Глава 7

Интегриране върху многообразие. Ермитови многообразия.

1. Интериране на диференциални форми върху ориентируемо гладко многообразие

Да фиксираме локална координатна карта (U_α, f_α) върху гладко многообразие M. Тогава всички останали карти (U_β, f_β) се разбиват на два непресичащи класа. Първият клас се състои от картите (U_β, f_β), за които функцията на прехода $h_{\alpha,\beta} := f_\alpha \circ f_\beta^{-1} : f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ имат Якобиева матрица

$$\frac{\partial h_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta} = \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}$$

с положителна детерминанта

$$\det\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right) > 0.$$

Вторият клас е съставен от онези (U_β, f_β), за които $\det\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right) > 0$. Ако съществува такъв атлас върху M, чиито карти от първия клас покриват M, казваме че M е ориентируемо гладко многообразие. Всеки от класовете определя ориентация върху M.

Нека $\omega \in A^n(M)$ е гладка диференциална n-форма с компактен носител. Покриваме носителя $\mathrm{Supp}(\omega)$ на ω с краен брой координатни карти (U_α, f_α), $\alpha \in A$ и избираме разбиване на единицата (U_α, ρ_α), съгласувано с това разлагане. По-точно, $\rho_\alpha : \mathrm{Supp}(\omega) \to \mathbb{R}^{\geq 0}$ са гладки функции с компактни носители $\mathrm{Supp}(\rho_\alpha) \subset U_\alpha \subset \mathrm{Supp}(\omega)$ и $\sum\limits_{\alpha \in A} \rho_\alpha(p) = 1$ за $\forall p \in \mathrm{Supp}(\omega)$. За съществуването на разбиване на единицата върху компактно многообразие $\mathrm{Supp}(\omega)$ вижте приложението в края на настоящата тема. Относно положително ориентирани локални координати $x_{\alpha,1}, \ldots, x_{\alpha,n}$ имаме

$$(\rho_\alpha \omega)|_{U_\alpha} = \varphi_\alpha \quad dx_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge dx_{\alpha,n}$$

за гладки функции φ_α с компактен носител $\mathrm{Supp}(\varphi_\alpha) \subset D_\alpha = f_\alpha(U_\alpha)' \subset \mathbb{R}^n$. Означаваме с $d\mu_\alpha = dx_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge dx_{\alpha,n}$ лебеговата мярка върху $\mathbb{R}^n$ и определяме интеграла на ω върху ориентируемо гладко многообразие M като

$$\int_M \omega = \sum_\alpha \int_{D_\alpha} \varphi_\alpha d\mu_\alpha. \tag{7.1}$$

Даденото определение не зависи от избора на положително ориентирани локални координати, защото

$$\varphi_\alpha d\mu_\alpha = \varphi_\alpha dx_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge dx_{\alpha,n} = \varphi_\alpha \det\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right) dx_{\beta,1} \wedge \ldots \wedge dx_{\beta,n} = \varphi_\beta d\mu_\beta$$

за

$$\varphi_\beta = \varphi_\alpha \det\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right).$$

Ще скицираме накратко доказателството на Теоремата на Stokes върху гладки многообразия.

Теорема 11. (Stokes) *Ако M е ориентируемо n-мерно гладко многообразие, а $\omega \in A^{n-1}(M)$ е диференциална $(n-1)$-форма върху M с компактен носител* $\mathrm{Supp}(\omega)$*, то*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega \tag{7.2}$$

за границата ∂M на M.

