Глава 9

Кохомологии на Dolbeault

1. Теорема на Dolbeault

Кохомологиите на Dolbeault са средство за пресмятане на кохомологиите на снопове от холоморфни сечения на холоморфни векторни разслоения над комплексно многообразие M. Основни примери за такива снопове са снопът $\mathcal{O}_M$ на холоморфни функции и сноповете Ω_M^p на холоморфните $(p,0)$-форми върху M. Ако $A^{p,q}(M)$ е $\mathbb{C}$-линейното пространство на гладките (p,q)-форми върху M, то кохомологиите на Dolbeault се определят като $\mathbb{C}$-линейните фактор-пространства

$$H^{p,q}(M) := \frac{\ker[\overline{\partial} : A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{p,q+1}(M)]}{\operatorname{im}[\overline{\partial} : A^{p,q-1}(M) \longrightarrow A^{p,q}(M)]}.$$

С други думи, $H^{p,q}(M)$ е q-тата кохомологична група на ко-верижния комплекс

$$0 \longrightarrow A^{p,0}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{p,1}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{p,n}(M) \xrightarrow{\overline{\partial}} 0$$

с $n = \dim_{\mathbb{C}} M$.

За да докажем съвпадението $H^q(M, \Omega_M^p) \simeq H^{p,q}(M)$ на кохомологиите на снопа Ω_M^p на холоморфните $(p,0)$-форми върху M със съответните кохомологии на Dolbeault, да фиксираме неотрицателно цяло число p и да разгледаме сноповете $\mathcal{A}^{p,s}$ на гладките (p,s)-форми върху M за $0 \leq s \leq n$. Да забележим, че операторът $\overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,s} \to \mathcal{A}^{p,s+1}$ има нулев квадрат $\overline{\partial}^2 = \overline{\partial} \circ \overline{\partial} = \mathbb{O}$ и подснопът Ω_M^p на $\mathcal{A}^{p,0}$ се съдържа в ядрото на $\overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,0} \to \mathcal{A}^{p,1}$. Затова редицата

$$0 \longrightarrow \Omega_M^p \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,n} \xrightarrow{\overline{\partial}} 0 \tag{9.1}$$

е ко-верижен комплекс.

Лема 9.1. *Ко-верижният комплекс от снопове (9.1) е точна редица.*

Доказателство: Достатъчно е да проверим точността на редицата от хомоморфизми

$$0 \longrightarrow \Omega_{M,x}^p \xrightarrow{\overline{\partial}_x} \mathcal{A}_x^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}_x} \mathcal{A}_x^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}_x} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_x} \mathcal{A}_x^{p,n} \xrightarrow{\overline{\partial}_x} 0 \tag{9.2}$$

на съответните стъбла в произволна точка $x \in M$, за да получим точността на (9.1). Избираме локални холоморфни координати $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z(p) = 0^n$ в околност U на p върху M и без ограничение на общността заменяме M с отворено подмножество $D \subseteq \mathbb{C}^n$. Точността на (9.2) в $\Omega_{M,x}^p$ се дължи на това, че $\Omega_D^p(V)$ се състои от холоморфните гладки $(p,0)$-форми за всяко отворено подмножество $V \subseteq D$. Нека $\omega \in A_D^{p,q}(V)$ е определена в отворена околност $0^n \in V \subseteq D$ и $\overline{\partial}\omega = 0$. Ако $q = 0$, то ω е холоморфна и $\omega \in \Omega_D^p(V)$. Това доказва точността на (9.2) в $\mathcal{A}_x^{p,0}$. В случая $q \geq 1$ прилагаме Твърдение 6.9, известно като $\overline{\partial}$-лема на Poincaré към $\omega \in \mathcal{A}_D^{p,q}(V)$ и получаваме отворено подмножество $0^n \in W \subseteq V \subseteq D$, върху което диференциалната форма $\omega|_W =$

$\overline{\partial}\psi$ с $\psi \in \mathcal{A}_D^{p,q-1}(W)$ е $\overline{\partial}$-точна. Това доказва точността на (9.1) с $M = D$ в $\mathcal{A}_D^{p,q}(W)$, а отам и точността на (9.2) в $\mathcal{A}_x^{p,q}$, Q.E.D.
Предполагайки анулирането

$$H^i(M, \mathcal{A}^{p,q}) = 0 \quad \text{за} \quad \forall i \geq 1 \tag{9.3}$$

на кохомологиите на сноповете $\mathcal{A}^{p,q}$ на гладките (p,q)-форми върху комплексно многообразие M ще докажем следващата Теорема 12 на Dolbeault. Верността на (9.3) ще бъде установена в §9.3 след изучаване на фините и меките снопове.

Теорема 12. (на Dolbeault) *Кохомологиите*

$$H^q(M, \Omega_M^p) \simeq H^{p,q}(M)$$

на снопа Ω_M^p на холоморфните $(p,0)$-форми върху M са изоморфни на съответните кохомологии на Dolbeault за $\forall p, q \in \mathbb{N}$.

