаже, че произволно афинно алгебрично множество $V(S) \subseteq k^n$, $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ е сечение на хиперповърхнини.*

Задача 1.18. *За произволни $c_1, \ldots, c_n, c_0 \in k$, хиперповърхнините от вида*

$$H = \left\{a \in k^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} c_i a_i = c_0\right\}$$

*се наричат хиперравнини. Да се докаже, че:*
*(i) сечението $\cap_{\alpha \in A} H_\alpha$ на хиперравнини $H_\alpha \subset k^n$ е афинно подпространство на $k^n$;*
*(ii) всяко афинно подпространство $A$ на $k^n$ може да си представи като сечение на не повече от $n$ хиперравнини в $k^n$;*
*(iii) за произволна фамилия от хиперравнини $H_\alpha \subset k^n$, $\alpha \in A$ съществуват $H_{\alpha_1}, \ldots, H_{\alpha_m}$, $m \leq n$, така че $\cap_{\alpha \in A} H_\alpha = H_{\alpha_1} \cap \ldots \cap H_{\alpha_m}$.*

Определение 1.19. *Полиномът*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} c_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \in k[x_1, \ldots, x_n]$$

*се нарича хомогенен от степен $d$, ако всеки моном $c_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ с ненулев коефициент $c_\alpha \neq 0$ е от обща степен $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = d$.*

Задача 1.20. *Афинното алгебрично множество $V \subseteq k^n$ е коника с връх в началото $(0, \ldots, 0) \in k^n$, ако заедно с всяка своя точка $a = (a_1, \ldots, a_n) \in V$ съдържа цялата права $\{ta = (ta_1, \ldots, ta_n) \mid t \in k\} \subset k^n$ през $(0, \ldots, 0)$ и $a$. Да се докаже, че:*
*(i) ако $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ е множество от хомогенни полиноми, то $V(S) \subseteq k^n$ е коника;*
*(ii) сечението на коники в $k^n$ е коника в $k^n$.*

Определение 1.21. *Ако $I_j$, $1 \leq j \leq n$ са идеали в комутативния пръстен с единица $R$, то произведението им е множеството*

$$I_1 \ldots I_n = \left\{ \sum_{i=1}^{m} x_{1,i} x_{2,i} \ldots x_{n,i} \;\middle|\; x_{j,i} \in I_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq i \leq m, \quad m \in \mathbb{N} \right\}$$

*на крайните суми от произведения на елементи от $I_1, \ldots, I_n$.*

Лема 1.22. *Ако $I_j$, $1 \leq j \leq n$ са идеали в комутативния пръстен с единица $R$, то*
*(i) произведението им $I_1 \ldots I_n$ е идеал в $R$, който се съдържа в сечението $\cap_{j=1}^{n} I_j$;*
*(ii) ако идеалите $I_j = \langle S_j \rangle$ се пораждат от подмножествата $S_j \subset R$, то произведението им*

$$I_1 \ldots I_n = \langle S_1 S_2 \ldots S_n \rangle$$

*се поражда от произведението*

$$S_1 S_2 \ldots S_n = \{x_1 x_2 \ldots x_n \mid x_j \in S_j, \quad 1 \leq j \leq n\}$$

*на съответните пораждащи множества.*

**Доказателство:** (i) За произволни $x_{j,i}, x'_{j,k} \in I_j$, $1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq k \leq l$ и $r \in R$ е в сила

$$\sum_{i=1}^{m} x_{1,i} \ldots x_{n,i} - \sum_{k=1}^{l} x'_{1,k} \ldots x'_{n,k} = \sum_{i=1}^{m} x_{1,i} \ldots x_{n,i} + \sum_{k=1}^{l} (-x'_{1,k}) x'_{2,k} \ldots x'_{n,k} \in I_1 \ldots I_n$$

и

$$r \left( \sum_{i=1}^{m} x_{1,i} \ldots x_{n,i} \right) = \sum_{i=1}^{m} (r x_{1,i}) x_{2,i} \ldots x_{n,i} \in I_1 I_2 \ldots I_n.$$

Следователно $I_1 \ldots I_n \triangleleft R$ е идеал в $R$.
От $x_{1,i} \ldots x_{j,i} \ldots x_{n,i} \in I_j \triangleleft R$ получаваме $\sum\limits_{i=1}^{m} x_{1,i} \ldots x_{j,i} \ldots x_{n,i} \in I_j$. Следователно $I_1 \ldots I_j \ldots I_n \subseteq I_j$ за всички $1 \leq j \leq n$ и $I_1 \ldots I_n \subseteq I_1 \cap \ldots \cap I_n$.