Идея за доказателството: Първо ще обясним верността на Теоремата на Stokes върху n-мерния единичен куб $[0,1]^n = [0,1] \times \ldots \times [0,1]$. Поради $\mathbb{R}$-линейността на интегрирането е достатъчно да докажем 7.2 за диференциални форми от вида $\omega = f(x)dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Съгласно

$$d\omega = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

и Основната теорема на интегралното смятане имаме

$$\int_{[0,1]^n} d\omega = \int_{[0,1]^{n_1}} \left(\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n =$$
$$\int_{[0,1]^{n-1}} (f|_{x_1=1} - f|_{x_1=0})\, dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n.$$

Това е разликата на интегралите на $\omega = f(x)dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_n$ върху "дясното" лице $1 \times [0,1]^{n-1}$ и "лявото" лице $0 \times [0,1]^{n-1}$ на $[0,1]^n$. За всяко $2 \leq i \leq n$ диференциалната форма dx_i се анулира върху лицата

$$E_i := \{a \in [0,1]^n \ \mid \ a_i = 1\} \quad \text{и} \quad F_i := \{a \in [0,1]^n \ \mid \ a_i = 0\}$$

на $[0,1]^n$. Следователно

$$\int_{E_i} \omega = \int_{F_i} \omega = 0 \quad \text{за} \quad \forall 2 \leq i \leq n \quad \text{и}$$

$$\int_{\partial[0,1]^n} \omega = \int_{\sum\limits_{i=1}^n E_i - F_i} \omega = \sum_{i=1}^n \left(\int_{E_i} \omega - \int_{F_i} \omega \right) = \int_{E_1} \omega - \int_{F_1} \omega = \int_{[0,1]^n} d\omega.$$

В общия случай, покриваме компактния носител $\mathrm{Supp}(\omega)$ на ω с краен брой положително ориентирани карти (U_i, f_i), $1 \leq i \leq m$. Разбиваме $\cup_{i=1}^m U_i$ в обединение на краен брой кубове, пресичащи се по своите граници, започвайки с разбиване на $U_1 \cap \ldots \cap U_m$ и продължавайки с разбивания на $U_1 \cap \ldots \cap \widehat{U_i} \cap \ldots \cap U_m$ за $1 \leq i \leq m$, на $U_1 \cap \ldots \cap \widehat{U_i} \cap \ldots \cap \widehat{U_j} \cap \ldots \cap U_m$ за $1 \leq i < j \leq m$ к т.н. Ако $\cup_{i=1}^m U_i = \cup_{j=1}^s \kappa_j$ е обединение на кубовете κ_j, то сумата на границите $\sum\limits_{j=1}^s \partial\kappa_j = \partial M$ е границата на M, защото вътрешните граници на кубовете се унищожават взаимно. Избираме разбиване на единицата $1 = \sum\limits_{j=1}^s \rho_j$ с $\mathrm{Supp}(\rho_j) \subseteq \kappa_j$. Вземайки предвид

$$\int_{\kappa_j} d(\rho_i \omega) = \int_{\partial\kappa_j} \rho_i \omega$$

получаваме

$$\int_{\partial M} \omega = \int_{\sum\limits_{j=1}^{s} \partial\kappa_j} \left(\sum_{i=1}^{s} \rho_i \right) \omega = \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{s} \int_{\partial\kappa_j} \rho_i \omega =$$

$$\sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{s} \int_{\kappa_j} d(\rho_i \omega) = \int_{\cup_{j=1}^{s} \kappa_j} d \left(\sum_{i=1}^{s} \rho_i \right) \omega = \int_M d\omega.$$

В частност, ако M е компактно ориентируемо многообразие и $\psi \in A^{n-1}(M)$, то $\int_M d\psi = 0$. Следователно изображението

$$\int_M : H^n(M, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\omega \mapsto \int_M \omega,$$

зададено чрез интегрирането върху M е $\mathbb{R}$-линеен изоморфизъм.
Всяко комплексно многообразие M е ориентируемо. По-точно, функциите на прехода $h_{\alpha,\beta} = f_\alpha \circ f_\beta^{-1} = x_\alpha(x_\beta) : f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ между координатните карти (U_α, f_α), $\alpha \in A$ са бихоломорфни. В резултат,

$$\det \frac{\partial(x_\alpha, \overline{x_\alpha})}{\partial(x_\beta, \overline{x_\beta})} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} & 0_{n\times n} \\ & \\ 0_{n\times n} & \frac{\partial \overline{x_\alpha}}{\partial \overline{x_\beta}} \end{pmatrix} =$$

$$\det \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \det \left(\frac{\partial \overline{x_\alpha}}{\partial \overline{x_\beta}} \right) = \left| \det \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} \right) \right|^2 > 0$$

