

Функционално поле на алгебрично многообразие. Локален пръстен на точка.

1. Регулярни и рационални функции. Функционално поле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. *Квази-афинно (квази-проективно) многообразие е непразно сечение $V \cap U$ на афинно (проективно) алгебрично многообразие V със Зариски отворено подмножество U на \bar{k}^n , съответно на $\mathbb{P}^n(\bar{k})$.*

Квази-афинните и квази-проективните многообразия $V \cap U$ са неприводими съгласно разглежданията от доказателството на Твърдение 6.32(iii).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.2. *Нека $V \subseteq \bar{k}^n$ е квази-афинно многообразие, $p \in V$, а $W(p)$ е Зариски отворена околност на p , върху V . Функция $f : W(p) \rightarrow \bar{k}$ е регулярна в точка p , ако съществува Зариски отворена околност $W'(p) \subseteq W(p)$, в която $f = \frac{g}{h}$ се представя като частно на елементи $g, h \in \bar{k}[V]$ на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$ на V с $h(p) \neq 0$.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. *Нека $V \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$ е квази-проективно многообразие, $p \in V$, а $W(p)$ е Зариски отворена околност на p върху V . Функция $f : W(p) \rightarrow \bar{k}$ е регулярна в точка p , ако за всички стандартни афинни отворени подмножества $U_i = \{x \in \mathbb{P}^n(\bar{k}) \mid x_i \neq 0\} \simeq \bar{k}^n$ на $\mathbb{P}^n(\bar{k})$ с $W(p) \cap U_i \neq \emptyset$, ограниченията $f : W(p) \cap U_i \rightarrow \bar{k}$ са регулярни в p функции.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. *Функция $f : W \rightarrow \bar{k}$ е регулярна в Зариски отворено подмножество W на квази-афинно или квази-проективно многообразие V , ако f е регулярна във всяка точка p на W .*

ПРИМЕР 7.5. *Ако $X = \{(x, y) \in \bar{k}^2 \mid x^5 = y^2 + y\}$, то функцията $\frac{x}{y}$ не е регулярна върху точките $(a_1, 0) \in X$. Уравнението $x^5 = 0$ има единствено решение $x = 0$, така че $\frac{x}{y}$ е регулярна върху $X \setminus \{(0, 0)\}$. Функцията $\frac{y}{x}$ не е регулярна върху точките $(0, a_2) \in X$. Уравнението $y^2 + y = y(y + 1) = 0$ има две решения - $y_1 = 0$ и $y_2 = -1$, така че $\frac{y}{x}$ е регулярна върху $X \setminus \{(0, 0), (0, -1)\}$.*

Да разгледаме наредените двойки (W, f) , където W е непразно Зариски отворено подмножество на квази-афинно или квази-проективно многообразие V , а $f : W \rightarrow \bar{k}$ е функция, регулярна в W . Двойките (W_1, f_1) и (W_2, f_2) са еквивалентни, $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$, ако съществува непразно Зариски отворено подмножество $\emptyset \neq W \subseteq W_1 \cap W_2$, върху което $f_1|_W \equiv f_2|_W$ съвпадат. Да отбележим, че сечението на непразни Зариски отворени подмножества W_1, W_2 на квази-афинно или квази-проективно многообразие V е непразно. В противен случай имаме разлагане $V = (V \setminus W_1) \cup (V \setminus W_2)$ в обединение на Зариски затворените $V \setminus W_j$ и $V = V \setminus W_j$ за някое $1 \leq j \leq 2$, съгласно неприводимостта на V . В резултат, $W_j = \emptyset$, което е противоречие. Твърдим, че определената по-горе релация $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$ е релация на еквивалентност. Ясно е, че $(W, f) \sim (W, f)$ и $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$ е равносилно на $(W_2, f_2) \sim (W_1, f_1)$. Ако $(W_1, f_1) \sim (W_2, f_2)$ и $(W_2, f_2) \sim (W_3, f_3)$, то избираме Зариски отворени

$\emptyset \neq W_{12} \subseteq W_1 \cap W_2$, $\emptyset \neq W_{23} \subseteq W_2 \cap W_3$ с $f_1|_{W_{12}} = f_2|_{W_{12}}$, $f_2|_{W_{23}} = f_3|_{W_{23}}$. В резултат, върху Зариски отвореното подмножество $\emptyset \neq W = W_{12} \cap W_{23}$ имаме $f_1|_W = f_2|_W = f_3|_W$, откъдето $(W_1, f_1) \sim (W_3, f_3)$. Оттук следва, че двойките (W, f) се разбиват на непресичащи се класове на еквивалентност $\overline{(W, f)}$. Определяме събиране и умножение на класове на еквивалентност $\overline{(W_j, f_j)}$ чрез техни представители

$$\overline{(W_1, f_1)} + \overline{(W_2, f_2)} := \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 + f_2)}, \quad \overline{(W_1, f_1)} \cdot \overline{(W_2, f_2)} := \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 f_2)}.$$

Определението е коректно, т.е. не зависи от избора на представители на класовете на еквивалентност. По-точно, ако $(W_i, f_i) \sim (W'_i, f'_i)$ с $f_i|_{U_i} = f'_i|_{U_i}$ за Зариски отворени $\emptyset \neq U_i \subseteq W_i \cap W'_i$, то $\emptyset \neq U_o := U_1 \cap U_2 \subseteq (W_1 \cap W'_1) \cap (W_2 \cap W'_2)$ е непразно Зариски отворено подмножество на V , върху което $f_1 + f_2|_{U_o} = f'_1 + f'_2|_{U_o}$, $f_1 f_2|_{U_o} = f'_1 f'_2|_{U_o}$.

ЛЕМА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.6. *Множеството $\overline{k(V)}$ на класовете на еквивалентност $\overline{(W, f)}$ е поле, което се нарича функционално поле на квази-афинното или квази-проективното многообразие V .*

Доказателство: Комутативните и асоциативните закони за събиране и умножение, както и дистрибутивният закон за събиране и умножение зависят от краен брой аргументи $\overline{(W_i, f_i)}$, $1 \leq i \leq m$ с $m = 2$ или $m = 3$. Съгласно неприводимостта на V , сечението $W = \bigcap_{i=1}^m W_i$ е непразно Зариски отворено подмножество на V и гореспоменатите аксиоми в $\overline{k(V)}$ се свеждат до съответните аксиоми в пръстена на функциите $W \rightarrow \overline{k}$. Нулевият елемент на $\overline{k(V)}$ е $\overline{(W, 0)}$, а единичният елемент е $\overline{(W, 1)}$ за произволно непразно Зариски отворено подмножество $W \subseteq V$. Всеки елемент $\overline{(W, f)}$ има противоположен $\overline{(W, -f)}$. Произволен елемент $\overline{(W, f)} \neq \overline{(W', 0)}$ има обратен $\overline{(W \setminus Z(f), f^{-1})}$, където $Z(f)$ е множеството на нулите на f . Зариски отвореното подмножество $W \setminus Z(f)$ на V е непразно, защото в противен случай $W \subseteq Z(f)$ и $f|_W \equiv 0$, противно на $\overline{(W, f)} \neq \overline{(W', 0)}$, Q.E.D.

