Глава 8

Снопове и кохомологии

1. Кохомологиите като препятствия за глобално изпълнение на локални свойства

Определение 8.1. *Частните на хороморфни функции върху комплексно многообразие M се наричат мероморфни функции.*

Мероморфните функции $\frac{f}{g}$, $f, g \in \mathcal{O}_M(U)$ върху отворено подмножество $U \subseteq M$ не са определени върху множеството на нулите на g.
Нека M е Риманова повърхнина или 1-мерно комплексно многообразие. Избираме холоморфна координата z в околност U на точка $p \in M$ върху M с $z(p) = 0$. Съгласно Твърдение 2.1, за достатъчно малка околност W на p върху M, локалните холоморфни функции се представят във вида

$$\mathcal{O}_M(W) = \{z^m u \ \mid \ m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}, \ \ u \in \mathcal{O}_M^*(W)\}.$$

Следователно локалните мероморфни функции върху W са от вида

$$\mu(z) = z^k v(z) \quad \text{за} \quad k \in \mathbb{Z}, \ \ v \in \mathcal{O}_M^*(W).$$

Развивайки $v(z)$ в Тейлъров ред около $z(p) = 0$ получаваме локално представяне

$$\mu(z) = \sum_{j \geq -N} a_j z^j$$

за някакво цяло число N. Крайната сума $\pi(\mu) := \sum\limits_{j<0} a_j z^j$ се нарича главна част на μ в p. Ясно е, че мероморфна функция μ е холоморфна в точка p тогава и само тогава, когато има нулева главна част $\pi(\mu) = 0$.
Задачата на Mittag-Leffler поставя въпроса за съществуване на мероморфна функция със зададени главни части в дискретно множество от точки $p_1, p_2, \ldots$. Ще разгледаме два подхода за решаване на тази задача.
Първият подход се състои от избор на достатъчно малки отворени околности U_i на p_i върху M, така че $p_j \notin U_i$ за $\forall i \neq j$. Нека π_i са зададените главни части в p_i, $U_0 := M \setminus \{p_1, p_2, \ldots\}$ и $\pi_0 := 0$. Мероморфната функция π_i върху U_i е холоморфна във всички точки от $U_i \setminus \{p_i\}$, така че $g_{i,j} := \pi_i - \pi_j$ са холоморфни функции върху $U_i \cap U_j$ за $\forall i \neq j$. Ако f е мероморфна функция с главни части π_i в p_i, то $f - \pi_i$ са холоморфни в U_i и $g_{i,j} = (f - \pi_j) - (f - \pi_i)$ са разлики на холоморфни функции. Обратно, ако съществуват холоморфни функции $f_i \in \mathcal{O}_M(U_i)$ с $g_{i,j} = f_j - f_i$, то функциите $f_i + \pi_i$ са съгласувани върху сеченията на дефиниционните си области U_i. По-точно, от $(f_j - f_i)|_{U_i \cap U_j} = g_{i,j}|_{U_i \cap U_j} = (\pi_i - \pi_j)|_{U_i \cap U_j}$ следва $(f_i + \pi_i)|_{U_i \cap U_j} = (f_j + \pi_j)|_{U_i \cap U_j}$. Съгласуваността на $f_i + \pi_i$ гарантира съществуването на мероморфна функция f с главни части π_i в p_i.
Да обърнем внимание на това, че $g_{i,j} + g_{j,k} = g_{i,k}$ върху $U_i \cap U_j \cap U_k$. Да означим с $\mathbf{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ произволно отворено покритие, а с $\mathbf{g}$-фамилията от холоморфни функции $g_{i,j} \in \mathcal{O}_M(U_i \cap U_j)$. Пространството

$$Z^1(\mathbf{U}, \mathcal{O}_M) = \{\mathbf{g} \ \mid \ g_{i,j} + g_{j,k} = g_{i,k} \quad \text{върху} \quad U_i \cap U_j \cap U_k\}$$

на 1-коциклите на покритието $\mathbf{U}$ се състои от фамилиите $\mathbf{g} = \{g_{i,j}\}_{i,j\in I}$, изпълняващи равенствата $g_{i,j}+g_{j,k} = g_{i,k}$ върху всички непразни сечения $U_i \cap U_j \cap U_k$. Фамилиите $\mathbf{g} = \{g_{i,j}\}_{i,j\in I}$, за които съществуват локални холоморфни функции $f_i \in \mathcal{O}_M(U_i)$ с $g_{i,j} = f_i - f_j$ за $\forall i, j \in I$ се наричат 1-когранници. Означаваме с $B^1(\mathbf{U}, \mathcal{O}_M)$ множеството на 1-кограниците на $\mathbf{U}$. Ясно е, че $B^1(\mathbf{U}, \mathcal{O}_M)$ е комплексно подпространство на линейното пространство $Z^1(\mathbf{U}, \mathcal{O}_M)$ над $\mathbb{C}$. Фактор-пространството

$$H^1(\mathbf{U}, \mathcal{O}_M) := Z^1(\mathbf{U}, \mathcal{O}_M)/B^1(\mathbf{U}, \mathcal{O}_M)$$

е първата кохомологична група на Čech на снопа $\mathcal{O}_M$ относно покритието $\mathbf{U}$. Горните разглеждания показват, че задачата на Mittag-Leffler има решение точно когато съществува отворено покритие $\mathbf{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ с $p_j \notin U_i$ за $\forall i \neq j$, за което 1-коцикълът $\mathbf{g} = \{g_{i,j}\}_{i,j\in I}$ с $g_{i,j} := \pi_i - \pi_j \in \mathcal{O}_M(U_i \cap U_j)$ представя нулевия кохомологичен клас в групата $H^1(\mathbf{U}, \mathcal{O}_M)$. По този начин, елементите на $H^1(\mathbf{U}, \mathcal{O}_M)$ се тълкуват като "препятствия"за съществуване на решение на задачата на Mittag-Leffler.
Вторият подход за решаване на задачата на Mittag-Leffler е по-аналитичен и измерва "препятствията"за съществуване на решение с кохомологиите на Dolbeault. В означенията от първия подход, нека ρ_i са гладки функции с компактен носител $\mathrm{Supp}(\rho_i) \subset U_i$, които имат стойност 1 върху достатъчно малка околност

$$p_i \in V_i \subset \mathrm{Supp}(\rho_i) \subset U_i.$$

Тогава

$$\omega := \overline{\partial}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho_i \pi_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \overline{\partial}(\rho_i \pi_i) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \overline{\partial}\rho_i$$

е гладка, $\overline{\partial}$-затворена $(0,1)$-форма върху M, която се анулира тъждествено върху околностите V_i на p_i. Ако съществува гладка функция $\Phi : M \to \mathbb{C}$ с $\overline{\partial}\Phi = \omega$, то Φ е холоморфна в околностите V_i на p_i, съгласно $\omega|_{V_i} \equiv 0$. Разликата

$$f := \sum_{i=0}^{\infty} \rho_i \pi_i - \Phi$$

е холоморфна функция върху $U_0 = M \setminus \{p_1, p_2, \dots\}$, защото $\overline{\partial} f = \omega - \overline{\partial}\Phi \equiv 0$. Следователно f е решение на задачата на Mittag-Leffler в качеството си на мероморфна функция върху M с главни части π_i в p_i. Да напомним определението

$$H^{0,1}(M) := \frac{\{\omega \in A^{0,1}(M) \ \mid \ \overline{\partial}\omega = 0\}}{\{\overline{\partial}\Phi \ \mid \ \Phi \in A^{0,0}(M)\}}$$

на първата кохомологична група на Dolbeault. Горните разглеждания показват, че ако съществуват гладки функции $\rho_i : M \to \mathbb{C}$ с $\mathrm{Supp}(\rho_i) \subset U_i$ и $\rho_i|_{V_i} \equiv 1$ за околности $p_i \in V_i \subseteq \mathrm{Supp}(\rho_i)$, така че диференциалната форма $\omega := \overline{\partial}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \rho_i \pi_i\right)$ представя нулевия кохомологичен клас от $H^{0,1}(M)$, то задачата на Mittag-Leffler има решение. Обратно, ако задачата на Mittag-Leffler има решение f, то $\Phi := \sum\limits_{i=0}^{\infty} \rho_i \pi_i - f$ е гладка функция върху M с $\overline{\partial}\Phi = \overline{\partial}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \rho_i \pi_i\right)$ и $\overline{\partial}$-затворената $(0,1)$-форма $\omega := \overline{\partial}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \rho_i \pi_i\right)$ представя нулевия кохомологичен клас в $H^{0,1}(M)$. По този начин, задачата на Mittag-Leffler има решение точно когато кохомологичният клас на $\omega := \overline{\partial}\left(\sum\limits_{i=0}^{\infty} \rho_i \pi_i\right)$ в $H^{0,1}(M)$ е нулев. Затова

елементите на $H^{0,1}(M)$ също се интерпретират като "препятствия"за съществуване на решение на задачата на Mittag-Leffler върху M. Съгласно Твърдение 6.10, $H^{0,1}(\mathbb{C}) = 0$ и задачата на Mittag-Leffler винаги има решение върху $\mathbb{C}$.
Да отбележим, че задачата на Mittag-Leffler винаги има локално решение върху достатъчно малко отворено подмножество на комплексна крива M. Горните разглеждания показват, че "препятствието"за "сглобяване"на локалните решения в глобално решение лежи в някаква кохомологична група на M. Благодарение на наличието на изоморфизъм $H^1(\mathbf{U}, \mathcal{O}_M) \simeq H^{0,1}(M)$ на кохомологиите на Čech с кохомологиите на Dolbeault, двата подхода за глобално решаване на задачата на Mittag-Leffler са еквивалентни.