(ii) Всеки елемент $x$ на $I_1 \dots I_n$ е сума на произведения $x_1 \dots x_n$ с $x_j \in I_j = \langle S_j \rangle$. Представяме $x_j = \sum\limits_{i_j=1}^{m_j} s_{j,i_j} r_{j,i_j}$ чрез някакви $s_{j,i_j} \in S_j$, $r_{j,i_j} \in R$ и прилагаме дистрибутивния закон за събиране и умножение в комутативния пръстен $R$, за да получим

$$x_1 \dots x_n = \sum_{i_1=1}^{m_1} \dots \sum_{i_n=1}^{m_n} s_{1,i_1} \dots s_{n,i_n} r_{1,i_1} \dots r_{n,i_n}.$$

Всяко събираемо $s_{1,i_1} \dots s_{n,i_n} r_{1,i_1} \dots r_{n,i_n} \in S_1 \dots S_n R \subseteq \langle S_1 \dots S_n \rangle$. Поради затвореността на идеала $\langle S_1 \dots S_n \rangle$ относно събиране, оттук следва, че $x_1 \dots x_n \in \langle S_1 \dots S_n \rangle$ и $x \in \langle S_1 \dots S_n \rangle$. Следователно $I_1 \dots I_n \subseteq \langle S_1 \dots S_n \rangle$.
Обратно, всеки елемент $y$ на $\langle S_1 \dots S_n \rangle$ е крайна сума на произведения от вида $s_1 \dots s_{n-1} s_n r$ за някакви $s_j \in S_j \subseteq \langle S_j \rangle = I_j$, $r \in R$. Вземайки предвид $s_n r \in \langle S_n \rangle = I_n$ получаваме $s_1 \dots s_{n-1} s_n r \in I_1 \dots I_{n-1} I_n$. Сумата $y$ на краен брой елементи на $I_1 \dots I_n$ остава в $I_1 \dots I_n$, така че $\langle S_1 \dots S_n \rangle \subseteq I_1 \dots I_n$, Q.E.D.

Лема 1.23. *(i) Ако $I_j \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ са идеали в $k[x_1, \dots, x_n]$, то произведението им определя афинното алгебрично множество $V(I_1 \dots I_n) = \cup_{j=1}^n V(I_j)$.*
*(ii) Произведението $S_1 S_2 \dots S_n$ на произволни подмножества от полиноми $S_j \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ определя афинното алгебрично множество*

$$V(S_1 S_2 \dots S_n) = \cup_{j=1}^n V(S_j);$$

*(iii) Ако $I_j \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ са идеали в $k[x_1, \dots, x_n]$, то сечението им определя афинното алгебрично множество $V(I_1 \cap \dots \cap I_n) = V(I_1) \cup \dots \cup V(I_n)$.*