Доказателство: Най-лесният начин за доказване на тази теорема е чрез спектрални редици, но тук ще разсъждаваме с елементарни средства. Ако

$$\mathcal{Z}^k := \ker[\overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,k} \longrightarrow \mathcal{A}^{p,k+1}] = \mathrm{im}[\overline{\partial} : \mathcal{A}^{p,k-1} \longrightarrow \mathcal{A}^{p,k}],$$

то точността на редицата (9.1) се свежда до точността на няколко къси точни редици от снопове, показани в следната комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & & & \\
\Omega_M^p \arrow[d, "\varepsilon"] & & \mathcal{Z}^2 \arrow[d, "\varepsilon^2"] & & \mathcal{Z}^4 \arrow[d] \\
\mathcal{A}^{p,0} \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d, "\pi^0"] & \mathcal{A}^{p,1} \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[ur, "\pi^1"] & \mathcal{A}^{p,2} \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[d, "\pi^2"] & \mathcal{A}^{p,3} \arrow[r, "\overline{\partial}"] \arrow[ur, "\pi^3"] & \cdots \\
\mathcal{Z}^1 \arrow[ur, "\varepsilon^1"] & & \mathcal{Z}^3 \arrow[ur, "\varepsilon^3"] & &
\end{tikzcd} \tag{9.4}$$

Да отбележим, че $\varepsilon : \Omega_M^p \to \mathcal{A}^{p,0}$ и $\varepsilon^i : \mathcal{Z}^i \to \mathcal{A}^{p,i}$ за $\forall i \geq 1$ са инективни морфизми на снопове, докато $\pi^i : \mathcal{A}^{p,i} \to \mathcal{Z}^{i+1}$ за $\forall i \geq 0$ са сюрективни морфизми на снопове.
Късата точна редица от снопове

$$0 \longrightarrow \Omega_M^p \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\pi^0} \mathcal{Z}^1$$

индуцира дълга кохомологична редица

$$0 \longrightarrow H^0(M, \Omega_M^p) \xrightarrow{\varepsilon} H^0(M, \mathcal{A}^{p,0}) \xrightarrow{\pi^0} H^0(M, \mathcal{Z}^1) \longrightarrow ,$$

$$\longrightarrow H^1(M, \Omega_M^p) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{A}^{p,0}) = 0$$

съгласно (9.3). Комбинирайки с $H^0(M, \mathcal{A}^{p,0}) = A^{p,0}(M)$, получаваме

$$H^0(M, \Omega_M^p) \simeq \varepsilon H^0(M, \Omega_M^p) = \ker[\pi^0 : A^{p,0}(M) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{Z}^1)] =$$
$$\ker[\overline{\partial} : A^{p,0}(M) \to A^{p,1}(M)] = H^{p,0}(M)$$

и

$$H^1(M,\Omega^p_M) \simeq \frac{H^0(M,\mathcal{Z}^1)}{\mathrm{im}[\pi^0 : A^{p,0}(M) \longrightarrow H^0(M,\mathcal{Z}^1)]}. \tag{9.5}$$

За произволно $q \geq 1$, $\mathcal{Z}^q$ е подсноп на $\mathcal{A}^{p,q}$ и редицата

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}^q \xrightarrow{\varepsilon^q} \mathcal{A}^{p,q} \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{A}^{p,q+1}$$

от морфизми на снопове е точна в $\mathcal{A}^{p,q}$. Точността на съответната дълга кохомологична редица

$$0 \longrightarrow H^0(M,\mathcal{Z}^q) \longrightarrow H^0(M,\mathcal{A}^{p,q}) \xrightarrow{\overline{\partial}} H^0(M,\mathcal{A}^{p,q+1}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(M,\mathcal{Z}^q) \longrightarrow H^1(M,\mathcal{A}^{p,q}) \longrightarrow H^1(M,\mathcal{A}^{p,q+1}) \longrightarrow$$

дава

$$\begin{aligned} H^0(M,\mathcal{Z}^q) \simeq \ker[\overline{\partial} : H^0(M,\mathcal{A}^{p,q}) \longrightarrow H^0(M,\mathcal{A}^{p,q+1})] = \\ \ker[\overline{\partial} : A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{p,q+1}(M)], \end{aligned} \tag{9.6}$$

съгласно $H^0(M,\mathcal{A}^{p,s}) = A^{p,s}(M)$ за $\forall 0 \leq s \leq n$. В частност, за $q = 1$ получаваме

$$H^1(M,\Omega^p_M) = \frac{\ker[\overline{\partial} : A^{p,1}(M) \longrightarrow A^{p,2}(M)]}{\mathrm{im}[\overline{\partial} : A^{p,0}(M) \longrightarrow A^{p,1}(M)]} = H^{p,1}(M),$$