2. Определение за сноп

Определение 8.2. *Нека X е топологично пространство. Сноп $\mathcal{F}$ върху X е съответствие, което на всяко отворено подмножество $U \subseteq X$ съпоставя група $\mathcal{F}(U)$, чиито елементи се наричат сечения на $\mathcal{F}$ над U. При това, всяко включване на отворени подмножества $V \subseteq U$ отговаря на хомоморфизъм на ограничение $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$, така че*
(i) $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ за произволни отворени подмножества $W \subseteq V \subseteq U$ на X и
(ii) ако сеченията $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ изпълняват условията за съгласуване

$$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \quad \text{за} \quad \forall i, j \in I,$$

то съществува единствено сечение $s \in \mathcal{F}(\cup_{i \in I} U_i)$ с $s|_{U_i} = s_i$ за $\forall i \in I$.

За $s \in \mathcal{F}(U)$ и $V \subseteq U$ използваме понякога означението $s|_V$ вместо $\rho_V^U(s)$. В голяма част от случаите, абелевите групи $\mathcal{F}(U)$ са комутативни пръстени или линейни пространства. В такъв случай казваме, че $\mathcal{F}$ е сноп от комутативни пръстени или линейни пространства и предполагаме, че хомоморфизмите на ограничение $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ за $\forall V \subseteq U$ са, съответно, хомоморфизми на пръстени или линейни изображения. Понякога бележим с $\Gamma(U, \mathcal{F})$ групата $\mathcal{F}(U)$ на сеченията на $\mathcal{F}$ върху U.
Произволна геометрична структура $\mathcal{O}_X$ върху топологично пространство X е сноп от комутативни пръстени с единица. Това се вижда от Определение 3.7, което задава $\mathcal{O}_X(U)$ като подпръстен на пръстена $C(U)$ на непрекъснатите функции върху U за всяко отворено подмножество $U \subset X$.
Произволно векторно разслоение $\pi : E \to X$ е асоцирано със сноп $\mathcal{E}$ върху X. По-точно, $\mathcal{E}(U)$ е пространството на непрекъснатите сечения $s : U \to E$, $\pi \circ s = \mathrm{Id}_U$ на E над U, за произволно отворено подмножество $U \subseteq X$. Ако $\pi : E \to X$ е гладко или холоморфно векторно разслоение, обикновено полагаме $\mathcal{E}(U)$ да е пространството на гладките, съответно, холоморфните сечения $s : U \to E$ на E над U.
Върху комплексно многообразие M има три типа интересни снопове. Първият тип се състои от локално постоянните снопове. Такива са сноповете $\mathbb{K}_M$ за $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, които съпоставят на отворено подмножество $U \subseteq M$ множеството $\mathbb{K}_M(U)$ на локално постоянните изображения $U \to \mathbb{K}$. Тези снопове характеризират топологичната структура на M. Например, размерността на линейното пространство $\Gamma(M, \mathbb{C}_M) = \mathbb{C}_M(M)$ на глобалните сечения е равна на броя на свързаните компоненти на M, защото произволна локално постоянна функция е постоянна върху всяка свързана компнента.
Вторият тип снопове е съставен от гладките сечения на гладки векторни разслоения $E \to M$. Един от най-важните примери за такива снопове е снопът на гладките сечения на реалното допирателно разслоение $T^{\mathbb{R}}M \to M$, който съпоставя на отворено подмножество $U \subseteq M$ пространството на гладките векторни полета $U \to T^{\mathbb{R}}M$ върху U. Други примери от този тип са сноповете

$\mathcal{A}^k$, съпоставящи на отворено подмножество $U \subseteq M$ пространството $\mathcal{A}^k(U)$ на гладките диференциални k-форми върху U. Тези снопове са съставени от гладките сечения на векторните разслоения $(\Lambda^k T^{\mathbb{R}} M)^*$. Аналогично, нека $\mathcal{A}^{p,q}$ е снопът на гладките диференциални (p,q)-форми $\mathcal{A}^{p,q}(U)$ върху отворените подмножества $U \subseteq M$. Вторият тип снопове носи информация за структурата на M като гладко многообразие и се използва за развиване на диференциално и интегрално смятане върху M.
Третият тип снопове характеризира комплексната структура върху M. Пример за такъв сноп е структурният сноп $\mathcal{O}_M$, за който $\mathcal{O}_M(U)$ се състои от холоморфните функции $U \to \mathbb{C}$. Разглеждаме също снопа $\mathcal{O}_M^*$, съпоставящ на отворено подмножество $U \subseteq M$ мултипликативната група $\mathcal{O}_M^*(U)$ на никъде неанулиращите се холоморфни функции $U \to \mathbb{C}^*$. Основни примери за снопове от третия тип са сноповете Ω_M^p за $p \in \mathbb{N}$, $p \leq \dim_{\mathbb{C}} M$, съставени от холоморфните (p,q)-форми върху M. Най-общо, сноповете от третия тип са снопове от холоморфни сечения на холоморфни векторни разслоения върху M.

3. Стъбла и операции на снопове

Нека $\mathcal{F}$ е сноп върху топологично пространство X, $x \in X$ е точка от X. Стъблото $\mathcal{F}_x$ на снопа $\mathcal{F}$ в x е проективната граница

$$\mathcal{F}_x = \lim_{U \ni x} \mathcal{F}(U)$$

върху всички отворени околности U на x върху X. Стъблото $\mathcal{F}_x$ е абелева група, съответно, комутативен пръстен или линейно пространство, ако $\mathcal{F}$ е сноп от абелеви групи, комутативни пръстени или линейни пространства. Елементите на стъблото са зародишите на сеченията в x.
Например, локалният пръстен $\mathcal{O}_{M,p}$ на точка p от комплексно многообразие M е стъблото на структурния сноп $\mathcal{O}_M$ в p.
Морфизъм $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ на снопове е фамилия от хомоморфизми групи $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$, която е съгласувана с хомоморфизмите на ограничение посредством равенствата $\rho_V^U \circ f_U = f_V \circ \rho_V^U$ за произволни отворени $V \subseteq U \subseteq X$,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "f_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho_V^U"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "f_V"] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}.$$

Ако $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ са влагания за всички отворени подмножества $U \subseteq X$, то казваме, че $\mathcal{F}$ е подсноп на $\mathcal{G}$.
Ядрото $\ker f$ на морфизъм на снопове $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ е подснопът на $\mathcal{F}$ със сечения

$$\ker f(U) := \{s \in \mathcal{F}(U) \ \mid \ f_U(s) = 0\} \tag{8.1}$$

за всички отворени подмножества $U \subseteq X$.

Задача 8.3. *Да се провери, че съответствието $U \mapsto \ker f(U)$, определено от (8.1) задава подсноп на $\mathcal{F}$.*

Произволен морфизъм на снопове $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ е асоциран с подсноп $\mathrm{im} f$ на $\mathcal{G}$, наречен образ на f. За да е изпълнено условие (ii) от Определение 8.2 за сноп, полагаме $\mathrm{im} f(U)$ да се състои от онези $s \in \mathcal{G}(U)$, за които съществуват отворено покритие $U = \cup_{i \in I} U_i$ и $s_i \in \mathrm{im} f_{U_i}$ за $\forall i \in I$, така че $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ за $\forall i, j \in I$ и $s|_{U_i} = s_i$ за $\forall i \in I$.

Задача 8.4. *Да се докаже, че съответствието* $U \mapsto \mathrm{im}f(U)$ *за определеното по-горе подмножество* $\mathrm{im}f(U)$ *на* $\mathcal{G}(U)$ *задава подсноп на* $\mathcal{G}$.

Морфизмът на снопове $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ е инективен, ако $\ker f = 0$ и сюрективен, ако $\mathrm{im}f = \mathcal{G}$.
Редица

$$\mathcal{F}^0 \xrightarrow{f^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{f^1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{f^2} \cdots \xrightarrow{f^{k-2}} \mathcal{F}^{k-1} \xrightarrow{f^{k-1}} \mathcal{F}^k \tag{8.2}$$

от морфизми на снопове е комплекс или ко-верижен комплекс, ако $f^{i+1} \circ f^i = \mathbb{O}$ за $\forall 0 \leq i \leq k-2$. Редица от морфизми на снопове (8.2) е точна, ако

$$\ker f^{i+1} = \mathrm{im} f^i \quad \text{за} \quad \forall 0 \leq i \leq k-2.$$

Задача 8.5. *Нека* $\mathcal{G}$ *е сноп от абелеви групи върху топологично пространство* X, *а* $\mathcal{F}$ *е подсноп на* $\mathcal{G}$. *Тогава съответствието, съпоставящо на отворено подмонжество* $U \subseteq X$ *фамилия* $\{g_i + \mathcal{F}(U_i)\}_{i\in I}$ *от съгласувани елементи* $g_i + \mathcal{F}(U_i) \in \mathcal{G}(U_i)/\mathcal{F}(U_i)$ *за някакво отворено покритие* $U = \cup_{i\in I} U_i$ *е сноп върху* X, *който наричаме фактор на* $\mathcal{G}$ *по* $\mathcal{F}$ *и бележим с* $\mathcal{G}/\mathcal{F}$.