**Доказателство:** (i) Прилагайки Лема 1.13 (i), от $I_1 \dots I_j \dots I_n \subseteq I_j$ получаваме обратното включване $V(I_1 \dots I_j \dots I_n) \supseteq V(I_j)$ за $\forall 1 \leq j \leq n$. Това доказва, че $V(I_1 \dots I_n) \supseteq \cup_{j=1}^n V(I_j)$.
Да допуснем, че съществува точка $a \in V(I_1 \dots I_n) \setminus \left(\cup_{j=1}^n V(I_j)\right)$. Тогава за всяко $1 \leq j \leq n$ можем да изберем полином $f_j \in I_j$ с $f_j(a) \neq 0$, така че $(f_1 \dots f_j \dots f_n)(a) = f_1(a) \dots f_j(a) \dots f_n(a) \neq 0$. Съгласно $f_1 \dots f_j \dots f_n \in I_1 \dots I_n$, това противоречи на $a \in V(I_1 \dots I_n)$ и доказва, че $V(I_1 \dots I_n) = \cup_{j=1}^n V(I_j)$.
(ii) Прилагайки доказаното условие (i) към идеалите $I_j = \langle S_j \rangle$, получаваме, че $V(\langle S_1 \rangle \dots \langle S_n \rangle) = \cup_{j=1}^n V(\langle S_j \rangle)$. Съгласно Лема 1.22 (ii), $\langle S_1 \rangle \dots \langle S_n \rangle = \langle S_1 \dots S_n \rangle$, така че $V(\langle S_1 \dots S_n \rangle) = \cup_{j=1}^n V(\langle S_j \rangle)$. По Лема 1.12 (iii) имаме равенствата $V(\langle S_1 \dots S_n \rangle) = V(S_1 \dots S_n)$ и $V(\langle S_j \rangle) = V(S_j)$, откъдето $V(S_1 \dots S_n) = \cup_{j=1}^n V(S_j)$.
(iii) От $I_1 \dots I_n \subseteq I_1 \cap \dots \cap I_n \subseteq I_j$ следва $V(I_j) \subseteq V(I_1 \cap \dots \cap I_n) \subseteq V(I_1 \dots I_n)$ за $\forall 1 \leq j \leq n$, съгласно Лема 1.13 (i). Следователно

$$V(I_1) \cup \dots \cup V(I_n) \subseteq V(I_1 \cap \dots \cap I_n) \subseteq V(I_1 \dots I_n).$$

Комбинирайки с доказаното условие (i) получаваме (iii), Q.E.D.

Задача 1.24. *Да се докаже, че:*
*(i) всяка точка $p = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ на афинното пространство $k^n$ е афинно алгебрично множество;*
*(ii) всяко крайно множество от точки $\{p_1, \dots, p_m\} \subset k^n$ е афинно алгебрично множество.*
*Ако $p_i = (p_{i1}, \dots, p_{in}) \in k^n$, $1 \leq i \leq m$, да се намери множество $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n[$ от уравнения на $\{p_1, \dots, p_m\} = V(S)$.*

Задача 1.25. *Афинното алгебрично множество $C \subset k^n$ е крива, ако единствените собствени непразни афинни алгебрични подмножества $X \subsetneq C$ са крайните множества от точки $X = \{p_1, \dots, p_m\}$. Да се докаже, че:*
*(i) афинната права $k$ е крива ;*

*(ii) афинното алгебрично множество*

$$C = V(x_1 + x_2 - x_2^2, \quad x_1 + x_2 - x_3) \subseteq k^3$$

*е крива.*

Задача 1.26. *Да се докаже, че:*
*(i) афинното алгебрично множество $V(x_1x_2^2 - x_1x_3) \subset k^3$ е обединение на хиперравнина и хиперповърхнина, пресичащи се в крива.*
*(ii) афинното алгебрично множество $V(x_1^4 - x_1x_3, x_1^3 - x_1x_2) \subset k^3$ е обединение на хиперравнина и крива, които се пресичат в началото $(0,0,0) \in k^3$;*
*(iii) ако полето $k$ е с характеристика, различна от 2, то афинното алгебрично множество*

$$V((x_1 - 2)(x_1^2 - x_2), \quad x_2(x_1^2 - x_2), \quad (x_3 + 1)(x_1^2 - x_2)) \subset k^3$$

*е обединение на хиперповърхнина и точка извън нея.*

Задача 1.27. *Нека $k$ е алгебрично затворено поле, чиято характеристика $\mathrm{char}(k) \neq 2, 3$ е различна от 2 и 3, а*

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2)(x_1 - x_2 + x_3), \\ f_3(x_1, x_2, x_3) &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_1 - x_2 + x_3), \\ f_2(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2)(x_2^2 x_3 - x_1^3 + x_1 x_2^2), \\ f_4(x_1, x_2, x_3) &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(x_2^2 x_3 - x_1^3 + x_1 x_2^2) \end{aligned}$$

*са полиноми на $x_1, x_2, x_3$ коефициенти от $k$. Да се докаже, че афинното алгебрично множество $V(f_1, \ldots, f_4) \subset k^3$, определено от тези полиноми е обединение на пет криви.*