комбинирайки (9.5), (9.6) и инективността на $\varepsilon^1 : \mathcal{Z}^1 \to \mathcal{A}^{p,1}$.
За $\forall q \geq 2$ имаме къси точни редици от снопове

$$0 \longrightarrow \mathcal{Z}^{q-1} \xrightarrow{\varepsilon^{q-1}} \mathcal{A}^{p,q-1} \xrightarrow{\pi^{q-1}} \mathcal{Z}^q \longrightarrow 0\ , \tag{9.7}$$

отговарящи на дълги точни кохомологични редици

$$0 \longrightarrow H^0(M,\mathcal{Z}^{q-1}) \xrightarrow{\varepsilon^{q-1}} H^0(M,\mathcal{A}^{p,q-1}) \xrightarrow{\pi^{q-1}} H^0(M,\mathcal{Z}^q) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(M,\mathcal{Z}^{q-1}) \longrightarrow H^1(M,\mathcal{A}^{p,q-1}) \longrightarrow H^1(M,\mathcal{Z}^q) \longrightarrow \cdots$$

Вземайки предвид $H^0(M,\mathcal{A}^{p,q-1}) = A^{p,q-1}(M)$ и $H^1(M,\mathcal{A}^{p,q-1}) = 0$ съгласно (9.3), получаваме точни редици

$$A^{p,q-1}(M) \xrightarrow{\pi^{q-1}} H^0(M,\mathcal{Z}^q) \longrightarrow H^1(M,\mathcal{Z}^{q-1}) \longrightarrow 0\ . \tag{9.8}$$

В частност, точността на (9.8) в $H^1(M,\mathcal{Z}^{q-1})$ гласи, че

$$H^1(M,\mathcal{Z}^{q-1}) \simeq H^{p,q}(M),$$

в светлината на (9.6) и

$$\pi^{q-1}A^{p,q-1}(M) = \mathrm{im}[\overline{\partial} : A^{p,q-1}(M) \longrightarrow A^{p,q}(M)].$$

За произволни $i \geq 1$ и $s \geq 1$ имаме $H^i(M,\mathcal{A}^{p,s-1}) = 0$ и $H^{i+1}(M,\mathcal{A}^{p,s-1}) = 0$, съгласно (9.3). Затова дългата кохомологична редица на (9.7) се разбива на къси точни редици

$$0 = H^i(M, \mathcal{A}^{p,s-1}) \longrightarrow H^i(M, \mathcal{Z}^s) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^{i+1}(M, \mathcal{Z}^{s-1}) \longrightarrow H^{i+1}(M, \mathcal{A}^{p,s-1}) = 0,$$

осигуряващи изоморфизмите

$$H^i(M, \mathcal{Z}^s) \simeq H^{i+1}(M, \mathcal{Z}^{s-1}) \quad \text{за} \quad \forall i \geq 1, \quad \forall s \geq 1.$$

По този начин получаваме

$$H^{p,q}(M) \simeq H^1(M, \mathcal{Z}^{q-1}) \simeq H^2(M, \mathcal{Z}^{q-2}) \simeq \ldots \simeq H^{q-1}(M, \mathcal{Z}^1).$$

За произволно $s \geq 1$, късата точна редица от снопове

$$0 \longrightarrow \Omega^p_M \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{\pi^0} \mathcal{Z}^1$$

дава къса точна кохомологична редица

$$0 = H^{q-1}(M, \mathcal{A}^{p,0}) \longrightarrow H^{q-1}(M, \mathcal{Z}^1) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^q(M, \Omega^p_M) \longrightarrow H^q(M, \mathcal{A}^{p,0}) = 0$$

в светлината на (9.3). Оттук

$$H^{q-1}(M, \mathcal{Z}^1) \simeq H^q(M, \Omega^p_M) \quad \text{и} \quad H^{p,q}(M) \simeq H^q(M, \Omega^p_M),$$

Q.E.D.

2. Приложения за кохомологиите на Dolbeault

Нека $X \subseteq \mathbb{C}^n$ е хиперповърхнина, т.е. аналитично подпространство, което е локално определено като множеството на нулите на една холоморфна функция. Ще докажем, че $X = Z(f)$ е множеството на нулите на глобална холоморфна функция $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$.