Условието за точност на редица от морфизми на снопове е затворено, така че всяка точна редица от морфизми на снопове индуцира точна редица от хомоморфизми на съответните стъбла. Може да се докаже, че редица от морфизми на снопове е точна тогава и само тогава, когато всички индуцирани редици от хомоморфизми на стъбла са точни.
Основен пример за точна редица от снопове върху комплексно многообразие M е експоненциалната точна редица

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_M \longrightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_M^* \longrightarrow 0 \ . \tag{8.3}$$

За произволно отворено подмножество $U \subseteq M$, локално постоянните функции $\mathbb{Z}_M(U)$ с цели стойности се влагат в пръстена $\mathcal{O}_M(U)$ на холоморфните функции $U \to \mathbb{C}$. Експоненциалното изображение

$$\exp_U : \mathcal{O}_M(U) \longrightarrow \mathcal{O}_M^*(U),$$
$$\exp_U(f) := e^{2\pi i f}$$

е хомоморфизъм на адитивната група $(\mathcal{O}_M(U), +)$ върху мултипликативната група $(\mathcal{O}_M^*(U), .)$. Ядрото на exp се състои от холоморфните функции $f \in \mathcal{O}_M(U)$ с $e^{2\pi i f}|_U \equiv 1$. Оттук, холоморфните функции f от ядрото на exp приемат цели стойности и са локално постоянни. Точността на (8.3) в $\mathcal{O}_M^*$ се свежда до сюрективността на морфизма на снопове $\exp : \mathcal{O}_M \to \mathcal{O}_M^*$. Това означава, че за произволна неанулираща се холоморфна функция $g : U \to \mathbb{C}^*$ съществува локална холоморфна функция f, така че $g = e^{2\pi i f}$ върху достатъчно малка околност $U' \subseteq U$. Чрез подходящ избор на локални холоморфни координати можем да считаме, че $g : \Delta_n(a, r) \to \mathbb{C}^*$ е неанулираща се холоморфна функция върху полидиск $\Delta_n(a, r) = \prod_{i=1}^{n} \Delta(a_i, r_i)$ с достатъчно малък полирадиус $r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^{>0})^n$. Избираме $f = \log(g)$ като някакъв клон на логаритмичната функция върху $\Delta_n(a, r)$. Да обърнем внимание, че локалното логаритмуване на $g \in \mathcal{O}_M^*(U)$ не винаги води до глобално логаритмуване на $g : U \to \mathbb{C}^*$. С други думи, хомоморфизмите $\exp_U : \mathcal{O}_M(U) \to \mathcal{O}_M^*(U)$, отговарящи на отворените подмножества $U \subseteq M$ не винаги са сюрективни, въпреки че техните проективни граници $\exp_p : \mathcal{O}_{M,p} \to \mathcal{O}_{M,p}^*$ върху съответните стъбла са сюрективни във всяка точка $p \in M$. Например, за $M = \mathbb{C}$ и $U = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{C}^*$ експоненциалното изображение $\exp_{\mathbb{C}^*} : \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^*) \to \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^*(\mathbb{C}^*)$ не е сюрективно. Източно, не съществува холоморфна функция $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ с $e^{2\pi i f} = z : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$.

Горният пример илюстрира съществуването на сюрективни морфизми на снопове $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ с несюрективни хомоморфизми $f_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ за някои отворени подмножества $U \subseteq X$. Вече споменахме, че всеки морфизъм на снопове $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ индуцира хомоморфизми $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ на съответните стъбла във всички точки $x \in X$. Инективността, сюрективността и точността на редица от морфизми на снопове са локални понятия и могат да се проверяват върху съответните стъбла. По-точно, морфизъм на снопове $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ е инективен (съответно, сюрективен) тогава и само тогава, когато индуцираните хомоморфизми $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ на стъблата във всички точки $x \in X$ са инективни (съответно, сюрективни). Редица

$$\mathcal{F}^0 \xrightarrow{f^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{f^1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{f^2} \cdots \xrightarrow{f^{k-2}} \mathcal{F}^{k-1} \xrightarrow{f^{k-1}} \mathcal{F}^k$$

от морфизми на снопове е точна тогава и само тогава, когато индуцираните редици от хомоморфизми

$$\mathcal{F}^0_x \xrightarrow{f^0_x} \mathcal{F}^1_x \xrightarrow{f^1_x} \mathcal{F}^2_x \xrightarrow{f^2_x} \cdots \xrightarrow{f^{k-2}_x} \mathcal{F}^{k-1}_x \xrightarrow{f^{k-1}_x} \mathcal{F}^k_x$$

на съответните стъбла са точни във всяка точка $x \in X$.

4. Кохомологии на снопове

Лема 8.6. *Произволна къса точна редица от снопове*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \tag{8.4}$$

върху топологично пространство X отговаря на къса точна редица от абелеви групи

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(X) \xrightarrow{f_X} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{g_X} \mathcal{F}''(X) \ . \tag{8.5}$$

Доказателство: За произволен морфизъм на снопове $h : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ и произволно отворено подмножество $U \subseteq X$, пространството

$$\ker h(U) := \{s \in \mathcal{G}_1(U) \ \ | \ \ h_U(s) = 0\} = \ker h_U$$

на сеченията на ядрото на h над U съвпада с ядрото на груповия хомоморфизъм $h_U : \mathcal{G}_1(U) \to \mathcal{G}_2(U)$. В частност, $\ker h(X) = \ker h_X$. В случая който разглеждаме, от точността $\ker f = 0$ на редицата от морфизми на снопове (8.4) в $\mathcal{F}'$ следва точността $\ker f_X = \ker f(X) = 0(X) = 0_{\mathcal{F}'(X)}$ на редицата от хомоморфизми (8.5) в $\mathcal{F}'(X)$.
Точността $\mathrm{im} f = \ker g$ на (8.4) в $\mathcal{F}$ дава равенството на абелеви групи $\mathrm{im} f(X) = \ker g(X) = \ker g_X$. От определението на $\mathrm{im} f$ следва $\mathrm{im} f_X = f_X(\mathcal{F}'(X)) \subseteq \mathrm{im} f(X)$. Обратното включване $\mathrm{im} f(X) \subseteq \mathrm{im} f_X$ е изпълнено поради инективността на морфизма $f : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$. По определение, за произволен елемент $s \in \mathrm{im} f(X) \subseteq \mathcal{F}(X)$ съществуват отворено покритие $X = \cup_{i \in I} U_i$ и фамилия $f_{U_i}(\sigma'_i) \in \mathrm{im} f_{U_i}$, $\sigma'_i \in \mathcal{F}'(U_i)$ от съгласувани елементи

$$f_{U_i}(\sigma'_i)|_{U_i \cap U_j} = f_{U_j}(\sigma'_i)|_{U_i \cap U_j} \in \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \quad \text{за} \quad \forall i, j \in I, \tag{8.6}$$

така че $s|_{U_i} = f_{U_i}(\sigma'_i)$ за $\forall i \in I$. Ако $\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j} : \mathcal{F}'(U_i) \to \mathcal{F}'(U_i \cap U_j)$ са хомоморфизмите на ограничение на $\mathcal{F}'$ и $r^{U_i}_{U_i \cap U_j} : \mathcal{F}(U_i) \to \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$ са хомоморфизмите на ограничение на $\mathcal{F}$, то

$$f_{U_i}(\sigma'_i)|_{U_i \cap U_j} = r^{U_i}_{U_i \cap U_j} f_{U_i}(\sigma'_i) = f_{U_i \cap U_j}(\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(\sigma'_i))$$

по определението за морфизъм на снопове $f : \mathcal{F}' \to \mathcal{F}$. Оттук, (8.6) приема вида

$$f_{U_i \cap U_j}(\rho^{U_i}_{U_I \cap U_j}(\sigma'_i)) = f_{U_i \cap U_j}(\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(\sigma'_j))$$

и е равносилно на

$$\rho^{U_i}_{U_i \cap U_j}(\sigma'_i) - \rho^{U_j}_{U_i \cap U_j}(\sigma'_j) \in \ker f_{U_i \cap U_j} = \ker f(U_i \cap U_j) = \{0_{\mathcal{F}'(U_i \cap U_j)}\},$$

съгласно инективността на f. С други думи, сеченията $\sigma'_i \in \mathcal{F}'(U_i)$ изпълняват условията за съгласуваност

$$\sigma'_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma'_j|_{U_i \cap U_j} \quad \text{за} \quad \forall i, j \in I$$

и съществува глобално сечение $\sigma \in \mathcal{F}'(X)$ със $\sigma|_{U_i} = \sigma'_i$ за $\forall i \in I$, възоснова на определението за сноп, приложено към $\mathcal{F}'$. Твърдим, че $s = f_X(\sigma)$. По-точно,

$$s - f_X(\sigma)|_{U_i} = f_{U_i}(\sigma'_i) - f_{U_i}(\sigma|_{U_i}) = 0_{\mathcal{F}(U_i)},$$