## 3. Топология на Зариски.

Определение 1.28. *Топология върху множество $X$ е фамилия $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ от подмножества, така че*
*(i) $X \in \mathcal{U}, \quad \emptyset \in \mathcal{U}$;*
*(ii) $\cup_{\alpha \in \Sigma} U_\alpha \in \mathcal{U}$ за произволни подмножества $\Sigma \subseteq A$;*
*(iii) $U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k} \in \mathcal{U}$ за произволни крайни подмножества $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq A$.*
*Подмножествата $U_\alpha \in \mathcal{U}$ се наричат отворени, а допълненията им $Z_\alpha = X \setminus U_\alpha$ са затворени.*
*Множество $X$, снабдено с топология $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ се нарича топологично пространство.*

Топология върху $X$ може да се зададе с фамилия $\mathcal{Z} = \{Z_\alpha\}_{\alpha \in A}$ от затворени подмножества, така че
(i) $\emptyset \in \mathcal{Z}, \quad X \in \mathcal{Z}$;
(ii) $\cap_{\alpha \in \Sigma} Z_\alpha \in \mathcal{Z}$ за $\forall \Sigma \subseteq A$;
(iii) $Z_{\alpha_1} \cup \ldots \cup Z_{\alpha_k} \in \mathcal{Z}$ за $\forall \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subseteq A$.
Твърдим, че когато $S$ пробягва подмножествата на $k[x_1, \ldots, x_n]$, афините алгебрични множества $V(S) \subseteq k^n$ образуват фамилия от затворени подмножества на афинното пространство $k^n$. Това следва от Лема 1.12 (i), (ii), Лема 1.16 (ii) и Лема 1.23 (ii).

Определение 1.29. *Топологията върху $k^n$, чиито затворени подмножества $\mathcal{Z} = \{V(S)\}_{S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]}$ са афинните алгебрични множества $V(S) \subseteq k^n$ за произволни $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ се нарича топология на Зариски върху $k^n$.*

Определение 1.30. *Затворената обвивка $\overline{M}$ на подмножество $M$ на топологично пространство $X$ е сечението*

$$\overline{M} = \cap_{Z \supseteq M} Z$$

*на всички затворени подмножества $Z \subseteq X$, съдържащи $M$.*

Затворената обвивка $\overline{M}$ на $M$ е минималното затворено подмножество на $X$, съдържащо $M$. Подмножеството $M$ е затворено тогава и само тогава, когато $M = \overline{M}$.

Лема 1.31. *Ако $M \subseteq k^n$ е подмножество на афинното пространство $k^n$, то Зариски затворената обвивка*

$$\overline{M} = VI(M)$$

*съвпада с афинното многообразие на идеала $I(M) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ на $M$.*
*В частност, ако $X \subseteq k^n$ е афинно алгебрично множество, то $X = VI(X)$.*

**Доказателство:** По определение, всеки полином $f \in I(M)$ се анулира върху $M$, така че $M \subseteq VI(M)$. Следователно затвореното множество $VI(M)$ участва в сечението $\cap_{Z \supseteq M} Z = \overline{M}$ и го съдържа, $VI(M) \supseteq \overline{M}$.
За обратното включване $VI(M) \subseteq \overline{M} = \cap_{Z \supseteq M} Z$ е достатъчно да проверим, че $VI(M) \subseteq Z$ за всяко Зариски затворено подмножество $Z \subseteq k^n$, съдържащо $M$. По определение, $Z = V(S)$ за някакво множество от полиноми $S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$. Условието $M \subseteq V(S)$ означава анулиране на всички полиноми $f \in S$ в точките $a \in M$, $f(a) = 0$. Следователно $S \subseteq I(M)$, откъдето $Z = V(S) \supseteq VI(M)$ съгласно Лема 1.13 (i), Q.E.D.

Задача 1.32. *Да се докаже, че $\mathbb{Z}^n$ не е афинно алгебрично подмножество на $\mathbb{C}^n$.*

**Упътване:** Използвайте, че произволен полином $f \in I(\mathbb{Z}^n) \setminus \{0\}$ има представяне

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \sum_{i=0}^{d} c_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) x_n^i \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n-1}][x_n]$$

с коефициенти $c_i(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in I(\mathbb{Z}^{n-1}) \triangleleft \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_{n-1}]$, за да изведете, че идеалът $I(\mathbb{Z}^n) = 0$. Следователно $\mathbb{Z}^n \subsetneq VI(\mathbb{Z}^n) = \mathbb{C}^n$ не е Зариски затворено подмножество.