Задачата се свежда до глобализация на локално свойство и е естествено да потърсим кохомологичен подход за нейното решаване. По предположение, съществуват отворено покритие $\mathbb{C}^n = \cup_{j \in J} U_j$ и локални холоморфни функции $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$, така че $X \cap U_j = Z_{U_j}(f_j) := \{z \in U_j \mid f_j(z) = 0\}$. Ако $U_j \cap X = \emptyset$, то избираме $f_j \equiv 1 \in \mathbb{C}$. Без ограничение на общността можем да предполагаме, че

$$U_j = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |\mathrm{Re} z_j - a_j| < r_j, \quad \mathrm{Im} z_j - b_j| < s_j\}$$

са реални $(2n)$-мерни паралелепипеди с центрове $(a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n) \in \mathbb{C}^n$ и дължини на страните $(2r_1, 2s_1, \ldots, 2r_n, 2s_n) \in (\mathbb{R}^{>0})^{2n}$. Сечението на отворени интервали върху реалната права е отворен интервал или празното множество. Затова сеченията $U_{j_1} \cap \ldots \cap U_{j_k}$ на краен брой отворени множества от фиксираното покритие $\mathbf{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ е реален $(2n)$-мерен паралелепипед и в частност, свиваемо подмножество на $\mathbb{C}^n$. Съгласно еднозначното разлагане на локалните холоморфни функции в крайни произведения от неразложими (виж Твърдение 2.15 за съответното свойство на зародишите), можем да считаме, че в разлаганията $f_j = p_{j,1} p_{j,2} \ldots p_{j,s_j} u$ на $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$ в произведение на неразложими $p_{j,r} \in \mathcal{O}(U_j)$ и обратими $u \in \mathcal{O}^*(U_j)$, множителите $p_{j,1}, \ldots, p_{j,s_j}$ са два по два

различни. Тогава f_j е еднозначно определено с точност до обратим елемент $u \in \mathcal{O}^*(U_j)$.
За произволен реален $(2n)$-мерен паралелепипед $D \subset \mathbb{C}^n$ твърдим, че $H^q(D, \Omega^p_D) = 0$ за $\forall q \geq 1$. По-точно, кохомологиите $H^q(D, \Omega^p_D) \simeq H^{p,q}(D)$ на снопа Ω^p_D са изоморфни на кохомологиите на Dolbeault на D. По аналогия с Твърдение 6.10 може да се докаже, че $H^{p,q}(D) = 0$ за $\forall q \geq 1$. В частност, покритието $\mathbf{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ е ациклично за снопа $\mathcal{O}$ на холоморфните функции върху $\mathbb{C}^n$ и кохомологиите на Čech

$$H^q(\mathbf{U}, \mathcal{O}) \simeq H^q(\mathbb{C}^n, \mathcal{O}) \simeq H^{0,q}(\mathbb{C}^n) = 0$$

съвпадат с кохомологиите на снопа $\mathcal{O}$, с кохомологиите на Dolbeault $H^{0,q}(\mathbb{C}^n)$ и се анулират за всички $q \geq 1$.
Връщайки се към задачата за глобализация на уравнението на хиперповърхнина в $\mathbb{C}^n$, да забележим съществуването на неанулиращи се холоморфни функции $g_{i,j} \in \mathcal{O}^*(U_j \cap U_k)$ върху $U_j \cap U_k$, свързващи локалните уравнения $f_j = g_{j,k} f_k$ на X върху U_k и U_j. Поради свиваемостта на $U_j \cap U_k$ имаме анулиране $H^1(U_j \cap U_k, \mathbb{Z}) = 0$ на сингулярните кохомологии с цели коефициенти, а оттам и и на кохомологиите $H^1(U_j, \cap U_k, \mathbb{Z}_{U_j \cap U_k}) = 0$ на локално постоянния сноп $\mathbb{Z}_{U_j \cap U_k}$ над $U_j \cap U_k$. Експоненциалната къса точна редица от снопове

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_{\mathbb{C}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n} \longrightarrow 0$$

се ограничава върху $U_j \cap U_k$ и дава къса точна кохомологична редица

$$0 \longrightarrow H^0(U_j \cap U_k, \mathbb{Z}_{\mathbb{C}^n}) \longrightarrow H^0(U_j \cap U_k, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \xrightarrow{\exp}$$

$$\xrightarrow{\exp} H^0(U_j \cap U_k, \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n}) \longrightarrow H^1(U_j \cap U_k, \mathbb{Z}_{U_j \cap U_k}) = 0$$

Следователно експоненциалното изображение

$$\exp : H^0(U_j \cap U_k, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}) \longrightarrow H^0(U_j \cap U_k, \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^n})$$

сюрективно и съществува $h_{j,k} \in \mathcal{O}(U_j \cap U_k)$ с $e^{2\pi i h_{j,k}} = g_{j,k}$. Съгласно

$$e^{2\pi i (h_{j,k} + h_{k,l})} = g_{j,k} . g_{k,l} = g_{j,l} = e^{2\pi i h_{j,l}}$$