благодарение на комутирането на f с хомоморфизмите на ограничение. Съгласно определението за сноп, приложено към $\mathcal{F}$, единственото глобално сечение на $\mathcal{F}$ с $s - f_X(\sigma)|_{U_i} = 0_{\mathcal{F}(U_i)}$ е $s - f_X(\sigma) = 0_{\mathcal{F}(X)}$ и $s = f_X(\sigma) \in \mathcal{F}(X)$. Това доказва $\ker g_X = \mathrm{im} f(X) \subseteq \mathrm{im} f_X$ и точността $\ker g_X = \mathrm{im} f_X$ на (8.5) в $\mathcal{F}(X)$, Q.E.D.
В общия случай, от $\mathrm{im} g = \mathcal{F}''$ следва $\mathrm{im} g(X) = \mathcal{F}''(X)$, но $\mathrm{im} g_X$ може да е собствена подгрупа на $\mathrm{im} g(X) = \mathcal{F}''(X)$ и не винаги g_X е сюрективно. Нека $g_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X)$ не е сюрективно и съществуват сечения $\sigma'' \in \mathcal{F}''(X) =: H^0(X, \mathcal{F}'')$, когато не се повдигат в пространството $\mathcal{F}(X) =: H^0(X, \mathcal{F})$ на глобалните сечения на $\mathcal{F}$. Продължаваме късата точна редица от глобални сечения (8.5) до дълга точна редица

$$0 \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow \tag{8.7}$$

$$\longrightarrow H^2(X, \mathcal{F}') \longrightarrow H^2(X, \mathcal{F}) \longrightarrow H^2(X, \mathcal{F}'') \longrightarrow \cdots$$

от кохомологии, така че $s'' \in H^0(X, \mathcal{F}'')$ се повдига до сечение $s \in H^0(X, \mathcal{F})$ тогава и само тогава, когато образът на s'' в $H^1(X, \mathcal{F}')$ е нулев.

Определение 8.7. *Сноп $\mathcal{F}$ над топологично пространство X е тънък, ако за всяко отворено подмножество $U \subseteq X$ хомоморфизмът на ограничение $\rho^X_U : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U)$ е сюрективен.*

Лема 8.8. *Ако снопът $\mathcal{F}'$ е тънък, то произволна къса точна редица от снопове*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

върху топологично пространство X индуцира къса точна редица

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}'(X) \xrightarrow{f_X} \mathcal{F}(X) \xrightarrow{g_X} \mathcal{F}''(X) \longrightarrow 0$$

от глабални сечения.

Доказателство: Съгласно Лема 8.6, твърдението се свежда до сюрективността на $g_X : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}''(X)$. Ще я докажем с помощта на Лемата на Zorn. За целта избираме глобално сечение $s'' \in \mathcal{F}''(X)$ и разглеждаме множеството

$$\Sigma(s'') := \{(U, s) \ \mid \ s \in \mathcal{F}(U), \ \ g_U(s) = s''|_U\},$$

където U е отворено подмножество на X. Въвеждаме частична наредба $(U_1, s_1) \leq (U_2, s_2)$, ако $U_1 \subseteq U_2$ се съдържат едно в друго и ограничението $s_2|_{U_1} = s_1$.

Съгласно определението за сноп, приложено към $\mathcal{F}$, произволно линейно наредено подмножество $\{(U_i, s_i)\}_{i\in I} \subseteq \Sigma(s'')$ има точна горна граница $\{(U = \cup_{i\in I} U_i, s)\} \in \Sigma(s'')$, където $s \in \mathcal{F}(U)$ е единственото сечение с $s|_{U_i} = s_i$ за $\forall i \in I$. По Лемата на Zorn съществува максимален елемент $(U_{\max}, s_{\max}) \in \Sigma(s'')$. Остава да установим, че $U_{\max} = X$, за да завършим доказателството на лемата.
За произволна точка $x \in X$ хомоморфизмът $g_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{F}''_x$ е сюрективен. В такъв случай може да се докаже съществуването на такава отворена околност U на x върху X, за която хомоморфизмът $g_U : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}''(U)$ е сюрективен. В резултат, съществува $s_U \in \mathcal{F}(U)$ с $g_U(s_U) = s''|_U$ и $(U, s_U) \in \Sigma$. По този начин получаваме две сечения $s_{\max}|_{U_{\max}\cap U}$, $s_U|_{U_{\max}\cap U} \in \mathcal{F}(U_{\max} \cap U)$ на $\mathcal{F}$, повдигащи $s''_{U_{\max}\cap U}$. Оттук, $(s_{\max} - s_U)|_{U_{\max}\cap U} \in \ker g_{U_{\max}\cap U}$ и съгласно точността на редицата (8.5) с $X = U_{\max} \cap U$ в $\mathcal{F}(U_{\max} \cap U)$, установена в Лема 8.6, $(s_{\max} - s_U)|_{U_{\max}\cap U} \in \mathrm{im} f_{U_{\max}\cap U}$. С други думи, съществува $s' \in \mathcal{F}'(U_{\max} \cap U)$ с

$$f_{U_{\max}\cap U}(s') = (s_{\max} - s_U)|_{U_{\max}\cap U}.$$

Инективността на f гарантира единствеността на s' с посоченото свойство. Понеже снопът $\mathcal{F}'$ е тънък, съществува $t' \in \mathcal{F}'(U)$ с $t'|_{U_{\max}\cap U} = s'$. Тогава $s_{\max} \in \mathcal{F}(U_{\max})$ и $s_U + f_U(t') \in \mathcal{F}(U)$ съвпадат върху $U_{\max} \cap U$ и определят сечение от $\mathcal{F}(U_{\max} \cup U)$, изобразяващо се върху s''. От максималността на $(U_{\max}, s_{\max}) \in \Sigma(s'')$ следва $U_{\max} \cup U = U_{\max}$, откъдето $x \in U_{\max}$. Това доказва $U_{\max} = X$ и съществуването на $s_{\max} \in \mathcal{F}(X)$ с $g_X(s_{\max}) = s''$, Q.E.D.
Произволен сноп $\mathcal{F}$ има канонична резолвента, съставена от тънки снопове. За целта, нека $T(\mathcal{F}) := \coprod_{x\in X} \mathcal{F}_x$ е непресичащото се обединение на всички стъбла на $\mathcal{F}$. Определяме снопа $\mathrm{ds}\mathcal{F}$ на прекъснатите сечения на $\mathcal{F}$ (discontinuous sections of $\mathcal{F}$) като съответствието

$$U \mapsto \mathrm{ds}\mathcal{F}(U) := \{s : U \to T(\mathcal{F}) \mid s(x) \in \mathcal{F}_x \quad \text{за} \quad \forall x \in U\}$$

върху отворените подмножества $U \subseteq X$. Снопът $\mathrm{ds}\mathcal{F}$ е тънък, защото за всяко отворено подмножество $U \subseteq X$ и всяко сечение $s : U \to T(\mathcal{F})$ от $\mathrm{ds}\mathcal{F}(U)$ съществува продължение $s : X \to T(\mathcal{F})$ на s с $s(x) \in \mathcal{F}_x$ за $\forall x \in X$. Може да се докаже, че изображението $\varepsilon : \mathcal{F} \to \mathrm{ds}\mathcal{F}$, съпоставящо на сечение $s \in \mathcal{F}(U)$ прекъснатото сечение $\check{s} : U \to T(\mathcal{F})$ с $\check{s}(x) = s_x := \lim\limits_{U\supseteq V\ni x} s|_V$ е инективно.
Продължавайки по същия начин получаваме точна редица от снопове

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathcal{F}^0 \xrightarrow{d^0} \mathcal{F}^1 \xrightarrow{d^1} \mathcal{F}^2 \xrightarrow{d^2} \cdots,$$

в която всички $\mathcal{F}^i$ са тънки. По-точно, определяме $\mathcal{F}^0 := \mathrm{ds}\mathcal{F}$. Разглеждаме фактор-снопа $\mathcal{G}^0 := \mathcal{F}^0/\mathrm{im}\varepsilon$ и полагаме $\mathcal{F}^1 := \mathrm{ds}\mathcal{G}^0$. Избираме $d^0 : \mathcal{F}^0 \to \mathcal{F}^1$ като композицията на сюрективния морфизъм на снопове $\pi^0 : \mathcal{F}^0 \to \mathcal{G}^0$ и инективния морфизъм на снопове $\varepsilon^0 : \mathcal{G}^0 \to \mathrm{ds}\mathcal{G}^0$. Продължавайки по същия начин получаваме комутативна диаграма от вида

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[d, "\varepsilon"] & & \mathcal{G}^1 \arrow[d, "\varepsilon^1"] & & \mathcal{G}^3 \arrow[d, "\varepsilon^3"] \\
\mathcal{F}^0 \arrow[r, "d^0"] \arrow[d, "\pi^0"'] & \mathcal{F}^1 \arrow[ur, "\pi^1"] \arrow[r, "d^1"] & \mathcal{F}^2 \arrow[r, "d^2"] \arrow[d, "\pi^2"'] & \mathcal{F}^3 \arrow[ur, "\pi^3"] \arrow[r] & \cdots \\
\mathcal{G}^0 \arrow[ur, "\varepsilon^0"] & & \mathcal{G}^2 \arrow[ur, "\varepsilon^2"] & &
\end{tikzcd} \tag{8.8}$$