Лема-Определение 1.33. *Ако $V(S_o)$, $S_o \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$ е афинно алгебрично множество, то $\mathcal{Z}(S_o) := \{V(S) \cap V(S_o) = V(S \cup S_o)\}_{S \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]}$ е фамилия от затворени подмножества на $V(S_o)$.*
*Топологията върху $V(S_o)$ със затворени подмножества $\mathcal{Z}(S_o)$ се нарича топология на Зариски върху $V(S_o)$.*

**Доказателство:** Празното множество $\emptyset = V(k[x_1, \ldots, x_n] \cup S_o)$ и $V(S_o) = V(\{0\} \cup S_o)$ принадлежат на $\mathcal{Z}(S_o)$. От $V(S_\alpha \cup S_o) \in \mathcal{Z}(S_o)$ за $\forall \alpha \in A$ следва, че

$$\cap_{\alpha \in A} V(S_\alpha \cup S_o) = V\left(\cup_{\alpha \in A}(S_\alpha \cup S_o)\right) = V((\cup_{\alpha \in A} S_\alpha) \cup S_o) \in \mathcal{Z}(S_o).$$

Остава да проверим, че афинното алгебрично множество

$$X := V(S_1 \cup S_o) \cup \ldots \cup V(S_m \cup S_o)$$

принадлежи на $\mathcal{Z}(S_o)$ за $\forall S_i \subseteq k[x_1, \ldots, x_n]$, $1 \leq i \leq m$. Съгласно Лема 1.31, $X = VI(X)$. Достатъчно е да установим, че $S_o \subseteq I(X)$, за да получим, че

$X \in \mathcal{Z}(S_o)$. Това е еквивалентно на анулиране на произволен полином $f \in S_o$ върху $X$. Наистина, Лема 1.23 (ii) дава

$$X = V((S_1 \cup S_o) \dots (S_m \cup S_o)).$$

За $\forall f \in S_o$ имаме

$$f^m \in S_o^m \subseteq (S_1 \cup S_o) \dots (S_m \cup S_o).$$

Следователно $f^m$ се анулира върху $V((S_1 \cup S_o) \dots (S_m \cup S_o)) = X$, откъдето и $f$ се анулира върху $X$, Q.E.D.

Определение 1.34. *База $\mathcal{B} = \{U_\beta\}_{\beta \in B}$ на топология $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ е подфамилия $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ от отворени подмножества, така че всяко отворено множество $U_\alpha \in \mathcal{U}$ може да се представи като обединение $U_\alpha = \cup_{\beta \in \Sigma(\alpha)} U_\beta$ на множества $U_\beta$ от базата, индексирани с подмножество $\Sigma(\alpha)$ на $B$, зависещо от $\alpha$.*

Определение 1.35. *За произволни полиноми $f$ извън идеала $I(X)$ на афинно алгебрично множество $X$, подмножествата*

$$U_f = \{x \in X \quad | \quad f(x) \neq 0\}$$

*се наричат главни Зариски отворени подмножества на $X$.*

Лема 1.36. *Ако $V(S_o) \subseteq k^n$ е афинно алгебрично множество, то фамилията $\{U_f\}_{f \not\in IV(S_o)}$ на главните Зариски отворени подмножества, отговарящи на полиномите $f(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus IV(S_o)$, които не се анулират тъждествено върху $V(S_o)$, е база на топологията на Зариски върху $V(S_o)$.*

**Доказателство:** Всяко Зариски отворено подмножество на афинно алгебрично множество $V(S_o)$ е от вида

$$V(S_o) \setminus V(S \cup S_o) =$$

$\{a \in V(S_o) \ | \ f(a) \neq 0$ за някакъв полином $f \in S \setminus IV(S_o)\} = \cup_{f \in S \setminus IV(S_o)} U_f$, Q.E.D.