СЛЕДСТВИЕ 7.7. *Ако U е непразно Зариски отворено подмножество на квази-афинно или квази-проективно многообразие V , то функционалните полета на U и V съвпадат, $\overline{k(U)} = \overline{k(V)}$.*

Доказателство: Твърдим, че всяка двойка (W, f) върху U е двойка върху V . По определение, произволно Зариски отворено подмножество W на U е от вида $W = W' \cap U$ за Зариски отворено подмножество $W' \subseteq V$. Следователно W е Зариски отворено във V и (W, f) е двойка върху V . Оттук следва включването $\overline{k(U)} \subseteq \overline{k(V)}$. Обратно, всеки клас на еквивалентност $\overline{(W_o, f_o)} \in \overline{k(V)}$ има представител $\overline{(W_o \cap U, f_o)} \in \overline{k(U)}$, така че $\overline{k(V)} \subseteq \overline{k(U)}$ и $\overline{k(V)} = \overline{k(U)}$, Q.E.D. В частност, функционалното поле на проективно алгебрично многообразие $V \subseteq \mathbb{P}^n(\overline{k})$ съвпада с функционалното поле $\overline{k(V \cap U_i)}$ на сечението $V \cap U_i$ на V с произволно стандартно афинно отворено подмножество U_i , стига $V \cap U_i \neq \emptyset$.

2. Локален пръстен

ЛЕМА-ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.8. *За произволна точка p на квази-афинно или квази-проективно многообразие V , класовете на еквивалентност $\overline{(W, f)} \in \overline{k(V)}$ с $p \in W$ образуват локален подпръстен $\mathfrak{O}_p(V)$ на $\overline{k(V)}$ с максимален идеал*

$$\mathfrak{M}_p(V) = \{\overline{(W, f)} \in \overline{k(V)} \mid p \in W, f(p) = 0\}. \quad (7.1)$$

Пръстенът $\mathfrak{O}_p(V)$ се нарича локален пръстен на точката p във V .

Доказателство: Подмножеството $\mathcal{O}_p(V)$ на $\bar{k}(V)$ е затворено относно изваждане и умножение, т.е.

$$\overline{(W_1, f_1)} - \overline{(W_2, f_2)} = \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 - f_2)} \in \mathcal{O}_p(V),$$

$$\overline{(W_1, f_1)} \cdot \overline{(W_2, f_2)} = \overline{(W_1 \cap W_2, f_1 f_2)} \in \mathcal{O}_p(V) \quad \text{за } \forall \overline{(W_j, f_j)} \in \mathcal{O}_p(V),$$

защото от $p \in W_1$ и $p \in W_2$ следва $p \in W_1 \cap W_2$. Следователно $\mathcal{O}_p(V)$ е подпръстен на $\bar{k}(V)$.

Елементът $\overline{(W, f)} \in \mathcal{O}_p(V)$ е обратим в $\mathcal{O}_p(V)$, ако съществува обратен елемент $\overline{(W \setminus Z(f), f^{-1})} \in \bar{k}(V)$ с $p \in W \setminus Z(f)$. С други думи, $\overline{(W, f)} \in \mathcal{O}_p(V)^*$ точно когато $f(p) \neq 0$ или необратимостта на $\overline{(W, f)} \in \mathcal{O}_p(V)$ в $\mathcal{O}_p(V)$ е еквивалентна на $\overline{(W, f)} \in \mathfrak{M}_p(V)$. По този начин, всеки собствен идеал в $\mathcal{O}_p(V)$ се съдържа в $\mathfrak{M}_p(V)$ и $\mathfrak{M}_p(V)$ е единственият максимален идеал на $\mathcal{O}_p(V)$, Q.E.D.

От Следствие 7.7 и Лема-Определение 7.8 получаваме непосредствено следното

СЛЕДСТВИЕ 7.9. *За произволно непразно Зариски отворено подмножество U на квази-афинно или квази-проективно многообразие V и произволна точка $p \in U$, локалният пръстен на p в U съвпада с локалния пръстен на p във V , $\mathcal{O}_p(U) = \mathcal{O}_p(V)$.*

В частност, за произволно квази-проективно многообразие $V \subset \mathbb{P}^n(\bar{k})$ и произволно стандартно афинно отворено подмножество $U_i \subset \mathbb{P}^n(\bar{k})$, съдържащо точката $p \in V$, локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V) = \mathcal{O}_p(V \cap U_i)$ съвпадат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.10. *Локалният пръстен на непразно Зариски отворено подмножество U на квази-афинно или квази-проективно многообразие V се определя като сечението*

$$\mathcal{O}_U(V) = \bigcap_{p \in U} \mathcal{O}_p(V)$$

на локалните пръстени на всичките му точки.

По този начин, за произволно Зариски отворено подмножество U на квази-афинно или квази-проективно многообразие V и произволна точка $p \in U$ са в сила включванията на пръстени

$$\mathcal{O}_V(V) \subseteq \mathcal{O}_U(V) \subseteq \mathcal{O}_p(V) \subseteq \bar{k}(V).$$

3. Връзка между афинния координатен пръстен, локалните пръстени и функционалното поле на афинно многообразие.

Определение 4.38 въведе понятията афинен координатен пръстен на афинно алгебрично множество $V \subseteq \bar{k}^n$ и афинен координатен пръстен над k на афинно алгебрично множество V/k , определено над k . За да опишем връзките между афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$ на афинно алгебрично многообразие V , функционалното поле $\bar{k}(V)$ и локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V)$ на $p \in V$ доказваме съпадението на афинните координатни пръстени на квази-афинно многообразие и негово непразно Зариски отворено подмножество.

ЛЕМА 7.11. (i) *Ако $V \subseteq \bar{k}^n$ е квази-афинно многообразие, а $U \subseteq \bar{k}^n$ е Зариски отворено подмножество с $V \cap U \neq \emptyset$, то афинните координатни пръстени $\bar{k}[V] = \bar{k}[V \cap U]$ на V и $V \cap U$ съвпадат.*

(ii) *Ако $V/k \subseteq \bar{k}^n$ е квази-афинно многообразие, определено над k , а $U \subseteq \bar{k}^n$ е Зариски отворено подмножество с $V \cap U \neq \emptyset$, то V и $V \cap U$ има един и същи афинен координатен пръстен $k[V] = k[V \cap U]$ над k .*

Доказателство: (i) Достатъчно е да установим, че идеалите $I(V) = I(V \cap U)$ на V и $V \cap U$ съвпадат. От $V \cap U \subseteq V$ следва, че $I(V \cap U) \supseteq I(V)$. За произволен полином $g(x_1, \dots, x_n) \in I(V \cap U) \subseteq \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ имаме $V \cap U \subseteq Z(g)$. Съгласно

неприводимостта на V , Зариски затворената обвивка $\bar{V} = \overline{V \cap U} \subseteq Z(g)$, така че $g \in I(\bar{V}) \subseteq I(V)$ и $I(V \cap U) \subseteq I(V)$. Това доказва $I(V) = I(V \cap U)$ и $\bar{k}[V] = \bar{k}[V \cap U]$.

(ii) От (i) следва, че

$$I(V)_k = I(V) \cap k[x_1, \dots, x_n] = I(V \cap U) \cap k[x_1, \dots, x_n] = I(V \cap U)_k$$

и $k[V] = k[V \cap U]$, Q.E.D.

ЛЕМА 7.12. (i) Всички максимални идеали в $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ са от вида

$$\mathfrak{N}_p = \langle x_i - p_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$$

за някаква точка $p = (p_1, \dots, p_n) \in \bar{k}^n$.

(ii) Ако $V \subseteq \bar{k}^n$ е афинно многообразие, то всички максимални идеали в афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$ са от вида

$$\mathfrak{M}_p = \langle x_i - p_i + I(V) \mid 1 \leq i \leq n \rangle$$

за някаква точка $p = (p_1, \dots, p_n) \in V$.