върху $U_j \cap U_k \cap U_l$ имаме

$$a_{j,k,l} := h_{j,l} - h_{j,k} - h_{k,l} \in \mathbb{Z}.$$

Целите числа $a_{j,k,l}$ определят кохомологичен клас в групата $H^2(\mathbf{U}, \mathbb{Z}_{\mathbb{C}^n})$ на кохомологиите на Čech на локално постоянния сноп $\mathbb{Z}_{\mathbb{C}^n}$ относно отвореното покритие $\mathbf{U}$ на $\mathbb{C}^n$. Благодарение на изоморфизма $H^2(\mathbf{U}, \mathbb{Z}_{\mathbb{C}^n}) \simeq H^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{C}^n})$ с втората кохомологична група на снопа $\mathbb{Z}_{\mathbb{C}^n}$ и изоморфизма $H^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}_{\mathbb{C}^n}) = H^2(\mathbb{C}^n, \mathbb{Z}) = 0$ със сингулярните кохомологии на $\mathbb{C}^n$ цели коефициенти, кохомологичният клас на $a_{j,k,l}$ е нулев. Това означава съществуването на цели числа $b_{j,k}$ с $a_{j,k,l} = b_{k,l} + b_{j,k} - b_{j,l}$. Замествайки $h_{j,k}$ с $h_{j,k} + b_{j,k}$ получаваме локални холоморфни функции $h_{j,k} \in \mathcal{O}(U_j \cap U_k)$ с $h_{j,k} + h_{k,l} = h_{j,l}$ върху $U_j \cap U_k \cap U_l$. Следователно фамилията $\mathbf{h} = \{h_{j,k}\}_{j,k \in J}$ задава елемент на кохомологичната група на Čech $H^1(\mathbf{U}, \mathcal{O}) = 0$. Оттук, съществуват локални холоморфни функции $h_j \in \mathcal{O}(U_j)$, изпълняващи равенствата $h_{j,k} = h_k - h_j$ и $f_j = e^{2\pi i (h_k - h_j)} f_k$. С други думи, $f_j e^{2\pi i h_j} = f_k e^{2\pi i f_k}$ върху $U_j \cap U_k$. Съгласно свойство (ii) от Определение 8.2 за сноп, приложено към $\mathcal{O}$, съществува глобална холоморфна

функция $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ с $f|_{U_j} = f_j e^{2\pi i h_j}$ за $\forall j \in J$. В резултат, хиперповърхнината $X = Z(f)$ се задава като множество на нулите на глобална холоморфна функция $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$.
Да забележим, че горните разглеждания използват анулирането на кохомологиите на Dolbeault, установено от Твърдение 6.10 чрез аналитични средства ($\overline{\partial}$-лема на Poincaré). За да изведем анулирането на някои кохомологични групи на Čech използваме първо тяхната изоморфност с кохомологиите на снопа $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ (Лема на Cartan), а после изоморфността на кохомологиите на снопа $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ и със съответните кохомологии на Dolbeault.

3. Фини и меки снопове

Анулирането на кохомологиите $H^i(M, \mathcal{A}^{p,q}) = 0$ на сноповете $\mathcal{A}^{p,q}$ с $i \geq 1$ се дължи на наличието на техни разбивания на единицата.
За да уточним това понятие да напомним, че отворено покритие $X = \cup_{i \in I} U_i$ на топологично пространство X е локално компактно, ако всяка точка $x \in X$ се съдържа в краен брой отворени подмножества U_i. Отвореното покритие $X = \cup_{i \in I} V_i$ на топологично пространство X е подпокритие на отвореното покритие $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$, ако за $\forall i \in I$ съществува $\alpha \in A$, така че $V_i \subseteq U_\alpha$. Топологично пространство X е паракомпактно, ако всяко отворено покритие $X = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ има локално крайно покритие $X = \cup_{i \in I} V_i$. Да напомним, че топологично пространство X е локално компактно, ако всяка точка $x \in X$ има компактна околност $x \in K_x \subseteq X$. Теорема 13 от приложението към настоящата тема установява, че всяко локално компактно Хаусдорфово пространство X с изброима база на топологията е паракомпактно. Оттук следва, че всяко комплексно многообразие M е паракомпактно.

Определение 9.2. *Снопът $\mathcal{F}$ върху паракомпактно топологично пространство X е фин, ако за всяко локално крайно отворено покритие $X = \cup_{i \in I} U_i$ съществуват морфизми на снопове $\eta_i : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ със следните две свойства:*
(i) за $\forall i \in I$ съществува отворено множество $V_i \supseteq X \setminus U_i$, така че хомоморфизмите $\eta_{i,x} : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}_x$ на стълбовете на $\mathcal{F}$ над всички точки $x \in V_i$ са нулеви и
(ii) $\sum\limits_{i \in I} \eta_i = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$.