## 4. Неприводимост

Определение 1.37. *Непразното топологично пространство $V$ е неприводимо, ако всяко разлагане $V = Z_1 \cup Z_2$ като обединение на затворени подмножества $Z_i \subseteq V$ има $Z_1 = V$ или $Z_2 = V$.*

Определение 1.38. *Афинните алгебрични множества, които са неприводими относно топологията на Зариски се наричат афинни алгебрични многообразия.*

Определение 1.39. *Идеалът $\mathfrak{p}$ в комутативен пръстен с единица $R$ е прост, ако от $ab \in \mathfrak{p}$ за $a, b \in R$ следва $a \in \mathfrak{p}$ или $b \in \mathfrak{p}$.*

Лема 1.40. *Афинно алгебрично множество $V(S) \subseteq \overline{k}^n$ е афинно многообразие тогава и само тогава, когато идеалът $I(V(S)) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ е прост.*

**Доказателство:** Да допуснем, че $X = V(S) \subseteq k^n$ е афинно алгебрично многообразие, чийто идеал $I(X) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ не е прост. Тогава съществуват полиноми $f, g \in k[x_1, \dots, x_n] \setminus I(X)$ с $fg \in I(X)$. Съгласно Лема 1.31 имаме $X = VI(X)$. Твърдим, че $V(f) \not\supseteq VI(X) = X$ и $V(g) \not\supseteq VI(X) = X$, защото предположението $V(f) \supseteq X$ води до $f|_X = 0$, откъдето $f \in I(X)$, противно на избора на $f \not\in I(X)$. От друга страна, $V(fg) \supseteq VI(X) = X$, съгласно Лема 1.13(i). Прилагаме Лема 1.23(ii) и получаваме

$$X = V(fg) \cap X = [V(f) \cup V(g)] \cap X = [V(f) \cap X] \cup [V(g) \cap X].$$

Подмножествата $V(f) \cap X$ и $V(g) \cap X$ на $X$ са затворени и различни от $X$ съгласно $X \not\subseteq V(f)$, $X \not\subseteq V(g)$. Това противоречи на неприводимостта на $X$ и доказва простотата на идеала на неприводимо афинно алгебрично множество. Обратно, нека $X = V(S) \subseteq k^n$ е афинно алгебрично множество с прост идеал $I(X) \triangleleft k[x_1, \ldots, x_n]$ и $X = Z_1 \cup Z_2$ за затворени $Z_i \subsetneq X$. Тогава

$$I(X) = I(Z_1 \cup Z_2) = I(Z_1) \cap I(Z_2)$$

съгласно Лема 1.16(iii). Въз основа на Лема 1.13(ii), от $Z_i \subseteq X$ следва $I(Z_i) \supseteq I(X)$. Допускането $I(X) = I(Z_i)$ и прилагането на Лема 1.31 водят до $X = VI(X) = VI(Z_i) = Z_i$, противно на предположението $Z_i \subsetneq X$. Това доказва $I(Z_i) \supsetneq I(X)$ за $1 \leq i \leq 2$. Избираме полиноми $f_i \in I(Z_i) \setminus I(X)$ и забелязваме, че

$$f_1 f_2 \in I(Z_1)I(Z_2) \subseteq I(Z_i) \cap I(Z_2) = I(X).$$

Това противоречи на простотата на идеала $I(X)$ и доказва неприводимостта на афинните алгебрични множества $X = V(S)$ с прост идеал $I(X)$, Q.E.D.

Задача 1.41. *Да се докаже, че ако $k$ е безкрайно поле, то*

$$X = \{(x, x) \in k^2 \mid x \neq 1\}$$

*не е афинно алгебрично подмножество на $k^2$.*

**Упътване:** Използвайте, че $X$ е непразно собствено подмножество на кривата $V(x_1 - x_2) \subset k^2$.

Определение 1.42. *Подмножеството $M$ на топологично пространство $X$ е навсякъде гъсто, ако затворената обвивка $\overline{M} = X$ съвпада с $X$.*

Например, подмножеството $M$ на афинно многообразие $X$ е Зариски навсякъде гъсто тогава и само тогава, когато $VI(M) = X$.