Доказателство: (i) Ако $\mathfrak{N} \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ е максимален идеал, то фактор-пръстенът

$$\begin{aligned} L &:= \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{N} = (\bar{k} + \mathfrak{N}/\mathfrak{N})[x_1 + \mathfrak{N}, \dots, x_n + \mathfrak{N}] \simeq \\ &\simeq (\bar{k}/\bar{k} \cap \mathfrak{N})[x_1 + \mathfrak{N}, \dots, x_n + \mathfrak{N}] = \bar{k}[x_1 + \mathfrak{N}, \dots, x_n + \mathfrak{N}] \end{aligned}$$

е поле и крайно породена \bar{k} -алгебра. Съгласно Лема 5.35, елементите $x_i + \mathfrak{N}$ са алгебрични над \bar{k} . Следователно $x_i + \mathfrak{N}$ са алгебрични над k и принадлежат на $\bar{k} \simeq \bar{k} + \mathfrak{N}/\mathfrak{N}$. С други думи, за $\forall 1 \leq i \leq n$ съществува $p_i \in \bar{k}$, така че $x_i + \mathfrak{N} = p_i + \mathfrak{N}$. Оттук, $x_i - p_i \in \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_p := \langle x_i - p_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle \subseteq \mathfrak{N}$. Още повече, алгебричното разширение $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{N}$ на алгебрично затвореното поле \bar{k} съвпада с \bar{k} . Допускането $\mathfrak{N}_p \subsetneq \mathfrak{N}$ за идеалите \mathfrak{N}_p и \mathfrak{N} на $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ води до $0 \subsetneq \mathfrak{N}/\mathfrak{N}_p \subseteq \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/\mathfrak{N} \simeq \bar{k}$ за съответните фактори. Следователно $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_p = \bar{k}$ и $1 \in \mathfrak{N}$. Това противоречи на максималността на идеала \mathfrak{N} и доказва, че $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_p$.

(ii) Всеки идеал I в афинния координатен пръстен $\bar{k}[V] = \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V)$ е фактор $I = J/I(V)$ на идеал $J \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$, съдържащ идеала $I(V)$ на V . За да докажем това твърдение забелязваме, че множеството

$$J := \{f \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \mid f \in I(V) \in I\}$$

на повдиганията на елементите на I е идеал в $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. По-точно, за произволни $f_1, f_2 \in J$ и $f \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ имаме $f_1 - f_2, f f_1 \in J$, съгласно

$$f_1 - f_2 + I(V) = (f_1 + I(V)) - (f_2 + I(V)) \in I, \quad f f_1 + I(V) = (f + I(V))(f_1 + I(V)) \in I.$$

Включването $I(V) \subseteq J$ следва от $g + I(V) = I(V) \in I \triangleleft \bar{k}[V]$ за $\forall g \in I(V)$. От определението на множеството J следва, че $J/I(V) = I$. Фактор-пръстените

$$\bar{k}[V]/I \simeq (\bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V))/(J/I(V)) \simeq \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/J$$

са изоморфни, така че I е максимален идеал в $\bar{k}[V]$ тогава и само тогава, когато J е максимален идеал в $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. В (i) доказахме, че всеки максимален идеал в $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ е от вида

$$J = \langle x_i - p_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle = \mathfrak{N}_p \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$$

за някаква точка $p = (p_1, \dots, p_n) \in \bar{k}^n$. Следователно всеки максимален идеал в $\bar{k}[V]$ е от вида

$$I = J/I(V) = \langle x_i - p_i + I(V) \mid 1 \leq i \leq n \rangle = \mathfrak{M}_p \triangleleft \bar{k}[V].$$

От включването $I(V) \subseteq J = \mathfrak{N}_p$ следва $V = ZI(V) \supseteq Z(\mathfrak{N}_p) = \{p\}$ за афинното многообразие V , Q.E.D.

Следващата лема напомня локализацията на комутативна област с единица R по прост идеал $\mathfrak{p} \triangleleft R$.

ЗАДАЧА 7.13. Нека R е комутативна област с единица, $F(R)$ е полето от частни на R , а \mathfrak{p} е прост идеал в R . Разглеждаме множеството $R_{\mathfrak{p}}$ на онези елементи $\alpha \in F(R)$, които имат представител $\frac{a}{b}$ с $a \in R$, $b \in R \setminus \mathfrak{p}$ и подмножеството $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ на $R_{\mathfrak{p}}$, съставено от онези $\alpha \in F(R)$, за които съществува представител $\frac{a}{b}$ с $a \in \mathfrak{p}$, $b \in R \setminus \mathfrak{p}$. Тогава $R_{\mathfrak{p}}$ е локален подпръстен на $F(R)$ с максимален идеал $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$, съдържащ R като подпръстен.

Пръстенът $R_{\mathfrak{p}}$ се нарича локализация на R относно простия идеал \mathfrak{p} и съдържа R като подпръстен.

Упътване: Проверете, че множеството $R_{\mathfrak{p}}$ е затворено относно изваждане и умножение, за да твърдите, че $R_{\mathfrak{p}}$ е подпръстен на $F(R)$. Мултипликативната група $R_{\mathfrak{p}}^*$ на $R_{\mathfrak{p}}$ се състои от онези $\frac{\alpha}{\beta} \in R_{\mathfrak{p}}$, за които $\alpha \notin \mathfrak{p}$. Следователно множеството на необратимите елементи на $R_{\mathfrak{p}}$ съвпада с $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ и $\mathfrak{M}_{\mathfrak{p}}$ е единственият максимален идеал на $R_{\mathfrak{p}}$.

ЛЕМА 7.14. Нека V е квази-афинно многообразие. Тогава:

(i) локалният пръстен

$$\mathcal{O}_p(V) \simeq \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \bar{k}[V], g \notin \mathfrak{M}_p \right\}$$

на точка $p = (p_1, \dots, p_n) \in V$ е изоморфен на локализацията $\bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$ на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$ по максималния идеал

$$\mathfrak{M}_p = \{f \in \bar{k}[V] \mid f(p) = 0\} = \langle x_1 - p_1 + I(V), \dots, x_n - p_n + I(V) \rangle$$

на p в $\bar{k}[V]$;

(ii) $\mathcal{O}_{\bar{V}}(V) \simeq \bar{k}[V]$ за Зариски затворената обвивка $\bar{V} = ZI(V)$;

(iii) функционалното поле $\bar{k}(V)$ е полето от частни $F(\bar{k}[V])$ на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$.

Доказателство: (i) По определение, локализацията на $\bar{k}[V]$ относно максималния идеал \mathfrak{M}_p е пръстенът

$$\bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} := \left\{ \frac{f}{g} \mid f, g \in \bar{k}[V], g \notin \mathfrak{M}_p \right\}.$$

Елементите на $\bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$ са регулярни функции в p , така че имаме хомоморфизъм на пръстени

$$\begin{aligned} \varphi : \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} &\longrightarrow \mathcal{O}_p(V), \\ \varphi\left(\frac{f}{g}\right) &= \overline{\left(V \setminus Z(g), \frac{f}{g}\right)} \end{aligned}$$

за Зариски отворената околност $V \setminus Z(g)$ на p върху V . Хомоморфизмът φ е влагане, защото $\overline{\left(V \setminus Z(g), \frac{f}{g}\right)} = \overline{(U, 0)}$ означава съществуване на непразно Зариски отворено подмножество $U_o \subseteq (V \setminus Z(g)) \cap U$ с $\frac{f}{g}|_{U_o} = 0$. В резултат, $U_o \subseteq Z\left(\frac{f}{g}\right) \subseteq Z(f)$ и Зариски затворената обвивка $V = \overline{U_o} \subseteq Z(f)$. Това води до твърдението анулиране на f върху V и $\ker(\varphi) = \{0\}$. От друга страна, φ е епиморфизъм, защото всеки клас на еквивалентност $\overline{(U, \psi)} \in \mathcal{O}_p(V)$ задава регулярна функция $\psi : U \rightarrow \bar{k}$ в Зариски отворена околност U на p . По определението за регулярност на ψ в точка p съществува Зариски отворена околност

$p \in U_o \subseteq U$, в която $\psi = \frac{f}{g} : U_o \rightarrow \bar{k}$ е частно на $f, g \in \bar{k}[V]$ с $g(p) \neq 0$. Сега $\frac{f}{g} \in \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$ и

$$\varphi\left(\frac{f}{g}\right) = \overline{\left(V \setminus Z(g), \frac{f}{g}\right)} = \overline{\left(U_o, \frac{f}{g}\right)} = \overline{(U_o, \psi)} = \overline{(U, \psi)},$$

откъдето $\varphi : \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \rightarrow \mathcal{O}_p(V)$ е изоморфизъм на пръстени.