с инективни морфизми на снопове $\varepsilon^i : \mathcal{G}^i \to \mathcal{F}^{i+1}$ и сюрективни морфизми на снопове $\pi^i : \mathcal{F}^i \to \mathcal{G}^i$. За всяко $i \geq 0$ определяме $\mathcal{F}^{i+1} := \mathrm{ds}\mathcal{G}^i$, $\mathcal{G}^{i+1} := \mathcal{F}^{i+1}/\mathcal{G}^i$ и $d^i := \varepsilon^i \circ \pi^i$. От точността на редиците $\mathcal{G}^i \xrightarrow{\varepsilon^i} \mathcal{F}^{i+1} \xrightarrow{\pi^{i+1}} \mathcal{G}^{i+1}$ в $\mathcal{F}^{i+1}$ следва точността на хоризонталната редица от (8.8), която се нарича резолвента на Godement на $\mathcal{F}$. По-точно,

$$\mathrm{im} d^{i-1} = \mathrm{im}\varepsilon^{i-1} = \ker \pi^i = \ker d^i.$$

Определение 8.9. *За произволен сноп $\mathcal{F}$ върху топологично пространство X, i-тата кохомологична група на комплекса от абелеви групи*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{d_X^0} \mathcal{F}^1(X) \xrightarrow{d_X^1} \mathcal{F}^2(X) \xrightarrow{d_X^2} \cdots ,$$

съставен от глобалните сечения на резолвентата на Godement на $\mathcal{F}$ се нарича i-та кохомологична група на снопа $\mathcal{F}$ и се бележи с

$$H^i(X, \mathcal{F}) := \frac{\ker[d_X^i : \mathcal{F}^i(X) \longrightarrow \mathcal{F}^{i+1}(X)]}{\mathrm{im}[d_X^{i-1} : \mathcal{F}^{i-1}(X) \longrightarrow \mathcal{F}^i(X)]}.$$

Съгласно Лема 8.6, редицата

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{d_X^0} \mathcal{F}^1(X)$$

е точна в $\mathcal{F}^0(X)$, така че

$$H^0(X, \mathcal{F}) := \ker[\ \mathcal{F}^0(X) \xrightarrow{d_X^0} \mathcal{F}^1(X)\ ] = \mathcal{F}(X).$$

Ако $\mathcal{F}$ е сноп от линейни пространства, то и кохомологичните групи $H^i(X, \mathcal{F})$ са линейни пространства.

Твърдение 8.10. *Всяка къса точна редица*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0$$

индуцира дълга точна редица от кохомологични групи (8.7).

Доказателство: Произволен морфизъм на снопове $f : \mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ индуцира хомоморфизъм на съответните стъбла, а оттам и морфизъм $f : \mathrm{ds}\mathcal{G}_1 \to \mathrm{ds}\mathcal{G}_2$ на сноповете на прекъснатите сечения. В резултат, резолвентите на Godement на $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}''$ образуват комутативна диаграма с точни редове и стълбове

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\mathcal{F}^{',0} \arrow[r] \arrow[d, "f^0"] & \mathcal{F}^{',1} \arrow[r] \arrow[d, "f^1"] & \mathcal{F}^{',2} \arrow[r] \arrow[d, "f^2"] & \cdots \\
\mathcal{F}^{0} \arrow[r] \arrow[d, "g^0"] & \mathcal{F}^{1} \arrow[r] \arrow[d, "g^1"] & \mathcal{F}^{2} \arrow[r] \arrow[d, "g^2"] & \cdots \\
\mathcal{F}^{'',0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}^{'',1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}^{'',2} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Сноповете $\mathcal{F}^{',i}$ са тънки, така че стълбовете в съответната диаграма

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}^{',0}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f^0_X"] & \mathcal{F}^{',1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f^1_X"] & \mathcal{F}^{',2}(X) \arrow[r] \arrow[d, "f^2_X"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}^{0}(X) \arrow[r] \arrow[d, "g^0_X"] & \mathcal{F}^{1}(X) \arrow[r] \arrow[d, "g^1_X"] & \mathcal{F}^{2}(X) \arrow[r] \arrow[d, "g^2_X"] & \cdots \\
0 \arrow[r] & \mathcal{F}^{'',0}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}^{'',1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}^{'',2}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

от глобални сечения остават точни. По този начин получаваме къса точна редица

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}^{',\bullet}(X) \xrightarrow{f^\bullet_X} \mathcal{F}^{\bullet}(X) \xrightarrow{g^\bullet_X} \mathcal{F}^{'',\bullet}(X) \longrightarrow 0$$

от ко-верижни комплекси. Съгласно Твърдение 8.16 от приложението към настоящата тема, всяка такава къса точна редица индуцира дълга точна редица от кохомологии (8.7), Q.E.D.

За да докажем анулирането на кохомологичните групи $H^i(X,\mathcal{F}) = 0$ на тънък сноп $\mathcal{F}$ с $i \geq 1$ е необходима следната

Лема 8.11. *Ако тънки снопове $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}$ участват в къса точна редица от снопове*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}' \xrightarrow{f} \mathcal{F} \xrightarrow{g} \mathcal{F}'' \longrightarrow 0 \ ,$$

то снопът $\mathcal{F}''$ е също тънък.

Доказателство: За произволно отворено подмножество $U \subseteq X$ имаме комутативна диаграма от хомоморфизми

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(X) & \xrightarrow{g_X} & \mathcal{F}''(X) \\ \downarrow \rho_U^X & & \downarrow r_U^X \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{g_U} & \mathcal{F}''(U) \end{array}$$

със сюрективни g_X, g_U съгласно Лема 8.8 и сюрективно ρ_U^X съгласно тънкостта на $\mathcal{F}$. Това дава сюрективността на r_U^X и доказва, че снопът $\mathcal{F}''$ също е тънък. По-точно, за $\forall s''_U \in \mathcal{F}''(U)$ съществува $s_U \in \mathcal{F}(U)$ с $g_U(s_U) = s''_U$. Въз основа на сюрективността на ρ_U^X можем да намерим $s \in \mathcal{F}(X)$ с $\rho_U^X(s) = s_U$. В резултат, съществува $g_X(s) \in \mathcal{F}''(X)$ с $r_U^X g_X(s) = s''_U$, съгласно комутативността на диаграмата и $g_U \rho_U^X(s) = g_U(s_U) = s''_U$, Q.E.D.

Твърдение 8.12. *Ако $\mathcal{F}$ е тънък сноп върху топологично пространство X, то*

$$H^i(X, \mathcal{F}) = 0 \quad \text{за} \quad \forall i > 0.$$

Доказателство: Съгласно предишната Лема 8.11, фактор-снопът на тънки снопове е тънък сноп. Затова сноповете $\mathcal{G}^i$, $i \geq 0$ от комутативната диаграама (8.8) са тънки и съответната диаграма от глобални сечения е изцяло точна. В частност,

$$0 \longrightarrow \mathcal{F}(X) \longrightarrow \mathcal{F}^0(X) \longrightarrow \mathcal{F}^1(X) \longrightarrow \cdots$$

е точна редица от абелеви групи и $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ за $\forall i \geq 1$, Q.E.D.

Като пример да се върнем на експоненциалната точна редица от снопове (8.3). Съгласно Твърдение 8.10, тя индуцира дългата точна редица от кохомологии

$$0 \longrightarrow H^0(M, \mathbb{Z}_M) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{O}_M) \longrightarrow H^0(M, \mathcal{O}^*_M) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(M, \mathbb{Z}_M) \longrightarrow H^1(M, \mathcal{O}_M) \longrightarrow \cdots$$

върху комплексното многообразие M. Сюрективността на изображението

$$\mathcal{O}_M(M) \longrightarrow \mathcal{O}^*_M(M)$$

зависи от кохомологичната група $H^1(M, \mathbb{Z}_M)$. Например, $H^1(\mathbb{C}^*, \mathbb{Z}_{\mathbb{C}^*}) \simeq \mathbb{Z}$ и хомоморфизмът $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^*}(\mathbb{C}^*) \to \mathcal{O}^*_{\mathbb{C}^*}(\mathbb{C}^*)$ не е сюрективен. Ако M е едносвързано, т.е. ако всяка непрекъсната затворена крива в M се свива в точка чрез непрекъсната деформация, то сингулярните кохомологии $H^1(M, \mathbb{Z}) = 0$ се анулират, а оттам и първата кохомологична група $H^1(M, \mathbb{Z}_M) \simeq H^1(M, \mathbb{Z}) = 0$ на снопа $\mathbb{Z}_M$ е нулева. В резултат, изображението $\mathcal{O}_M(M) \to \mathcal{O}^*_M(M)$ е сюрективно за всяко едносвързано комплексно многообразие M.