и M е ориентируемо. Ако $z_j = x_j + iy_j$ са локални холоморфни координати върху M, обикновено избираме ориентацията върху M, определена от наредбата

$$x_i, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$$

на съответните локални реални координати. Съгласно

$$dz \wedge d\overline{z} = (dx + idy) \wedge (dx - idy) = -2idx \wedge dy$$

имаме

$$(dx_1 \wedge dy_1) \wedge \ldots \wedge (dx_n \wedge dy_n) = \frac{i^n}{2^n} (dz_1 \wedge d\overline{z_1}) \wedge \ldots \wedge (dz_n \wedge d\overline{z_n}).$$

При интегриране на диференциални форми $\omega \in A^{n,n}(M)$ с компактен носител върху комплексно многообразие M вземаме лебеговата мярка

$$d\mu_{(2n)} = \frac{i^n}{2^n} (dz_1 \wedge d\overline{z_1}) \wedge \ldots \wedge (dz_n \wedge d\overline{z_n}).$$

2. Риманови многоборазия

Нека V е n-мерно линейно пространство над полето $\mathbb{R}$ на реалните числа. Полилинейните изображения $g : V \times V \to \mathbb{R}$ на два аргумента се наричат билинейни. Изображение $g : V \times V \to \mathbb{R}$ е симетрично, ако $g(u, v) = g(v, u)$ за $\forall u, v \in V$. Казваме, че $g : V \times V \to \mathbb{R}$ е положително определено, ако $g(v, v) \geq 0$ за $\forall v \in V$ с равенство $g(v, v) = 0$ точно когато $v = \mathcal{O}_V$ е нулевият вектор на V. Положително определените симетрични билинейни изображения $g : V \times V \to \mathbb{R}$ ще наричаме също скаларни произведения.
Нека M е гладко n-мерно многообразие. Риманова метрика върху M е гладка фамилия $g = \{g_p\}_{p \in M}$ от положително определени симетрични билинейни форми

$$g_p : T_p^{\mathbb{R}} M \times T_p^{\mathbb{R}} M \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Римановата метрика g върху M съпоставя на гладки векторни полета $\xi, \eta : U \to T^{\mathbb{R}}M|_U$ върху отворено подмножество $U \subseteq M$ гладка функция

$$g(\xi, \eta) : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

върху U. В локални координати $x_1, \ldots, x_n$ определяме гладките функции

$$g_{i,j}(x) := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right).$$

Симетричната матрица $G(x) = (g_{i,j}(x))_{i,j=1}^n$ приема положително определени стойности във всяка точка на U.
Като пример да разгледаме евклидовата метрика върху $\mathbb{R}^n$ с

$$g_{i,j} = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq n, \\ 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq n. \end{cases}$$

Навсякъде в настоящата тема означаваме с $\delta_{i,j}$ символът на Kronecker, определен с горната формула.

Задача 7.1. *Нека*

$$\mathbb{S}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad x_1^2 + \ldots + x_n^2 + x_{n+1}^2 = 1\}$$

е n-мерната единична сфера в $\mathbb{R}^{n+1}$, $\pi : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to \mathbb{R}^n$ е стереографската проекция през северния полюс $N = (0, \ldots, 0, 1)$, съпоставяща на точка $p \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ пресечната точка на правата през p и N с екваториалната равнина

$$H = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \quad | \quad x_{n+1} = 0\}.$$

Да се докаже, че изображението π е взаимно еднозначно и да се намерят компонентите $g_{i,j}$ на метриката върху $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, индуцирана от евклидовата метрика на $\mathbb{R}^{n+1}$ спрямо стереографските координати $\pi(p)$ на $p \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$.