(ii) От определението на $\mathcal{O}_{\bar{V}}(\bar{V})$ и (i) имаме

$$\mathcal{O}_{\bar{V}}(\bar{V}) = \bigcap_{p \in \bar{V}} \mathcal{O}_p(\bar{V}) = \bigcap_{p \in \bar{V}} \mathcal{O}_p(V) = \bigcap_{p \in \bar{V}} \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}.$$

Остава да проверим, че

$$\bigcap_{p \in \bar{V}} \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} = \bar{k}[V].$$

Включването $\bigcap_{p \in \bar{V}} \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \supseteq \bar{k}[V]$ е ясно.

Обратно, нека $\frac{f}{g} \in \bigcap_{p \in \bar{V}} \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \subseteq F(\bar{k}[V])$, където $F(\bar{k}[V])$ е полето от частни на $\bar{k}[V]$. Съгласно (i) елементът $g \in \bar{k}[V] = \bar{k}[\bar{V}]$ не принадлежи на нито един максимален идеал $\mathfrak{M}_p, p \in \bar{V}$ на $\bar{k}[\bar{V}]$, така че $g \in \bar{k}[\bar{V}]^*$ е обратим в $\bar{k}[\bar{V}]$. Оттук, $\frac{1}{g} \in \bar{k}[\bar{V}]$ и $\frac{f}{g} \in \bar{k}[\bar{V}] = \bar{k}[V]$.

(iii) За $F(\bar{k}[V]) \subseteq \bar{k}(V)$ използваме, че $\bar{k}(V)$ е поле, съдържащо $\bar{k}[V]$. За обратното включване $\bar{k}(V) \subseteq F(\bar{k}[V])$ да изберем произволен клас на еквивалентност $\overline{(U, \psi)} \in \bar{k}(V)$ и да отбележим, че регулярността на ψ в произволна точка $p \in U$ дава представяне $\psi = \frac{f}{g}$ с $f, g \in \bar{k}[V]$, $g(p) \neq 0$. Тогава можем да считаме, че $\frac{f}{g} \in \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \subseteq F(\bar{k}[V])$. Това доказва, че $\bar{k}(V) = F(\bar{k}[V])$, Q.E.D.

Ще използваме наготово Теоремата на Hilbert за базиса, която гласи, че пръстенът $k[x_1, \dots, x_n]$ на полиномите на няколко променливи с коефициенти от поле k е нютеров. По определение това означава, че всеки идеал в $k[x_1, \dots, x_n]$ е крайно породен. Оттук, афинният координатен пръстен $k[X]$ над k на квази-афинно многообразие $X/k \subseteq \bar{k}^n$, определено над k е нютеров пръстен. Това се дължи на наличието на епиморфизъм $\pi : k[x_1, \dots, x_n] \rightarrow k[X]$, който издърпва идеалите $I \triangleleft k[X]$ в идеали $\pi^{-1}(I) \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$. Непосредствено се проверява, че ако $\pi^{-1}(I) = \langle \tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s \rangle \triangleleft k[x_1, \dots, x_n]$ се поражда от полиноми $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_s \in k[x_1, \dots, x_n]$, то $I = \langle \pi(\tilde{f}_1), \dots, \pi(\tilde{f}_s) \rangle \triangleleft k[X]$ се поражда от образите $\pi(\tilde{f}_i)$ на \tilde{f}_i в афинния координатен пръстен $k[X]$.

СЛЕДСТВИЕ 7.15. Нека $V \subseteq \bar{k}^n$ е квази-афинно многообразие, $p \in V$ и \mathfrak{M}_p е максималният идеал на точката p в афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$. Тогава всеки собствен идеал I в локалния пръстен $\mathcal{O}_p(V)$ на p във V е локализация $I = J_{\mathfrak{M}_p}$ на идеал $J \subseteq \mathfrak{M}_p \subset \bar{k}[V]$. Произволна пораждаща система f_1, \dots, f_s на J като идеал в $\bar{k}[V]$ поражда I като идеал в $\mathcal{O}_p(V)$. В частност, $\mathcal{O}_p(V)$ е нютерова локална област.

Доказателство: Нека J е идеал в $\bar{k}[V]$, съдържащ се в \mathfrak{M}_p . Тогава локализацията му $J_{\mathfrak{M}_p}$ се състои от онези елементи на $\bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \simeq \mathcal{O}_p(V)$, които имат представяне $\frac{f}{g}$ с $f \in J$, $g \in \bar{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p$. Непосредствено се проверява, че $J_{\mathfrak{M}_p}$ е идеал в $\bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$. По-точно, произволни $f_1, f_2 \in J$, $f \in \bar{k}[V]$ и $g_1, g_2, g \in \bar{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p$ е в сила

$$\frac{f_1}{g_1} - \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_1 g_2 - f_2 g_1}{g_1 g_2} \in J_{\mathfrak{M}_p} \quad \text{и} \quad \frac{f_1}{g_1} \frac{f}{g} = \frac{f_1 f}{g_1 g} \in J_{\mathfrak{M}_p},$$

съгласно $f_1 g_2 - f_2 g_1, f_1 f \in J$ и $g_1 g_2, g_1 g \notin \mathfrak{M}_p$ поради простотата на идеала \mathfrak{M}_p . Идеалът $J_{\mathfrak{M}_p} \subsetneq \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$ е собствен, защото в противен случай съществуват $f \in J$ и $g \in \bar{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p$ с $\frac{f}{g} = 1$. В резултат, $g = f \in J \subseteq \mathfrak{M}_p$, противно на избора на $g \notin \mathfrak{M}_p$.

Нека $I \triangleleft \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p} \simeq \mathcal{O}_p(V)$ е произволен собствен идеал $I \subsetneq \bar{k}[V]_{\mathfrak{M}_p}$. Тогава множеството

$$J = \left\{ f \in \bar{k}[V] \mid \exists g \in \bar{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p \text{ с } \frac{f}{g} \right\}$$

на числителите на елементите на I е идеал в $\bar{k}[V]$, съдържащ се в \mathfrak{M}_p . За да проверим това твърдение да забележим, че $J = I \cap \bar{k}[V]$. По-точно, $J \subseteq I$, защото за $\forall f \in J$ с $\frac{f}{g} \in I \triangleleft \mathcal{O}_p(V)$ за някое $g \in \bar{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p \subseteq \mathcal{O}_p(V)$ имаме $f = \left(\frac{f}{g}\right)g \in I \triangleleft \mathcal{O}_p(V)$. По определение, J е подмножество на $\bar{k}[V]$, така че $J \subseteq I \cap \bar{k}[V]$. Обратно, ако $f \in I \cap \bar{k}[V]$, то f има представяне $f = \frac{f}{1} \in I$ с $1 \in \bar{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p$, откъдето $f \in J$ съгласно определението на J .