5. Кохомологии на Čech

Нека $\mathcal{F}$ е сноп от абелеви групи върху топологично пространство X, а $\mathbf{U}$ е отворено покритие на X. Групата на p-коверигите на $\mathbf{U}$ е директното произведение

$$C^p(\mathbf{U}, \mathcal{F}) := \prod_{U_0, \dots, U_p \in \mathbf{U}} \mathcal{F}(U_0 \cap U_1 \cap \dots \cap U_p).$$

Коверигите $\mathbf{g} \in C^p(\mathbf{U}, \mathcal{F})$ представляват фамилии от локални сечения $g_{U_0,\dots,U_p} \in \mathcal{F}(U_0 \cap \dots \cap U_p)$. Хомоморфизмите на ограничение на снопа $\mathcal{F}$ позволяват определянето на диференциала

$$\delta^p : C^p(\mathbf{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow C^{p+1}(\mathbf{U}, \mathcal{F}),$$

$$\delta^p(\mathbf{g}) = \mathbf{h} \quad \text{с} \quad h_{U_0,\dots,U_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k g_{U_0,\dots,U_{k-1},U_{k+1},\dots,U_{p+1}}|_{U_0 \cap \dots \cap U_{p+1}}.$$

Може да се провери, че $\delta^{p+1} \circ \delta^p \equiv 0$, така че

$$0 \longrightarrow C^0(\mathbf{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathbf{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\delta^1} C^2(\mathbf{U}, \mathcal{F}) \longrightarrow \cdots \qquad (8.9)$$

е ко-верижен комплекс от абелеви групи. Определяме i-тата кохомологична група на Čech $H^i(\mathbf{U}, \mathcal{F})$ като i-тата кохомологична група на ко-верижния комплекс (8.9).

От определението за сноп $\mathcal{F}$ следва, че $H^0(\mathbf{U}, \mathcal{F}) = \ker \delta^0 = \mathcal{F}(X)$.

Нека $L \to M$ е холоморфно линейно разслоение върху комплексно многообразие M. Тогава функциите на прехода $g_{\alpha,\beta} \in \mathcal{O}^*_M(U_\alpha \cap U_\beta)$ изпълняват равенствата $g_{\alpha,\beta}.g_{\beta,\gamma} = g_{\alpha,\gamma}$ и задават кохомологичен клас от $H^1(\mathbf{U}, \mathcal{O}^*_M)$. Ако този клас е тривиален, то $g_{\alpha,\beta} = \frac{s_\beta}{s_\alpha}$ за $s_\alpha \in \mathcal{O}^*_M(U_\alpha)$ и s_α^{-1} са никъде неанулиращи се сечения на $L \to M$. Затова елементите на кохомологичната група $H^1(\mathbf{U}, \mathcal{O}^*_M)$ могат да се разглеждат като препятствия за съществуване на такова сечение.

Отвореното покритие $\mathbf{U}$ на X се нарича ациклично, ако $H^i(U_1 \cap \dots \cap U_p, \mathcal{F}) = 0$ за $\forall i > 0$ и $\forall U_1, \dots, U_p \in \mathbf{U}$. Така наречената Лема на Cartan установява наличието на естествен изоморфизъм

$$H^i(\mathbf{U}, \mathcal{F}) \simeq H^i(X, \mathcal{F})$$

на кохомологиите на Čech на сноп $\mathcal{F}$ относно ациклично отворено покритие $\mathbf{U}$ на X с кохомологиите на снопа $\mathcal{F}$. Тази лема се доказва с помощта на спектрални редици.

Като пример да разгледаме стандартното афинно покритие $\mathbf{U} = \{U_0, U_1\}$ на $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ с $U_i = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1 \quad | \quad z_i \neq 0\}$. Може да се докаже, че $H^0(\mathbf{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \mathbb{C}$ и $H^i(\mathbf{U}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$ за $\forall i \geq 1$. Покритието $\mathbf{U}$ е ациклично, така че кохомологиите $H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$ на структурния сноп се анулират за $\forall i \geq 1$.

6. Приложение - Змиеобразна лема

Да напомним определението за модул над комутативен пръстен с единица.

Непразното множество M е ляв (десен) модул над комутативен пръстен с единица R, ако в M са определени операции събиране

$$M \times M \longrightarrow M,$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

и умножение с $r \in R$,

$$R \times M \longrightarrow M,$$

$$(r, x) \mapsto rx,$$

изпълняващи следните аксиоми:

1. асоциативност на събирането

$$(x+y)+z = x+(y+z) \quad \text{за } \forall x,y,z \in M;$$

2. комутативност на събирането

$$x+y = y+x \quad \text{за } \forall x,y \in M;$$

3. съществуване на нулев елемент $0_M \in M$, така че

$$x + 0_M = x \quad \text{за } \forall x \in M;$$

4. за всеки елемент $x \in M$ съществува противоположен $-x \in M$, така че

$$x + (-x) = 0_M;$$

5. дистрибутивност относно "векторен"множител

$$r(x+y) = rx + ry \quad \text{за} \quad \forall r \in R, \quad \forall x,y \in M;$$

6. дистрибутивност относно "скаларен"множител

$$(r+s)x = rx + sx \quad \text{за} \quad \forall r,s \in R, \quad \forall x \in M;$$

7. $(rs)x = r(sx)$ за $\forall r,s \in R$, $\forall x \in M$;
8. $1_R x = x$ за $1_R \in R$ и $\forall x \in M$.
Понятията "$\mathbb{Z}$-модул" и "абелева група" са еквивалентни. Модулите над поле $\mathbb{K}$ са точно линейните пространства над $\mathbb{K}$.
Подмножеството N на R-модул M е подмодул, ако за произволни $x_i \in N$ и $r_i \in R$ е в сила $r_1x_1 + \ldots + r_nx_n$. Ако N е R-подмодул на M, то фактор-групата $(M/N,+) := (M,+)/(N,+)$ на абелевата адитивна група $(M,+)$ по нейната подгрупа $(N,+)$ е R-модул относно умножението $r(x+N) = rx + N$ с $r \in R$, който се нарича фактор-модул на M относно N.
Изображението $f : M \to N$ на R-модули M и N е хомоморфизъм на R-модули, ако $f(r_1x_1 + \ldots + r_nx_n) = r_1f(x_1) + \ldots + r_nf(x_n)$ за произволни $r_j, \in R$ и $x_j \in M$. Ядрото $\ker f := \{x \in M \mid f(x) = 0_N\}$ на хомоморфизъм на R-модули е подмодул на M, а образът $\mathrm{im} f := \{f(x) \mid x \in M\}$ е подмодул на N.

Определение 8.13. *Ако $f : M \to N$ е хомоморфизъм на R-модули, то фактор-модулът $N/\mathrm{im} f$ се нарича ко-ядро на f и се бележи с $\mathrm{coker} f$.*

Определение 8.14. *Фамилията $\{(C^n, d^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ от R-модули C^n и R-модулни хомоморфизми $d^n : C^n \to C^{n+1}$ образува ко-верижен комплекс или само комплекс, ако композицията $d^{n+1} \circ d^n \equiv 0$ за $\forall n \in \mathbb{Z}$,*

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-1}} C^n \xrightarrow{d^n} C^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots .$$

Ако $\{(C^n, d^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ е ко-верижен комплекс от R-модули, то елементите на R-подмодулите

$$Z^n(C^\bullet) := Ker(d^n) = \{c \in C^n \mid d^n(c) = 0_{C^{n+1}}\} \leq C^n$$

се наричат коцикли, а елементите на R-подмодулите

$$B^n(C^\bullet) := Im(d^{n-1}) = \{d^{n-1}(c) \mid c \in C^{n-1}\} \leq C^n$$

се наричат кограници.
Възоснова на $d^n \circ d^{n-1} \equiv 0$ имаме $B^n(C^\bullet) \subseteq Z^n(C^\bullet)$ и определяме кохомологиите на $\{(C^n, d^n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ като фактор-модулите

$$H^n(C^\bullet) := Z^n(C^\bullet)/B^n(C^\bullet) \quad \text{за } \forall n \in \mathbb{Z}.$$

С други думи, кохомологиите $H^n(C^\bullet)$ на ко-верижния комплекс $C^\bullet$ са ко-ядрата на хомоморфизмите $d_n : C^n \to Z^{n+1}(C^\bullet)$.