За да определим формата на обема на ориентирано Риманово многообразие са необходими някои сведения от линейната алгебра.

Задача 7.2. *Нека V е крайномерно линейно пространство над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, V^* е пространството на $\mathbb{K}$-линейните функционали $V \to \mathbb{K}$ върху V, а $(V^*)^*$ е пространството на $\mathbb{K}$-линейните функционали $V^* \to \mathbb{K}$ върху V^*. Да се докаже, че:*
(i) изображението

$$\Phi : V \longrightarrow (V^*)^*,$$

определено по правилото

$$\Phi(v)(\psi) := \psi(v) \quad \text{за} \quad \forall v \in V, \quad \forall \psi \in V^*$$

е $\mathbb{K}$-линеен изоморфизъм;
(ii) ако $e_1, \ldots, e_n$ е базис на V, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ е дуалният базис на $e_1, \ldots, e_n$ с $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$ и $\varepsilon_1^*, \ldots, \varepsilon_n^*$ е дуалният базис на $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ с $\varepsilon_i^*(\varepsilon_j) = \delta_{ij}$ то

$$\Phi(e_i) = \varepsilon_i^* \quad \text{за } \forall 1 \leq i \leq n.$$

Нека V е линейно пространство над $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ с базис $e_1, \ldots, e_n$, а $\varepsilon_1 = e_1^*, \ldots, \varepsilon_n = e_n^*$ е дуалният базис на пространството V^* на $\mathbb{K}$-линейните функционали $V \to \mathbb{K}$ с $\varepsilon_i(e_j) = \delta_{ij}$, определен в Задача 7.2. Съгласно същата задача, за произволно $m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$, поли-линейните анти-симетрични функции

$$(\varepsilon_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{j_m})^* : (V^*)^m = V^* \times \ldots \times V^* \longrightarrow \mathbb{K}, \quad 1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n$$

с

$$(\varepsilon_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{j_m})^*(\varepsilon_{j_1}, \ldots, \varepsilon_{j_m}) = 1 \quad \text{и}$$
$$(\varepsilon_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{j_m})^*(\varepsilon_{s_1}, \ldots, \varepsilon_{s_m}) = 0 \text{ за } \forall s_1 < \ldots < s_m, \{s_1, \ldots, s_m\} \neq \{j_1, \ldots, j_m\}$$

образуват базис на $(\Lambda^m V^*)^*$. Съгласно Задача 7.2, $\mathbb{K}$-линейният изоморфизъм $\Phi^{-1} : (V^*)^* \to V$ трансформира ε_i^* във $\Phi^{-1}(\varepsilon_i^*) = e_i$ за $\forall 1 \leq i \leq n$. За $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \leq n$ определяме $\Lambda^m V$ като линейното пространство над $\mathbb{K}$ с базис $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_m}$ за $\forall 1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n$. Тогава $\Phi^{-1} : (\Lambda^1 V^*)^* \to V$ индуцира $\mathbb{K}$-линейния изоморфизъм

$$\Phi^{-1} : (\Lambda^m V^*)^* \longrightarrow \Lambda^m V,$$

трансформиращ базиса $(\varepsilon_{j_1} \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{j_m})^*$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n$ на $(\Lambda^m V^*)^*$ в базиса $e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_m}$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n$ на $\Lambda^m V$. В частност, за $m = n$, пространството $\Lambda^n V$ с базис $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ е 1-мерно. Всеки елемент на $\Lambda^n V$ има единствено представяне $k\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ за някое $k \in \mathbb{K}$. В случая $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ненулевите вектори

$$\Lambda^n V \setminus \{\mathcal{O}\} = (\Lambda^n V)^+ \coprod (\Lambda^n V)^-$$