Сега за произволни $f_1, f_2 \in J$ и $f \in \bar{k}[V]$ имаме $f_1 - f_2 \in I \cap \bar{k}[V] = J$, защото $(I, +)$ и $(\bar{k}[V], +)$ са подгрупи на $(\mathcal{O}_p(V), +)$. Освен това, $f_1 f \in I \cap \bar{k}[V] = J$, защото $I \triangleleft \mathcal{O}_p(V)$ и $\bar{k}[V]$ е подпръстен на $\mathcal{O}_p(V)$. Ще проверим, че локализацията $J_{\mathfrak{M}_p} = I$ на J относно \mathfrak{M}_p съвпада с I . От една страна, за $\forall f \in J = I \cap \bar{k}[V]$ и $\forall g \in \bar{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p \subset \mathcal{O}_p(V)$ имаме $\frac{f}{g} = f \left(\frac{1}{g}\right) \in I \triangleleft \mathcal{O}_p(V)$. От друга страна, ако $\frac{f}{g} \in I$, то $f \in J$, $g \in \bar{k}[V] \setminus \mathfrak{M}_p$, така че $I = J_{\mathfrak{M}_p}$.

Ако $f_1, \dots, f_s \in J = I \cap \bar{k}[V]$ са пораждащи на J като идеал в $\bar{k}[V]$, то $\langle f_1, \dots, f_s \rangle_{\mathcal{O}_p(V)} = f_1 \mathcal{O}_p(V) + \dots + f_s \mathcal{O}_p(V) \subseteq I$. Произволен елемент $\frac{f}{g} \in I$ има числител $f \in J = \langle f_1, \dots, f_s \rangle_{\bar{k}[V]}$, който се представя като $f = f_1 h_1 + \dots + f_s h_s$ за някакви $h_1, \dots, h_s \in \bar{k}[V]$. Следователно

$$\frac{f}{g} = f_1 \frac{h_1}{g} + \dots + f_s \frac{h_s}{g} \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle_{\mathcal{O}_p(V)}$$

и $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle_{\mathcal{O}_p(V)}$, Q.E.D.

ЗАДАЧА 7.16. Дадени са афинна хипер-елиптична крива

$$V = \{(x, y) \in \bar{k}^2 \mid y^2 = f_{2n+1}(x)\},$$

където $f_{2n+1}(x) \in \bar{k}[x]$ е полином от степен $2n+1$ с корен $\alpha \in \bar{k}$ и точки $p = (\alpha, 0)$, $q = (\beta, \gamma) \in V$ с $\gamma \neq 0$. Да се докаже, че афинният координатен пръстен

$$\bar{k}[V] = \{a(x) + b(x)y \mid a(x), b(x) \in \bar{k}[x]\}.$$

Да се опишат локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V)$, $\mathcal{O}_q(V)$ и функционалното поле $\bar{k}(V)$ на V .

ЗАДАЧА 7.17. В означенията от Задача 7.16 да се докаже, че афинната хипер-елиптична крива V има проективна обвивка

$$\bar{V} = \left\{ [x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\bar{k}) \mid y^2 z^{2n-1} = z^{2n+1} f_{2n+1}\left(\frac{x}{z}\right) \right\}.$$

Да се опише функционалното поле $\bar{k}(\bar{V})$ на \bar{V} и локалните пръстени $\mathcal{O}_P(\bar{V})$, $\mathcal{O}_Q(\bar{V})$ на точките $P = [\alpha : 0 : 1]$, $Q = [\beta : \gamma : 1] \in \bar{V}$.

ЗАДАЧА 7.18. В означенията от Задачи 7.16 и 7.17, нека $f_{2n+1}(x) = \sum_{i=3}^{2n+1} x^i$, $U_1 = \{[x : y : z] \in \mathbb{P}^2(\bar{k}) \mid y \neq 0\}$ и $t_1 = \frac{x}{y}$, $t_2 = \frac{z}{y}$. Да се докаже, че афинният координатен пръстен на $V \cap U_1$ е

$$\bar{k}[V \cap U_1] = \left\{ \sum_{i=0}^{2n-2} a_i(t_1) t_2^i \mid a_i(t_1) \in \bar{k}[t_1] \right\}.$$

Да се опише локалният пръстен $\mathcal{O}_S(\bar{V})$ на точката $S = [0 : 1 : 0] \in \bar{V}$.

ЗАДАЧА 7.19. За произволно свършено поле k и полиноми $f(x), g(x) \in \bar{k}[x]$ да се докаже, че афинният координатен пръстен на

$$V = \{(x, y, z) \in \bar{k}^3 \mid y^2 = f(x), z^2 = g(x)\}$$

е изоморфен на

$$\bar{k}[V] = \{a(x) + b(x)y + c(x)z + d(x)yz \mid a(x), b(x), c(x), d(x) \in \bar{k}[x]\}.$$

Нека α е общ корен на $f(x)$ и $g(x)$, β е корен на $f(x)$, но не и на $g(x)$, а γ не е корен нито на $f(x)$, нито на $g(x)$. Да се опишат локалните пръстени $\mathcal{O}_p(V)$, $\mathcal{O}_q(V)$, $\mathcal{O}_r(V)$ на точките $p = (\alpha, 0, 0)$, $q = (\beta, 0, \lambda)$, $r = (\gamma, \mu, \nu) \in V$.

ЗАДАЧА 7.20. В означенията от Задача 7.19 да се докаже, че ако $\deg(f) \geq 3$, $\deg(g) \geq 3$, то проективната обвивка на V е

$$\bar{V} = \left\{ [x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid y^2 t^{\deg(f)-2} = t^{\deg(f)} f\left(\frac{x}{t}\right), z^2 t^{\deg(g)-2} = t^{\deg(g)} g\left(\frac{x}{t}\right) \right\}.$$

Да се опише функционалното поле $\bar{k}(\bar{V})$ на \bar{V} и локалните пръстени $\mathcal{O}_P(\bar{V})$, $\mathcal{O}_Q(\bar{V})$, $\mathcal{O}_R(\bar{V})$ на точките

$$P = [\alpha : 0 : 0 : 1], \quad Q = [\beta : 0 : \lambda : 1], \quad R = [\gamma : \mu : \nu : 1] \in \bar{V}.$$

ЗАДАЧА 7.21. В означенията от Задача 7.20 да се докаже, че стандартната хиперравнина $H_4 = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid t = 0\}$ пресича \bar{V} в проективната права

$$\bar{V} \cap H_4 = \{[0 : y : z : 0] \in \mathbb{P}^3(\bar{k})\} \simeq \{[y : z] \in \mathbb{P}^1(\bar{k})\} = \mathbb{P}^1(\bar{k}).$$

За $U_1 = \{[x : y : z : t] \in \mathbb{P}^3(\bar{k}) \mid y \neq 0\}$ да се провери, че афинният координатен пръстен $\bar{k}[\bar{V} \cap H_4 \cap U_1] = \bar{k}\left[\frac{z}{y}\right]$ съвпада с пръстена на полиномите на една променлива и да се опишат локалните пръстени на точките от $\bar{V} \cap H_4 \cap U_1$.

4. Функционално поле над k

Сега ще разгледаме ефекта на разширението на полето от константи k до алгебричната обвивка \bar{k} на k върху афинния координатен пръстен и функционалното поле на афинно многообразие.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.22. Ако V/k е квази-афинно многообразие, определено над поле k , то полето от частни $F(k[V])$ на афинния координатен пръстен $k[V]$ на V над k се нарича k -функционално поле на V/k и се бележи с $k(V)$.