Условие (i) от определението за фин сноп означава, че носителят на η_i се съдържа в U_i. Второто условие гласи, че $s = \sum\limits_{i \in I} \eta_i(s)$ за всяко сечение s на $\mathcal{F}$. Сумата по всички $i \in I$ има смисъл, защото във всяка точка от X само краен брой събираеми са различни от нула. За произволно локално сечение $s \in \mathcal{F}(U_i)$ можем да разглеждаме $\eta_i(s) \in \mathcal{F}(X)$ като глобално сечение. Понеже $\eta_i(s)$ се анулира в околност на границата на U_i, можем да продължим $\eta_i(s)$ извън U_i чрез анулиране, възоснова на определението за сноп.
Върху произволно комплексно многообразие M, сноповете $\mathcal{A}^{p,q}$ на гладките диференциални (p,q)-форми са фини. По-точно, за произволно локално крайно отворено покритие $M = \cup_{i \in I} U_i$ съществува разбиване на единицата $\{\rho_i\}_{i \in I}$, съставено от гладки функции $\rho_i : M \to [0,1]$ с компактен носител $\mathrm{Supp}(\rho_i) \subset U_i$ и $\sum\limits_{i \in I} \rho_i = 1$. Определяме $\eta_i : \mathcal{A}^{p,q} \to \mathcal{A}^{p,q}$ като умножението с ρ_i и проверяваме непосредствено изпълнението на условията (i) и (ii) от Определение 9.2 за фин сноп.
Ще докажем, че фините снопове имат анулиращи се кохомологии от положителни степени.
Фиността на сноп не е достатъчно съвместима с построението на тънка резолвента на Godement. Затова въвеждаме по-слабото понятие за мек сноп, което

е по-добре съгласувано с построението на точни редици от снопове. За целта да отбележим, че както при геометрична структура, стъблата $\mathcal{F}|_{Z,x} = \mathcal{F}_x$ не се променят при ограничение върху затворено подмножество $Z \subseteq X$, съдържащо x. По-точно, нека $T(\mathcal{F}) = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$ е непресичащото се обединение на стъблата на $\mathcal{F}$. За произволно подмножество $U \subseteq Z$ означаваме с $\Gamma(U, \mathcal{F}|_Z)$ множеството на изображенията $s : U \to T(\mathcal{F})$ с $s(x) \in \mathcal{F}_x$ за $\forall x \in Z$, за които s е локално ограничение на сечение на $\mathcal{F}$.

Определение 9.3. *Снопът $\mathcal{F}$ върху паракомпактно топологично пространство X се нарича мек, ако хомоморфизмът на ограничение $\mathcal{F}(X) \to \Gamma(Z, \mathcal{F}|_Z)$ е сюрективен за всяко затворено подмножество $Z \subseteq X$.*

Сноповете $\mathrm{ds}\mathcal{F}$ на прекъснатите сечения са меки.
Твърдим, че произволен фин сноп е мек. За целта трябва да докажем, че всяко сечение $t \in \Gamma(Z, \mathcal{F}|_Z)$ се продължава до сечение на $\mathcal{F}$ над X. По определение, съществуват локални продължения. По-точно, можем да намерим отворени подмножества $U_i \subseteq X$, чието обединение $\cup_{i \in I} U_i$ съдържа Z и сечения $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ с $s_i(x) = t(x)$ за $\forall x \in Z \cap U_i$. Към тези отворени подмножества на X присъединяваме отвореното подмножество $U_0 := X \setminus Z$ и нулевото сечение $s_0 := \mathbb{O} \in \mathcal{F}(U_0)$. Съгласно паракомпактността на X, след преминаване към подпокритие можем да считаме, че отвореното покритие $X = \cup_{i \in I} U_i \cup U_0$ е локално крайно. Сега за финия сноп $\mathcal{F}$ съществуват морфизми $\eta_i : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ с носител $\mathrm{Supp}\eta_i \subset U_i$ и $\sum_{i \in I} \eta_i + \eta_0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{F}}$. След подходящи нулеви продължения можем да считаме, че $\eta_i(s_i) \in \mathcal{F}(X)$ са глобални сечения и

$$s = \sum_{i \in I} \eta_i(s_i) + \eta_0(s_0) = \sum_{i \in I} \eta_i(s_i) \in \mathcal{F}(X)$$

е глобално сечение. Във всяка точка $x \in Z$ имаме $s_i(x) = t(x)$ за $\forall i \neq 0$, откъдето $s(x) = t(x)$. Това установява сюрективността на $\mathcal{F}(X) \to \Gamma(Z, \mathcal{F}|_Z)$ и доказва, че фините снопове са меки.
Доказателството на анулирането на кохомологичните групи $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ от степен $i \geq 1$ на фините снопове $\mathcal{F}$ върху паракомпактно топологично пространство X е аналогично на доказателството на Твърдение 8.12 за анулиране на $H^i(X, \mathcal{G}) = 0$ с $i \geq 1$ за тънък сноп $\mathcal{G}$. Следващата Лема 9.4 е аналог на Лема 8.8 от тема 8, а Лема 9.5 е подобна на Лема 8.11.

Лема 9.4. *Ако*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\beta} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

е къса точна редица от снопове върху паракомпактно топологично пространство X и $\mathcal{F}'$ е мек сноп, то съответните глобални сечения

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{F}''(X) \longrightarrow 0$$

образуват точна редица от абелеви групи.