Лема 8.15. (Змиеобразна Лема) *Нека*

$$\begin{tikzcd} & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "g"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & C_1 & \end{tikzcd}$$

е комутативна диаграма от R-модули с точни редове. Тогава съществува точна редица

$$\ker(f) \xrightarrow{\alpha_2} \ker(g) \xrightarrow{\beta_2} \ker(h) \xrightarrow{\partial}$$

$$\operatorname{coker}(f) \xrightarrow{\overline{\alpha_1}} \operatorname{coker}(g) \xrightarrow{\overline{\beta_1}} \operatorname{coker}(h) \ .$$

При това, ако $A_2 \xrightarrow{\alpha_2} B_2$ *е мономорфизъм, то и ограничението* $\ker(f) \xrightarrow{\alpha_2} \ker(g)$ *е мономорфизъм. Ако* $B_1 \xrightarrow{\beta_1} C_1$ *е епиморфизъм, то и индуцираното изображение* $\operatorname{coker}(g) \xrightarrow{\overline{\beta_1}} \operatorname{coker}(h)$ *е епиморфизъм.*

Доказателство: Ядрото $\ker(f)$ е подмодул на A_2, така че хомоморфизмът $\alpha_2 : A_2 \to B_2$ се ограничава до хомоморфизъм $\alpha_2 : \ker(f) \to B_2$. Съгласно комутативността на диаграмата

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f"'] & B_2 \arrow[d, "g"'] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & B_1 \end{tikzcd} , \tag{8.10}$$

за $\forall a \in \ker(f)$ следва, че $g\alpha_2(a) = \alpha_1 f(a) = \alpha_1(0) = 0$ или $\alpha_2 \ker(f) \subseteq \ker(g)$. Аналогично, $\beta_2 : B_2 \to C_2$ задава коректно определен хомоморфизъм на R-модули $\beta_2 : \ker(g) \to \ker(h)$. Точността на $A_2 \xrightarrow{\alpha_2} B_2 \xrightarrow{\beta_2} C_2 \longrightarrow 0$ дава, в частност, $\beta_2 \circ \alpha_2 = \mathbb{O}$ като изображение $A_2 \to C_2$. Оттук следва, че $\beta_2 \circ \alpha_2 = 0$ като изображение $\ker(f) \to \ker(h)$ или

$$\ker(f) \xrightarrow{\alpha_2} \ker(g) \xrightarrow{\beta_2} \ker(h)$$

е комплекс. Квадратите

$$\begin{tikzcd} \ker(f) \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{A_2}"'] & \ker(g) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{B_2}"'] \\ A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] & B_2 \end{tikzcd} \quad \text{и} \quad \begin{tikzcd} \ker(g) \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{B_2}"'] & \ker(h) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{C_2}"'] \\ B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & C_2 \end{tikzcd}$$

са комутативни, защото вертикалните изображения са тъждествени. По определението за коядро, съществува естествен епиморфизъм

$$A_1 \longrightarrow A_1/\operatorname{im}(f) =: \operatorname{coker}(f).$$

Хомоморфизмът на R-модули $\alpha_1 : A_1 \to B_1$ индуцира

$$\overline{\alpha_1} : \operatorname{coker}(f) = A_1/\operatorname{im}(f) \longrightarrow B_1/\operatorname{im}(g) = \operatorname{coker}(g)$$

по правилото

$$\overline{\alpha_1}(a_1 + \operatorname{im}(f)) := \alpha_1(a_1) + \operatorname{im}(g).$$

Това определение е коректно, защото за $\forall a \in \mathrm{im}(f)$ е в сила $\alpha_1(a) = \alpha_1 f(a_2) = g\alpha_2(a_2) \in \mathrm{im}(g)$, съгласно комутативността на диаграмата (8.10). Аналогично, определяме

$$\overline{\beta_1} : \mathrm{coker}(g) = B_1/\mathrm{im}(g) \longrightarrow C_1/\mathrm{im}(h) = \mathrm{im}(h),$$

$$\overline{\beta_1}(b_1 + \mathrm{im}(g)) := \beta_1(b_1) + \mathrm{im}(h)$$

и проверяваме, че $\overline{\beta_1}$ е коректно зададено. Редицата

$$\mathrm{coker}(f) \xrightarrow{\overline{\alpha_1}} \mathrm{coker}(g) \xrightarrow{\overline{\beta_1}} \mathrm{coker}(h)$$

е комплекс, защото

$$\overline{\beta_1}\,\overline{\alpha_1}(a_1 + \mathrm{im}(f)) = \overline{\beta_1}(\alpha_1(a_1) + \mathrm{im}(g)) = \beta_1\alpha_1(a_1) + \mathrm{im}(h) = \mathrm{im}(h)$$

за $\forall a_1 \in A_1$, съгласно $\beta_1\alpha_1 = 0$. Диаграмата

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\pi_f"'] & B_1 \arrow[d, "\pi_g"'] \\
\mathrm{coker}(f) \arrow[r, "\overline{\alpha_1}"] & \mathrm{coker}(g)
\end{tikzcd}$$

е комутативна, съгласно

$$\overline{\alpha_1}\pi_f(a_1) = \overline{\alpha_1}(a_1 + \mathrm{im}(f)) = \alpha_1(a_1) + \mathrm{im}(g)) = \pi_g\alpha_1(a_1).$$

Аналогично се проверява комутативността на

$$\begin{tikzcd}
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\pi_g"'] & C_1 \arrow[d, "\pi_h"'] \\
\mathrm{coker}(g) \arrow[r, "\overline{\beta_1}"] & \mathrm{coker}(h)
\end{tikzcd} .$$

По този начин получаваме комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
 & \ker(f) \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{A_2}"'] & \ker(g) \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "\mathrm{Id}_{B_2}"'] & \ker(h) \arrow[d, "\mathrm{Id}_{C_2}"'] & \\
 & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f"'] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "g"'] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "h"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\pi_f"'] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "\pi_g"'] & C_1 \arrow[d, "\pi_h"'] & \\
 & \mathrm{coker}(f) \arrow[r, "\overline{\alpha_1}"] & \mathrm{coker}(g) \arrow[r, "\overline{\beta_1}"] & \mathrm{coker}(h) &
\end{tikzcd} ,$$

в която първият и четвъртият ред са комплекси, а вторият и третият ред са точни редици.

Трябва да определим свързващ хомоморфизъм $\partial : \ker(h) \to \mathrm{coker}(f)$. За целта преминаваме през R-модулите C_2, B_2, B_1, A_1, откъдето идва наименованието Змиеобразна Лема. По-точно, $\forall c \in \ker(h)$ може да се разглежда като $c \in C_2$ и съгласно сюрективността на β_2 може да се представи във вида $c = \beta_2(b)$ за някое $b \in B_2$. Тогава $\beta_1 g(b) = h\beta_2(b) = h(c) = 0$ показва, че $g(b) \in \ker(\beta_1)$.

Точността на редицата $A_1 \xrightarrow{\alpha_1} B_1 \xrightarrow{\beta_1} C_1$ в B_1 означава, че $\mathrm{im}(\alpha_1) = \ker(\beta_1)$. Следователно съществува $a \in A_1$ с $\alpha_1(a) = g(b)$. Полагаме

$$\partial(c) := \pi_f(a) = a + \mathrm{im}(f).$$

Да отбележим, че $b \in B_2$ е определено с точност до $b_0 \in \ker(\beta_2) = \mathrm{im}(\alpha_2)$, така че $b_0 = \alpha_2(a_0)$ за някое $a_0 \in A_2$. Комутативността на диаграмата

$$\begin{tikzcd} A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f"'] & B_2 \arrow[d, "g"'] \\ A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] & B_1 \end{tikzcd}$$

дава $g(b_0) = g\alpha_2(a_0) = \alpha_1 f(a_0)$, така че $\partial(c)$ е определено с точност до $\pi_f \circ f(a_0) = \mathrm{im}(f)$. По-нататък, при фиксирани $c \in \ker(h)$ и $b \in B_2$ с $c = \beta_2(b)$, елементът $a \in A_1$ с $\alpha_1(a) = g(b)$ е определен с точност до $\ker(\alpha_1) = 0$. Това доказва коректността на определението $\partial(c) := \pi_f(a) = a + \mathrm{im}(f)$.
Дотук получихме редица

$$\ker(f) \xrightarrow{\alpha_2} \ker(g) \xrightarrow{\beta_2} \ker(h) \xrightarrow{\partial} \tag{8.11}$$

$$\mathrm{coker}(f) \xrightarrow{\overline{\alpha_1}} \mathrm{coker}(g) \xrightarrow{\overline{\beta_1}} \mathrm{coker}(h)\ ,$$