Ако V/k е квази-проективно многообразие, определено над поле k , то за произволно стандартно афинно отворено подмножество U_i , полето от частни $F(k[V \cap U_i])$ на афинния координатен пръстен $k[V \cap U_i]$ на $V \cap U_i$ над k се нарича k -функционално поле на V/k .

Следващата лема доказва коректността на определението на k -функционално поле на квази-проективно многообразие $V/k \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$, определено над k .

ЛЕМА 7.23. Нека $V/k \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$ е квази-проективно многообразие, определено над k , а U_i, U_j са стандартни афинни отворени подмножества с $V \cap U_i \neq \emptyset$, $V \cap U_j \neq \emptyset$, то k -функционалните полета

$$k(V \cap U_i) = k(V \cap U_j)$$

на $V \cap U_i$ и $V \cap U_j$ съвпадат.

Доказателство: Достатъчно е да докажем съпадението

$$k[V \cap U_i] = k[V \cap U_j]$$

на афинните координатни пръстени на $V \cap U_i$ и $V \cap U_j$ над k , за да получим съвпадението

$$F(k[V \cap U_i]) = F(k[V \cap U_j])$$

на съответните полета от частни. Съгласно Лема 7.11 (ii) имаме

$$k[V \cap U_i] = k[V \cap U_i \cap U_j] = k[V \cap U_j],$$

стига $V \cap U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Да допуснем, че $V \cap U_i \cap U_j = \emptyset$. Тогава

$$V \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k}) \setminus (U_i \cap U_j) = [\mathbb{P}^n(\bar{k}) \setminus U_i] \cup [\mathbb{P}^n(\bar{k}) \setminus U_j].$$

Това позволява да преставим $V = [V \cap (\mathbb{P}^n(\bar{k}) \setminus U_i)] \cup [V \cap (\mathbb{P}^n(\bar{k}) \setminus U_j)]$. Поради неприводимостта на V оттук следва $V = V \cap (\mathbb{P}^n(\bar{k}) \setminus U_i)$ след евентуална размяна между U_i и U_j . В резултат, $V \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k}) \setminus U_i$, откъдето $V \cap U_i = \emptyset$, противно на избора на U_i с $V \cap U_i \neq \emptyset$. Това доказва $V \cap U_i \cap U_j \neq \emptyset$ и съвпадението $k[V \cap U_i] = k[V \cap U_j]$ на афинните координатни пръстени, Q.E.D.

Нека V/k е квази-афинно многообразие, определено над свършено поле k . Тъждественото влагане

$$k[x_1, \dots, x_n] \hookrightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$$

индуцира влагане на афинните координатни пръстени

$$k[x_1, \dots, x_n]/I_k(V) = k[V] \hookrightarrow \bar{k}[V] = \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V),$$

защото $k[x_1, \dots, x_n] \cap I(V) = I_k(V)$. Оттук следва влагането на полетата от частни

$$F(k[V]) = k(V) \hookrightarrow \bar{k}(V) = F(\bar{k}[V]).$$

ТВЪРДЕНИЕ 7.24. Нека $V \subseteq \bar{k}^n$ е квази-афинно многообразие с идеал $I(V) \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$, определен над k , т.е. $I(V)$ се поражда от полиноми с коефициенти от k . Тогава

- (i) афинният координатен пръстен $\bar{k}[V] = l_{\bar{k}}(k[V])$ съвпада с \bar{k} -линейната обвивка на афинния координатен пръстен $k[V]$ на V над k ;
- (ii) функционалното поле $\bar{k}(V) = \bar{k} * k(V)$ на V е композиция $\bar{k} * k(V)$ на алгебричната обвивка \bar{k} на k с k -функционалното поле $k(V)$ на V , т.е. $\bar{k} * k(V)$ е подполето на $\bar{k}(V)$, породено от \bar{k} и $k(V)$.

Доказателство: (i) По определение, \bar{k} -линейната обвивка на афинния координатен пръстен $k[V] := k[x_1, \dots, x_n]/I_k(V)$ на V над k се състои от крайни суми

$$\sum_{i=1}^s \lambda_i (f_i + I_k(V)) = \sum_{i=1}^s \lambda_i f_i I(V) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V) = \bar{k}[V]$$

за някакви $\lambda_i \in \bar{k}$, $f_i \in k[x_1, \dots, x_n]$, защото $\lambda_i I_k(V) \subseteq I(V)$. Това доказва, че $l_{\bar{k}}(k[V]) \subseteq \bar{k}[V]$. Обратно, всеки елемент на $\bar{k}[V]$ е от вида $g + I(V)$ за някакъв полином $g = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ и можем да представим

$$g + I(V) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} + I(V) = \sum_{\alpha} c_{\alpha} (x^{\alpha} + I_k(V)) \in l_{\bar{k}}(k[V]).$$

В резултат, $\bar{k}[V] \subseteq l_{\bar{k}}(k[V])$ и $\bar{k}[V] = l_{\bar{k}}(k[V])$.

(ii) Вземайки предвид $\bar{k}(V) = F(\bar{k}[V]) = F(l_{\bar{k}}(k[V]))$ и $k(V) = F(k[V])$, свеждаме твърдението към

$$F(l_{\bar{k}}(k[V])) = F(k[V]) * \bar{k}. \quad (7.2)$$

От една страна, $F(k[V]) \subseteq F(l_{\bar{k}}(k[V]))$, защото $k[V] \subseteq l_{\bar{k}}(k[V])$. Освен това, $\bar{k} \subseteq F(l_{\bar{k}}(k[V]))$, така че полето $F(k[V]) * \bar{k}$, породено от $F(k[V])$ и \bar{k} се съдържа в $F(l_{\bar{k}}(k[V]))$. От друга страна, $k[V] \subseteq F(k[V]) * \bar{k}$ и $\bar{k} \subseteq F(k[V]) * \bar{k}$, откъдето $l_{\bar{k}}(k[V]) \subseteq F(k[V]) * \bar{k}$ и $F(l_{\bar{k}}(k[V])) \subseteq F(k[V]) * \bar{k}$. Това доказва (7.2), Q.E.D.

ЗАДАЧА 7.25. Да се докаже, че за произволно афинно многообразие $V \subset \bar{k}^n$ съществува крайно алгебрично разширение $E \supseteq k$, така че функционалното поле $\bar{k}(V) = \bar{k} * F(E[V])$ съвпада с композита на \bar{k} и полето от частни $F(E[V])$ на фактор-пръстена $E[V] = E[x_1, \dots, x_n]/(I(V) \cap E[x_1, \dots, x_n])$.

5. Действие и фиксирани точки на абсолютната група на Galois

ЛЕМА 7.26. Всеки автоморфизъм $\varphi \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ от абсолютната група на Galois на свършено поле k индуцира автоморфизъм

$$\varphi : \bar{k}[V_o] \longrightarrow \bar{k}[V_o]$$

на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V_o]$ на квази-афинно многообразие V_o/k , определено над k и автоморфизъм

$$\varphi : \bar{k}(V_o) \longrightarrow \bar{k}(V_o)$$

на функционалното поле $\bar{k}(V_o)$ на V_o/k .

Доказателство: По определение, квази-афинното многообразие $V_o = V \cap U$, определено над k е сечение на афинно многообразие V/k , определено над k със Зариски отворено подмножество $U \subset \bar{k}^n$. Съгласно $\bar{k}[V_o] = \bar{k}[V \cap U] = \bar{k}[V]$ и $\bar{k}(V_o) = \bar{k}(V \cap U) = \bar{k}(V)$, достатъчно е да докажем лемата за афинното многообразие V/k , определено над k .