се разбиват в непресичащо се обединение на подмножествата

$$(\Lambda^n V)^+ := \{r\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \mid r \in \mathbb{R}, \quad r > 0\} \quad \text{и}$$
$$(\Lambda^n V)^- := \{r\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \mid r \in \mathbb{R}, \quad r < 0\}.$$

Изборът на ориентация върху n-мерното линейно пространство V над $\mathbb{R}$ е избор на едно от подмножествата $(\Lambda^n V)^+$ или $(\Lambda^n V)^-$. Казваме, че базис $v_1, \ldots, v_n$ на V е положително ориентиран, ако $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ е от избраното подмножество.

Задача 7.3. *Нека $e_1, \ldots, e_n$ и $v_1, \ldots, v_n$ са два базиса на линейното пространство V над $\mathbb{R}$ матрица на прехода $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ от $e_1, \ldots, e_n$ към $v_1, \ldots, v_n$, т.е.*

$$v_j = \sum_{s=1}^n t_{sj} e_s \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Означаваме с $e_1^*, \ldots, e_n^*$ и $v_1^*, \ldots, v_n^*$ съответните дуални базиси, изпълняващи равенствата $e_i^*(e_j) = v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ за $\forall 1 \leq i, j \leq n$. Да се докаже, че:
(i) матрицата на прехода от базиса $e_1^*, \ldots, e_n^*$ към базиса $v_1^*, \ldots, v_n^*$ на V^* е

$$(T^t)^{-1} = (T^{-1})^t;$$

(ii) матрицата на прехода от базиса $(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n)^*$ към базиса $(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n)^*$ на $(\Lambda^n V)^* \simeq \mathbb{R}$ е

$$(\det T)^{-1};$$

(iii) матрицата на прехода от базиса $(e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*)^*$ към базиса $(v_1^* \wedge \ldots \wedge v_n^*)^*$ на $(\Lambda^n V^*)^*$ е

$$\det T.$$

В означенията от задача 7.3, матрицата на прехода от базиса $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ към базиса $v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$ на $\Lambda^n V \simeq \mathbb{R}^n$ е $\det T$. Ако $v_1, \ldots, v_n$ е положително ориентиран базис при

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \det T \ \ e_1 \wedge \ldots \wedge e_n \in (\Lambda^n V)^+,$$

то ориентацията на базиса $v_1, \ldots, v_n$ е знакът на детерминантата $\det T$ на матрицата на прехода T от фиксиирания базис $e_1, \ldots, e_n$ към базиса $v_1, \ldots, v_n$.

Задача 7.4. *Нека V е n-мерно линейно пространство над $\mathbb{R}$ със скаларно произведение $g : V \times V \to \mathbb{R}$. За произволни n вектора $v_j \in V$, $1 \leq j \leq n$ с координати $v_{1,j}, \ldots, v_{n,j}$ спрямо ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$ на V полагаме*

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_n = \det(v_{ij})_{i,j=1}^n \ \ e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

Да се докаже, че:
(i) изображението

$$V^n = V \times \ldots \times V \longrightarrow \Lambda^n V,$$

$$(v_1, \ldots, v_n) \mapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_n$$

е поли-линейно и анти-симетрично;
(ii) изображението

$$g_o : (\Lambda^n V) \times (\Lambda^n V) \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g_o(r\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n, \quad s\, e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = rs$$

е скаларно произведение върху $\Lambda^n V$*;*
(iii) за произволни вектори $v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_n \in V$ *е в сила*

$$g_o(v_1 \wedge \ldots \wedge v_n, \quad w_1 \wedge \ldots \wedge w_n) = \det(g(v_i, w_j)_{i,j=1}^n).$$

Ако V е n-мерно линейно пространство над $\mathbb{R}$, $g : V \times V \to \mathbb{R}$ е скаларно произведение и $e_1, \ldots, e_n$ е положително ориентиран ортонормиран базис на V относно g, то $\varphi = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ е едиственият елемент на $(\Lambda^n V)^+$ с $g_o(\varphi, \varphi) = 1$. Ще казваме, че φ е фундаменталният елемент на $\Lambda^n V$ относно фиксираната ориентация на V и фиксираното скаларно произведение g. Да отбележим, че $\varphi = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ не зависи от избора на положително ориентиран ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_n$, а само от избора на ориентацията на V и на скаларно произведение $g : V \times V \to \mathbb{R}$.