Доказателство: Съгласно Лема 8.6, достатъчно е да докажем сюрективността на хомоморфизма $\beta_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X)$. Избираме $s'' \in \mathcal{F}''(X)$. Благодарение на локалната сюрективност на β и паракомпактността на X, съществува локално крайно отворено покритие $X = \cup_{i \in I} U_i$ и сечения $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ с $\beta_{U_i}(s_i) = s''|_{U_i}$. Съгласно Лема 7.17, паракомпактното топологично пространство X е нормално и съществуват затворени подмножества $K_i \subset U_i$, чиито вътрешни точки покриват X. Обединението на произволен брой затворени подмножества K_i е затворено подмножество на X, поради локалната крайност на покритието на X чрез техните вътрешности.

Да разгледам множеството

$$\Sigma = \{(K, s) \ | \ K = \cup_{i\in J} K_i \quad \text{за} \quad J \subseteq I, \ \ s \in \mathcal{F}(K), \ \ \beta_K(s) = s''|_K\}.$$

От $(K_i, s_i|_{K_i}) \in \Sigma$ за $\forall i \in I$ се вижда, че множеството Σ е непразно. Произволно линейно наредено подмножество $\{(K_\alpha, s_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ има точна горна граница $(\cup_{\alpha\in A} K_\alpha, s) \in \Sigma$ с $s \in \mathcal{F}(\cup_{\alpha\in A} K_\alpha)$ и $s|_{K_\alpha} = s_\alpha$ за $\forall \alpha \in A$. По Лемата на Zorn можем да изберем максимален елемент $(K_{\max}, s_{\max}) \in \Sigma$. Твърдим, че $K_i \subseteq K_{\max}$ за $\forall i \in I$, откъдето $K_{\max} = X$. По-точно, за $\forall i \in I$ сеченията $s_i|_{K_i\cap K_{\max}}$ и $s_{\max}|_{K_i\cap K_{\max}}$ се изобразяват в s''. Затова съществува $s' \in \mathcal{F}'(K_i \cap K_{\max})$ с $\alpha(s') = (s_{\max} - s_i)|_{K_i\cap K_{\max}}$. По предположение, снопът $\mathcal{F}'$ е мек и съществува $t' \in \mathcal{F}'(K_i)$ с $t'|_{K_i\cap K_{\max}} = s'$. В резултат, $s_{\max}|_{K_i\cap K_{\max}} = s_i + \alpha(t')|_{K_i\cap K_{\max}}$ и съществува сечение $s \in \mathcal{F}(K_i \cup K_{\max})$ с $s|_{K_i} = s_i + \alpha(t')$, $s|_{K_{\max}} = s_{\max}$ и $\beta(s) = s''|_{K_i\cup K_{\max}}$. Съгласно максималността на $(K_{\max}, s_{\max}) \in \Sigma$ получаваме $K_i \cup K_{\max} = K_{\max}$, откъдето $K_i \subseteq K_{\max}$ за $\forall i \in I$ и $K_{\max} = X$, Q.E.D.

Лема 9.5. *Ако*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

е точна редица от снопове с меки снопове $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}$, то $\mathcal{F}''$ също е мек.

Доказателство: За произволно затворено подмножество $Z \subseteq X$ имаме комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(X) \arrow[r, "\beta_X"] \arrow[d, "\sigma"] & \mathcal{F}''(X) \arrow[d, "\sigma''"] \\
\Gamma(Z, \mathcal{F}|_Z) \arrow[r, "\beta_Z"] & \Gamma(Z, \mathcal{F}''|_Z)
\end{tikzcd}$$

със сюрективни β_X, β_Z и σ. Сюрективността на β_X и β_Z следва от Лема 9.4, докато сюрективността на σ се дължи на мекостта на $\mathcal{F}$. В резултат получаваме сюрективността на σ'' и доказваме, че снопът $\mathcal{F}''$ е също мек, Q.E.D.
С това сме готови да докажем следното

Твърдение 9.6. *Ако $\mathcal{F}$ е фин сноп върху паракомпактно Хаусдорфово топологично пространство X, то $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ за $\forall i \geq 1$.*

Доказателство: Съгласно Лема 9.5, факторът на мек сноп относно мек сноп е мек. По този начин получаваме мекостта на сноповете $\mathcal{G}^i$ за $\forall i \geq 0$ от комутативната диаграма (8.8), намираща се в тема 8. В резултат, цялата диаграма остава точна след вземане на глобални сечения и

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}^0(X) \longrightarrow \mathcal{F}^1(X) \longrightarrow \cdots$$

е точна редица от абелеви групи. Това дава $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ за $\forall i \geq 1$, Q.E.D.
Приложението на Твърдение 9.6 към фините снопове $\mathcal{A}^{p,q}$ върху комплексно многообразие M дава анулирането на кохомологиите $H^i(M, \mathcal{A}^{p,q}) = 0$ за $\forall i \geq 1$ и довършва доказателството на Теорема 12 на Dolbeault.
Доказателството на Теорема 12 използва следния по-общ принцип: Ако