Всеки елемент $\varphi \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ задава автоморфизъм

$$\varphi : \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n],$$

$$\varphi \left(\sum_{i=(i_1, \dots, i_n)} c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) = \sum_{i=(i_1, \dots, i_n)} \varphi(c_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

на полиномиалния пръстен $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. По-точно, φ е съгласувано със събирането на полиноми,

$$\begin{aligned} \varphi \left(\sum_i c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} + \sum_i d_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) &= \varphi \left(\sum_i (c_i + d_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) = \\ &= \sum_i \varphi(c_i + d_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = \sum_i \varphi(c_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} + \sum_i \varphi(d_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} = \\ &= \varphi \left(\sum_i c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) + \varphi \left(\sum_i d_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right). \end{aligned}$$

В наредените n -торки от неотрицателни цели числа $(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ въвеждаме частична наредба $i \ll j$, ако $j - i = (j_1 - i_1, \dots, j_n - i_n) \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$. Тогава

$$\begin{aligned} \varphi \left(\left(\sum_i c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) \left(\sum_j d_j x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \right) \right) &= \varphi \left(\sum_m \left(\sum_{i \ll m} c_i d_{m-i} \right) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} \right) = \\ &= \sum_m \varphi \left(\sum_{i \ll m} c_i d_{m-i} \right) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} = \sum_m \sum_{i \ll m} \varphi(c_i) \varphi(d_{m-i}) x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n} = \\ &= \left(\sum_i \varphi(c_i) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) \left(\sum_j \varphi(d_j) x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \right) = \varphi \left(\sum_i c_i x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \right) \cdot \varphi \left(\sum_j d_j x_1^{j_1} \dots x_n^{j_n} \right) \end{aligned}$$

и $\varphi : \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ е хомоморфизъм на пръстени. Непосредствено се вижда, че този хомоморфизъм се обръща от

$$\varphi^{-1} : \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n],$$

така че $\varphi : \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ е автоморфизъм на $\bar{k}[x_1, \dots, x_n]$. Ако $V = Z(S)/k$, $S \subset k[x_1, \dots, x_n]$ е афинно алгебрично многообразие, определено над k , то всеки елемент $\varphi \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ задава взаимно еднозначно изображение $\varphi : V \rightarrow V$. По-точно, за всяка точка $a \in V$ и всеки полином $f(x_1, \dots, x_n) \in S$ е в сила

$$0 = \varphi(0) = \varphi(f(a)) = f(\varphi(a)),$$

така че $\varphi(a) \in Z(S) = V$.

Оттук следва, че $\forall \varphi \in \text{Gal}(\bar{k}/k)$ индуцира взаимно еднозначно изображение

$$\varphi : I(V) \longrightarrow I(V),$$

защото за произволен полином $g(x_1, \dots, x_n) \in I(V) \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ и произволна точка $a \in V \subseteq \bar{k}^n$ имаме

$$\varphi(g)(a) = \varphi(g)(\varphi\varphi^{-1}(a)) = \varphi(g(\varphi^{-1}(a))) = \varphi(0) = 0,$$

съгласно $\varphi^{-1}(a) \in V$.

Аutomорфизмът $\varphi : \bar{k}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$, който се ограничава до изображение $\varphi : I(V) \rightarrow I(V)$ индуцира автоморфизъм

$$\varphi : \bar{k}[V] = \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V) \longrightarrow \bar{k}[x_1, \dots, x_n]/I(V) = \bar{k}[V]$$

на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$ на афинното алгебрично многообразие V/k . По-точно, $\varphi(f + I(V)) = \varphi(f) + I(V)$ за $\forall f \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ е коректно определено, защото от $f_1 - f \in I(V)$ следва $\varphi(f_1) - \varphi(f) = \varphi(f_1 - f) \in I(V)$. Освен това, φ е хомоморфизъм на пръстени с нулево ядро, защото ако $\varphi(f) \in I(V)$, то $f = \varphi^{-1}\varphi(f) \in I(V)$. Всеки елемент $g + I(V) \in \bar{k}[V]$ има праобраз $\varphi^{-1}(g) + I(V)$ под действие на φ и $\varphi : \bar{k}[V] \rightarrow \bar{k}[V]$ е автоморфизъм на $\bar{k}[V]$. Този автоморфизъм се продължава до автоморфизъм

$$\varphi : \bar{k}(V) = F(\bar{k}[V]) \longrightarrow F(\bar{k}[V]) = \bar{k}(V)$$

на полето от частни $\bar{k}(V)$ на $\bar{k}[V]$. По-точно, $\varphi\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\varphi(f)}{\varphi(g)}$ за $\forall f, g \in \bar{k}[V]$, $g \neq 0$ е коректно зададена върху $\bar{k}(V)$, защото от $\frac{f}{g} = \frac{f_1}{g_1}$ следва $fg_1 = f_1g$, така че $\varphi(f)\varphi(g_1) = \varphi(fg_1) = \varphi(f_1g) = \varphi(f_1)\varphi(g)$ и $\frac{\varphi(f)}{\varphi(g)} = \frac{\varphi(f_1)}{\varphi(g_1)}$. Освен това, φ е хомоморфизъм на пръстени съгласно

$$\begin{aligned} \varphi\left(\frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}\right) &= \varphi\left(\frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2}\right) = \frac{\varphi(f_1g_2 + f_2g_1)}{\varphi(g_1g_2)} = \\ &= \frac{\varphi(f_1)\varphi(g_2) + \varphi(f_2)\varphi(g_1)}{\varphi(g_1)\varphi(g_2)} = \frac{\varphi(f_1)}{\varphi(g_1)} + \frac{\varphi(f_2)}{\varphi(g_2)} = \varphi\left(\frac{f_1}{g_1}\right) + \varphi\left(\frac{f_2}{g_2}\right) \end{aligned}$$

и

$$\varphi\left(\frac{f_1}{g_1} \cdot \frac{f_2}{g_2}\right) = \varphi\left(\frac{f_1f_2}{g_1g_2}\right) = \frac{\varphi(f_1f_2)}{\varphi(g_1g_2)} = \frac{\varphi(f_1)\varphi(f_2)}{\varphi(g_1)\varphi(g_2)} = \frac{\varphi(f_1)}{\varphi(g_1)} \cdot \frac{\varphi(f_2)}{\varphi(g_2)} = \varphi\left(\frac{f_1}{g_1}\right) \cdot \varphi\left(\frac{f_2}{g_2}\right).$$

Хомоморфизмът $\varphi : \bar{k}(V) \rightarrow \bar{k}(V)$ е изоморфизъм, защото има коректно определен обратен хомоморфизъм $\varphi^{-1} : \bar{k}(V) \rightarrow \bar{k}(V)$, Q.E.D.