Определение 1.43. *Околност $V_p$ на точка $p$ от топологично пространство $X$ е подмножество $V_p \subset X$, което съдържа $p$ заедно с някакво отворено множество $p \in U_p \subseteq V_p$.*

Лема 1.44. *Подмножеството $M$ на топологично пространство $X$ е навсякъде гъсто тогава и само тогава, когато за всяка точка $p \in X$ и за всяка околност $V_p$ на $p$ е в сила $M \cap V_p \neq \emptyset$.*

**Доказателство:** Да допуснем, че $\overline{M} = X$, но съществува околност $V_p$ на $p$, която не пресича $M$. Ако $U_p$ е отворено множество с $p \in U_p \subseteq V_p$, то $U_p \cap M = \emptyset$. Следователно $Z_p := X \setminus U_p$ е затворено подмножество на $X$, съдържащо $M$, а оттам и затворената обвивка $\overline{M} = \cap_{Z \supseteq M} Z$, която е сечението на затворените подмножества $X \supseteq Z \supseteq M$. Оттук $Z_p = \overline{M} = X$ и $U_p = X \setminus Z_p = \emptyset$, противно на $p \in U_p$. С това установихме, че ако $M$ е навсякъде гъсто, то $M$ пресича всички околности на точки от $X$.
Обратно, нека $M \cap V_p \neq \emptyset$ за произволна околност $V_p$ на точка $p \in X$. Ако затворената обвивка $\overline{M}$ е собствено затворено подмножество на $X$, то $U := X \setminus \overline{M}$ е непразно отворено подмножество. Разглеждаме $U$ като околност $V_q = U$ на всяка своя точка $q \in U$ и получаваме, че $M \cap V_q = M \cap (X \setminus \overline{M}) \neq \emptyset$, което противоречи на $M \subseteq \overline{M}$. Следователно $\overline{M} = X$ и $M$ е навсякъде гъсто в $X$, Q.E.D.

Твърдение 1.45. *Следните условия са еквивалентни за афинно алгебрично множество $X \subseteq k^n$:*
*(i) $X$ е неприводимо, т.е. $X$ е афинно многообразие;*
*(ii) всеки две непразни Зариски отворени подмножества $U, V \subset X$ имат непразно сечение $U \cap V \neq \emptyset$;*

*(iii) всяко непразно Зариски отворено подмножество $U$ на $X$ е навсякъде гъсто в $X$.*

**Доказателство:** $(i) \Rightarrow (ii)$ Да допуснем противното и да изберем непразни Зариски отворени подмножества $U, V$ с $U \cap V = \emptyset$. Тогава $Y := X - U$ и $Z := X - V$ са собствени Зариски затворени подмножества с $Y \cup Z = X$, което противоречи на неприводимостта на $X$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Да предположим, че $X$ е приводимо и се представя като обединение $X = Y \cup Z$ на собствени Зариски затворени подмножества $Y, Z$. Тогава $U := X - Y$ и $V := X - Z$ са непразни Зариски отворени подмножества с $U \cap V = \emptyset$, което противоречи на допускането (ii).
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Да разгледаме Зариски отворено подмножество $\emptyset \neq U \subset X$, точка $x \in X$ и околност $V_x \subset X$ на $x$. По определението за околност съществува Зариски отворено подмножество $W_x \subset X$, така че $x \in W_x \subseteq V_x$. По предположение, $U \cap W_x \neq \emptyset$, откъдето $U \cap V_x \neq \emptyset$. Съгласно Лема 1.44, това е достатъчно условие за гъстотата $\overline{U} = X$ на $U$ в $X$, .
$(iii) \Rightarrow (ii)$ Нека всяко непразно Зариски отворено подмножество $U \subset X$ е навсякъде гъсто в $X$. Произволно Зариски отворено $\emptyset \neq V \subset X$ е околност на всяка своя точка $x \in V$. Следователно $U \cap V = \emptyset$, Q.E.D.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.46. *Топологията $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ върху $X$ се нарича Хаусдорфова, ако произволни различни точки $x, y \in X$ имат непресичащи се околности $W_x, W_y$.*

Вземайки предвид, че от условие (i) на Твърдение 1.45 следва условие (ii), получаваме следното

СЛЕДСТВИЕ 1.47. *Топологията на Зариски върху неприводимо алгебрично множество $V$ не е Хаусдорфова.*