която е комплекс, стига $\partial\beta_2|_{\ker(g)} = 0$ и $\overline{\alpha_1} \circ \partial = 0$. Наистина, ако $b \in \ker(g)$, то $\partial\beta_2(b) = a + \mathrm{im}(f)$, където $\alpha_1(a) = g(b) = 0$. Доколкото α_1 е мономорфизъм, оттук следва $a = 0$ и $\partial \circ \beta_2|_{\ker(g)} = 0$. За $\overline{\alpha_1} \circ \partial = 0$ да отбележим, че ако $c \in C_2$ е от вида $c = \beta_2(b)$ за някое $b \in B_2$, а $g(b) = \alpha_1(a)$ за $a \in A_1$, то $\overline{\alpha_1}\partial(c) = \overline{\alpha_1}(a + \mathrm{im}(f)) = \overline{\alpha_1}\pi_f(a) = \pi_g\alpha_1(a) = \pi_g g(b) = 0$.
Остава да докажем точността на комплекса (8.11) във всички вътрешни членове. Точността в $\ker(g)$ изисква проверката на $\ker\left(\beta_2|_{\ker(g)}\right) \subseteq \mathrm{im}\left(\alpha_2|_{\ker(f)}\right)$. Наистина, ако $b \in B_2$ и $g(b) = 0$, $\beta_2(b) = 0$, то съществува $a \in A_2$ с $\alpha_2(a) = b$. Твърдим, че $a \in \ker(f)$, защото $\alpha_1 f(a) = g\alpha_2(a) = g(b) = 0$ и α_1 е инективно.
За точността в $\ker(h)$ е нужно $\ker(\partial) \subseteq I\mathrm{im}\left(\beta_2|_{\ker(g)}\right)$. По определението на ∂, за $\forall c \in \ker(h)$ съществува $b \in B_2$, така че $c = \beta_2(b)$. По-нататък, $g(b) = \alpha_1(a)$ за някое $a \in A_1$ и $\partial(c) := a + \mathrm{im}(f)$. Ако $a = f(a_0)$ за $a_0 \in A_2$, то $g(b) = \alpha_1 f(a_0) = g\alpha_2(a_0)$ или $g[b - \alpha_2(a_0)] = 0$. С други думи, за всяко $c \in \ker(\partial)$ имаме $c = \beta_2(b) = \beta_2[b - \alpha_2(a_0)]$ с $b - \alpha_2(a_0) \in \ker(g)$ съгласно $\beta_2\alpha_2 = 0$.
Комплексът (8.11) е точен в $\mathrm{coker}(f)$ стига $\ker(\overline{\alpha_1}) \subseteq \mathrm{im}(\partial)$. Ако $a + \mathrm{im}(f) \in \ker(\overline{\alpha_1})$, то $\alpha_1(a + \mathrm{im}(f)) = \alpha_1(a) + \mathrm{im}(g) = Im(g)$, откъдето $\alpha_1(a) \in \mathrm{im}(g)$. Следователно съществува $b \in B_2$, така че $\alpha_1(a) = g(b)$. В резултат, $\partial\beta_2(b) = \pi_f(a) = a + \mathrm{im}(f) \in \mathrm{im}(\partial)$.
Относно точността в $\mathrm{coker}(g)$ е необходимо установяването на $\ker\left(\overline{\beta_1}\right) \subseteq \mathrm{im}(\overline{\alpha_1})$. По-точно, ако $\beta_1(b) \in \mathrm{im}(h)$ за $b \in B_1$ то $\beta_1(b) = h(c)$ за $c \in C_2$. Благодарение на точността на редицата $0 \longrightarrow A_1 \xrightarrow{\alpha_1} B_1 \xrightarrow{\beta_1} C_1$ имаме $\mathrm{im}(\alpha_1) = \ker(\beta_1)$. Понеже $\beta_2 : B_2 \to C_2$ е епиморфизъм, съществува $b_2 \in B_2$ с $c = \beta_2(b_2)$. Съгласно комутативността на диаграмата

$$\begin{tikzcd} B_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "g"'] & C_2 \arrow[d, "h"'] \\ B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & C_1 \end{tikzcd}$$

е изпълнено $\beta_1(b) = h(c) = h\beta_2(b_2) = \beta_1 g(b_2)$, т.е. $\beta_1[b - g(b_2)] = 0$. Сега от $b - g(b_2) \in \ker(\beta_1) = \mathrm{im}(\alpha_1)$ следва съществуването на $a \in A_1$, така че $b - g(b_2) =$

$\alpha_1(a)$. С други думи, $b + \mathrm{im}(g) = g(b_2) + \alpha_1(a) + \mathrm{im}(g) = \alpha_1(a) + \mathrm{im}(g) = \overline{\alpha_1}(a + \mathrm{im}(f)) \in \mathrm{im}(\overline{\alpha_1})$.
Ако $\alpha_2 : A_2 \to B_2$ е мономорфизъм, то и ограничението $\alpha_2 : \ker(f) \to \ker(g)$ е мономорфизъм.
Ако $\beta_1 : B_1 \to C_1$ е епиморфизъм, то за всяко $c \in C_1$ елементите $c + \mathrm{im}(h)$ имат вида $\beta_1(b) + \mathrm{im}(h) = \overline{\beta_1}(b + \mathrm{im}(g))$ за някое $b \in B_1$, Q.E.D.

Твърдение 8.16. *Всяка къса точна редица*

$$0 \longrightarrow M^\bullet \xrightarrow{\mu^\bullet} N^\bullet \xrightarrow{\nu^\bullet} P^\bullet \longrightarrow 0$$

от ко-верижни комплекси отговаря на дълга точна редица

$$\dots H^k(M^\bullet) \xrightarrow{H(\mu^k)} H^k(N^\bullet) \xrightarrow{H(\nu^k)} H^k(P^\bullet) \xrightarrow{\partial^k} H^{k+1}(M^\bullet) \dots$$

от кохомологии.

Доказателство: По предположение, за всяко цяло k имаме комутативни диаграми с точни редове

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M^{k-1} \arrow[r, "\mu^{k-1}"] \arrow[d, "d_M^{k-1}"'] & N^{k-1} \arrow[r, "\nu^{k-1}"] \arrow[d, "d_N^{k-1}"'] & P^{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "d_P^{k-1}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M^k \arrow[r, "\mu^k"] & N^k \arrow[r, "\nu^k"] & P^k \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} .$$

Прилагайки Змиеобразната Лема 8.15 в пълния и вариант, получаваме точната редица

$$0 \longrightarrow Z^{k-1}(M^\bullet) \xrightarrow{\mu^{k-1}} Z^{k-1}(N^\bullet) \xrightarrow{\nu^{k-1}} Z^{k-1}(P^\bullet) \xrightarrow{\partial}$$

$$M^k/B^k(M^\bullet) \xrightarrow{\overline{\mu^k}} N^k/B^k(N^\bullet) \xrightarrow{\overline{\nu^k}} P^k/B^k(P^\bullet) \longrightarrow 0 .$$

Индуцираните диференциали

$$\overline{d_M^k} : M^k/B^k(M^\bullet) \longrightarrow B^{k+1}(M^\bullet) \subseteq Z^{k+1}(M^\bullet),$$
$$\overline{d_N^k} : N^k/B^k(N^\bullet) \longrightarrow B^{k+1}(N^\bullet) \subseteq Z^{k+1}(N^\bullet),$$
$$\overline{d_P^k} : P^k/B^k(P^\bullet) \longrightarrow B^{k+1}(P^\bullet) \subseteq Z^{k+1}(P^\bullet)$$

са коректно определени съгласно $B^k(*) \subseteq \ker(d_*^k)$. Сега от точната редица

$$M^k/B^k(M^\bullet) \xrightarrow{\overline{\mu^k}} N^k/B^k(N^\bullet) \xrightarrow{\overline{\nu^k}} P^k/B^k(P^\bullet) \longrightarrow 0$$

и от точната редица

$$0 \longrightarrow Z^{k+1}(M^\bullet) \xrightarrow{\mu^{k+1}} Z^{k+1}(N^\bullet) \xrightarrow{\nu^{k+1}} Z^{k+1}(P^\bullet) \xrightarrow{\partial}$$

сглобяваме диаграмата с точни редове

$$\begin{tikzcd} & M^k/B^k(M^\bullet) \arrow[r, "\overline{\mu^k}"] \arrow[d, "\overline{d_M^k}"'] & N^k/B^k(N^\bullet) \arrow[r, "\overline{\nu^k}"] \arrow[d, "\overline{d_N^k}"'] & P^k/B^k(P^\bullet) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{d_P^k}"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Z^{k+1}(M^\bullet) \arrow[r, "\mu^{k+1}"] & Z^{k+1}(N^\bullet) \arrow[r, "\nu^{k+1}"] & Z^{k+1}(P^\bullet) & \end{tikzcd} .$$

Нейните два квадрата са комутативни, защото $\mu^\bullet$ и $\nu^\bullet$ са морфизми на ко-верижни комплекси и комутират с диференциалите, т.е. $d_N^k \mu^k = \mu^{k+1} d_M^k$ и $d_P^k \nu^k = \nu^{k+1} d_N^k$. Оттук

$$\overline{d_N^k}\,\overline{\mu^k}\left(m^k + B^k(M^\bullet)\right) = \overline{d_N^k}\left(\mu^k(m^k) + B^k(N^\bullet)\right) = d_N^k \mu^k(m^k) =$$

$$\mu^{k+1} d_M^k(m^k) = \mu^{k+1} \overline{d_M^k} \left(m^k + B^k(M^\bullet) \right)$$

за $\forall m^k + B^k(M^\bullet)$ дава $\overline{d_N^k}\,\overline{\mu^k} = \mu^{k+1}\overline{d_M^k}$. Проверката на $\overline{d_P^k}\,\overline{\nu^k} = \nu^{k+1}\overline{d_N^k}$ е аналогична. Прилагането на Змиеобразната Лема 8.15 към тази комутативна диаграма с точни редове дава точната редица

$$H^k(M^\bullet) \xrightarrow{H(\mu^k)} H^k(N^\bullet) \xrightarrow{H(\nu^k)} H^k(P^\bullet) \xrightarrow{\partial^k}$$

$$\xrightarrow{\partial^k} H^{k+1}(M^\bullet) \xrightarrow{H(\mu^{k+1})} H^{k+1}(N^\bullet) \xrightarrow{H(\nu^{k+1})} H^{k+1}(P^\bullet) \ .$$

Да припомним, че граничният оператор ∂^k трансформира $p^k + B^k(P^\bullet) \in H^k(P^\bullet)$ в

$$\partial^k \left(p^k + B^k(P^\bullet) \right) = m^{k+1} + B^{k+1}(M^\bullet)$$

за

$$p^k + B^k(P^\bullet) = H(\nu^k) \left(n^k + B^k(N^\bullet) \right)$$

и $\overline{d_N^k} \left(n^k + B^k(N^\bullet) \right) = d_N^k(n^k) = \mu^{k+1}(m^{k+1})$, Q.E.D.