ТВЪРДЕНИЕ 7.27. Нека k е свършено поле, а $V \subseteq \bar{k}^n$ е квази-афинно многообразие с идеал $I(V) \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$, определен над k . Тогава

(i) $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -инвариантите на афинния координатен пръстен $\bar{k}[V]$ се изчерпват от афинния координатен пръстен $k[V]$ на V над k ,

$$\bar{k}[V]^{\text{Gal}(\bar{k}/k)} = k[V];$$

(ii) $Gal(\bar{k}/k)$ -инвариантите на функционалното поле $\bar{k}(V)$ на V се изчерпват от k -функционалното поле $k(V)$ на V ,

$$\bar{k}(V)^{Gal(\bar{k}/k)} = k(V).$$

Доказателство: (i) Всеки елемент на $\bar{k}[V] = l_{\bar{k}}(k[V])$ е \bar{k} -линейна комбинация $f = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i$ на $f_1, \dots, f_m \in k[V]$ с коефициенти $\alpha_i \in \bar{k}$. Групата на Galois $Gal(\bar{k}/k)$ оставя на място f тогава и само тогава, когато

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i f_i = f = \varphi(f) = \sum_{i=1}^m \varphi(\alpha_i) f_i. \quad (7.3)$$

Без ограничение на общността можем да считаме, че f_1, \dots, f_m са линейно независими над \bar{k} след замяна на f_1, \dots, f_m с максимална линейно независима над \bar{k} подсистема. Тогава от (7.3) следва $\varphi(\alpha_i) = \alpha_i$ за $\forall 1 \leq i \leq m$, $\varphi \in Gal(\bar{k}/k)$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in k$. По този начин установихме, че $f \in \bar{k}[V]^{Gal(\bar{k}/k)}$ точно когато $f \in k[V]$.

Всеки елемент на функционалното поле $\bar{k}(V)$ е частно $\frac{f}{g}$ на $f, g \in \bar{k}[V]$. Повдиганията $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n), \tilde{g}(x_1, \dots, x_n) \in \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$ на f и g до полиноми на x_1, \dots, x_n имат краен брой коефициенти, които са алгебрични над k . Нека обединението на коефициентите на $\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)$ и $\tilde{g}(x_1, \dots, x_n)$ е c_1, \dots, c_m . Да означим с $h_i(t) \in k[t]$ минималните полиноми на c_i над k и да разгледаме полето на разлагане E на произведението

$$h_1(t) \dots h_m(t) \in k[t]$$

над k . Полето E е крайно разширение на Galois на k и абсолютната група на Galois $Gal(\bar{k}/k)$ се ограничава до крайната група $Gal(\bar{k}/k)|_E = Gal(E/k)$. Ако $\frac{f}{g} \in F(\bar{k}(V)^{Gal(\bar{k}/k)}) = \bar{k}(V)^{Gal(\bar{k}/k)}$, то $Gal(\bar{k}/k)$ -инвариантното частно

$$\frac{f}{g} = \frac{\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) + I(V)}{\tilde{g}(x_1, \dots, x_n) + I(V)} = \frac{\tilde{f}(x_1, \dots, x_n) \prod_{\sigma \in Gal(E/k) \setminus \{Id\}} \sigma(\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)) + I(V)}{\tilde{g}(x_1, \dots, x_n) \prod_{\sigma \in Gal(E/k) \setminus \{Id\}} \sigma(\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)) + I(V)}$$

има $Gal(\bar{k}/k)$ -инвариантен числител $F(x_1, \dots, x_n) + I(V)$ с

$$F(x_1, \dots, x_n) = \tilde{f}(x_1, \dots, x_n) \prod_{\sigma \in Gal(E/k) \setminus \{Id\}} \sigma(\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)),$$

така че и знаменателят

$$G(x_1, \dots, x_n) = \tilde{g}(x_1, \dots, x_n) \prod_{\sigma \in Gal(E/k) \setminus \{Id\}} \sigma(\tilde{f}(x_1, \dots, x_n)) + I(V)$$

е $Gal(\bar{k}/k)$ -инвариантен. Прилагайки (i) получаваме съществуването на полиноми $F'(x_1, \dots, x_n), G'(x_1, \dots, x_n) \in k[x_1, \dots, x_n]$ с $F'(x_1, \dots, x_n) + I(V) = F(x_1, \dots, x_n) + I(V)$, $G'(x_1, \dots, x_n) + I(V) = G(x_1, \dots, x_n) + I(V)$. Оттук

$$\frac{f}{g} = \frac{F'(x_1, \dots, x_n) + I(V)}{G'(x_1, \dots, x_n) + I(V)} = \frac{F'(x_1, \dots, x_n) + I(V)_k}{G'(x_1, \dots, x_n) + I(V)_k} \in F(k[V]) = k(V),$$

съгласно

$$\begin{aligned} & (k[x_1, \dots, x_n] + I(V))/I(V) \simeq \\ & \simeq k[x_1, \dots, x_n]/(k[x_1, \dots, x_n] \cap I(V)) = k[x_1, \dots, x_n]/I(V)_k, \end{aligned}$$

Q.E.D.

Нека $V \subseteq \bar{k}^n$ е квази-афинно многообразие или $V \subseteq \mathbb{P}^n(\bar{k})$ е квази-проективно многообразие. Тогава алгебричната обвивка \bar{k} на k е пълното поле от константи

на функционалното поле $\bar{k}(V)$, защото всеки алгебричен над \bar{k} елемент $\alpha \in \bar{k}(V)$ е алгебричен над k и принадлежи на \bar{k} . По-точно, ако $f(x) = \sum_{i=0}^m c_i x^i \in \bar{k}[x]$ е минималният полином на α над \bar{k} , то α е алгебричен над $k(c_0, \dots, c_m)$, така че степенята $[k(c_0, \dots, c_m, \alpha) : k(c_0, \dots, c_m)] < \infty$ е крайна. Всяко $c_i \in \bar{k}$ е алгебрично над k , така че $[k(c_0, \dots, c_m) : k] < \infty$, откъдето

$$[k(c_0, \dots, c_m, \alpha) : k] = [k(c_0, \dots, c_m, \alpha) : k(c_0, \dots, c_m)][k(c_0, \dots, c_m) : k] < \infty$$

и α е алгебричен над k .

СЛЕДСТВИЕ 7.28. *Ако k е свършено поле, а V е квази-афинно многообразие с идеал $I(V) \triangleleft \bar{k}[x_1, \dots, x_n]$, определен над k , то k е пълното поле от константи на k -функционалното поле $k(V)$ на V .*

Доказателство: Нека $\alpha \in k(V)$ е алгебрично над k . Тогава $\alpha \in k(V) = \bar{k}(V)^{Gal(\bar{k}/k)}$ съгласно Твърдение 7.27 (ii), така че $\varphi(\alpha) = \alpha$ за всяко $\varphi \in Gal(\bar{k}/k)$. Но алгебричният над k елемент α принадлежи на алгебричната обвивка \bar{k} и $\bar{k}^{Gal(\bar{k}/k)} = k$, така че $\alpha \in k$, Q.E.D.

Да напомним, че за произволно квази-проективно многообразие V/k , определено над k и произволно стандартно афинно отворено подмножество U_i , пресичащо V имаме $k(V) = k(V \cap U_i)$ по определение. От друга страна, докажахме, че $\bar{k}(V) = \bar{k}(V \cap U_i)$. За свършено поле k комбинираме тези факти с Твърдение 7.24 (ii), Твърдение 7.27 (ii) и Следствие 7.28, за да получим следното

СЛЕДСТВИЕ 7.29. *Ако k е свършено поле, а V е квази-проективно многообразие с хомогенен идеал $I_h(V) \triangleleft \bar{k}[x_0, \dots, x_n]$, определен над k , то*

- (i) *функционалното поле $\bar{k}(V) = \bar{k} * k(V)$ на V съвпада с композита на алгебричната обвивка \bar{k} на k с k -функционалното поле $k(V)$ на V ;*
- (ii) *$Gal(\bar{k}/k)$ -инвариантите на функционалното поле $\bar{k}(V)$ на V образуват k -функционалното поле $\bar{k}(V)^{Gal(\bar{k}/k)} = k(V)$ на V ;*
- (iii) *k е пълното поле от константи на k -функционалното поле $k(V)$ на V .*