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{E}^0 \longrightarrow \mathcal{E}^1 \longrightarrow \cdots$$

е резолвента на снопа $\mathcal{F}$ със снопове $\mathcal{E}^k$, чиито кохомологии $H^i(X, \mathcal{E}^k) = 0$ са нулеви за $\forall i \geq 1$, то кохомологиите на снопа $\mathcal{F}$ съвпадат с кохомологиите на коверижния комплекс

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0(X) \longrightarrow \mathcal{E}^1(X) \longrightarrow \mathcal{E}^2(X) \longrightarrow \cdots .$$

4. Приложение - паракомпактност на локално компактните Хаусдорфови пространства

Лема 9.7. *Ако X е локално компактно Хаусдорфово топологично пространство с изброима база на топологията, то съществува изброима база на топологията върху X, съставена от отворени подмножества с компактна затворена обвивка.*

Доказателство: Нека $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ е изброима база на топологията върху X. За всяка точка $x \in X$ съществува отворена околност U_x на x върху X с компактна затворена обвивка $\overline{U_x}$. За всяка такава отворена околност съществува отворено множество $V_{n(x)}$ от дадената база с $x \in V_{n(x)} \subseteq U_x$. Затворената обвивка $\overline{V_{n(x)}}$ на $V_{n(x)}$ е компактна в качеството си на затворено подмножество на компакта $\overline{U_x}$. Фамилията $\{V_{n(x)}\}_{x \in X} \subseteq \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ е изброима база на топологията върху X с компактни затворени обвивки $\overline{V_{n(x)}}$, Q.E.D.

Теорема 13. *Всяко локално компактно Хаусдорфово топологично пространство X с изброима база на топологията е паракомпактно.*

Доказателство: Нека $\{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ е изброима база на топологията върху X, а $\{U_i\}_{i \in I}$ е отворено покритие на X. Съгласно определението за паракомпактност на X, достатъчно е да докажем съществуването на локално крайно подпокритие на $\{U_i\}_{i \in I}$. Всяка точка $x \in X$ принадлежи на някое U_i и на някое $V_{n(x)} \subseteq U_i$. Следователно $\{V_{n(x)}\}_{x \in X}$ е изброимо подпокритие на $\{U_i\}_{i \in I}$. Всяко подпокритие на $\{V_{n(x)}\}_{x \in X}$ е подпокритие на $\{U_i\}_{i \in I}$, така че е достатъчно да установим съществуването на локално крайно подпокритие на изброимо отворено покритие $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ на X, за да докажем теоремата.
Съгласно Лема 9.7, можем да считаме, че затворените обвивки $\overline{U_n}$ на всички множества от това покритие са компактни. Заменяме U_n с $\cup_{j \leq n} U_j$ и получаваме изброимо покритие на X с отворени подмножества $\cup_{j \leq n} U_j$ с компактни затворени обвивки $\overline{(\cup_{j \leq n} U_j)} = \cup_{j \leq n} \overline{U_j}$, защото крайното обединение на компакти е компакт. Отворените подмножества $U_n \subseteq X$ с компактна затворена обвивка $\overline{U_n}$ образуват ненамаляваща редица $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq U_{n+1} \subseteq \ldots$. Всяко $\overline{U_n}$ се покрива от краен брой U_i, така че съществува достатъчно голямо $N = N(n) \in \mathbb{N}$ с $\overline{U_n} \subseteq U_N$. Рекурсивно заменяме U_{n+1} с U_N за $\forall n \in N$ и получаваме изброимо отворено покритие $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ на X с компактни затворени обвивки $\overline{U_n} \subseteq U_{n+1}$ за $\forall n \in N$. Нека $K_1 := \overline{U_1}$ и $K_n := \overline{U_n} \setminus U_{n-1} = \overline{U_n} \cap (X \setminus U_{n-1})$ за $\forall n \geq 2$. По предположение, K_1 е компактно подпространство на X. В качеството си на затворени подмножества на компактните множества $\overline{U_n}$, K_n са компактни за $\forall n \geq 2$. Да забележим, че за произволни естествени $n > N$ имаме $K_n \cap U_N = \emptyset$.
За $\forall n \geq 2$ отворените подмножества $W_n := U_{n+1} \setminus \overline{U_{n-2}}$ съдържат K_n. Оттук, за $\forall x \in K_n$ съществува отворена околност $V_{m(x),n} \subseteq W_n$ на x. Компактът K_n се покрива с краен брой $V_{m(x),n}$ и $\{V_{m(x),n}\}_{x \in K_n, n \geq 2}$ е локално крайна фамилия от отворени подмножества на X, чието обединение съдържа $X \setminus \overline{U_1}$. Добавяме краен брой $V_{m(x)} \subseteq U_2$, покриващи компакта $\overline{U_1}$ и получаваме търсеното локално крайно отворено подпокритие на $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$, Q.E.D.