Задача 7.5. *Нека V е крайномерно линейно пространство над $\mathbb{R}$ със скаларно произведение $g : V \times V \to \mathbb{R}$ и фундаментален елемент $e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ спрямо някаква ориентация на V и скаларното произведение g. Да се докаже, че:*
(i) съответствието

$$\Phi : V \longrightarrow V^*,$$

$$\Phi(v) = g(v, \;\,) \quad \text{за} \quad \forall v \in V,$$

определено с равенствата

$$\Phi(v)(w) := g(v, w) \quad \text{за} \quad \forall w \in V$$

е $\mathbb{R}$-линеен изоморфизъм;

$$\text{(ii)} \quad g^* : V^* \times V^* \to \mathbb{R},$$

$$g^*(g(u, \;\,), g(v, \;\,)) = g(u, v) \quad \text{за} \quad \forall u, v \in V$$

е скаларно произведение, т.е. положително определена симетрична билинейна форма върху V^**;*
(iii) $g(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n, \;\,)$ е фундаменталният елемент на $\Lambda^n V^*$ относно индуцираната от Φ ориентация на V^* и скаларното произведение g^*.

Ако M е n-мерно ориентирано многообразие с Риманова метрика g, то единствената гладка форма $\mathrm{vol}(g) \in A^n(M)$, чиято стойност във всяка точка $p \in M$ е фундаменталният елемент на $\Lambda(T_p^{\mathbb{R}} M)^* \simeq (\Lambda^n T_p^{\mathbb{R}} M)^*$ относно фиксираната ориентация и скаларното произведение g_p се нарича форма на обема на M. Нека $x_1, \ldots, x_n$ са такива локални координати върху отворено подмножество $U \subseteq M$, за които стойностите на векторните полета $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ във всяка точка $x \in U$ образуват положително ориентиран базис на допирателното пространство $T_x^{\mathbb{R}} M$. Матрицата

$$G(x) = \left(g_{i,j}(x) := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \right)_{i,j=1}^n \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$$

е положително определена и симетрична за $\forall x \in U$. Формата на обема на M върху U е

$$\mathrm{vol}(g)|_U := \sqrt{\det G(x)}\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

за неотрицателния корен квадратен $\sqrt{G(x)}$ от $\det G(x) \geq 0$. Определяме обема на M като интеграла

$$\mathrm{vol}(M) := \int_M \mathrm{vol}(g)$$

на формата на обема $\mathrm{vol}(g)$ върху M. Компактните ориентируеми Риманови многообразия винаги имат краен положителен обем, но некомпактните могат да имат безкраен обем.

Задача 7.6. *Да се намери лицето на сферата*

$$\mathbb{S}^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2\}$$

относно Римановата метрика върху $\mathbb{S}^2$*, индуцирана от евклидовата метрика на* $\mathbb{R}^3$*.*

3. Ермитови форми в комплексни линейни пространства

Произволно n-мерно линейно пространство V над $\mathbb{C}$ е $(2n)$-мерно линейно пространство над $\mathbb{R}$ с линеен оператор $J : V \to V$, $J(v) = iv$ за $\forall v \in V$, задаващ умножението на векторите от V с имагинерната единица $i = \sqrt{1} \in \mathbb{C}$. Операторът J изпълнява равенството $J^2 = J \circ J = -\mathrm{Id}_V$ и се нарича оператор на коплексната структура върху V. Ясно е, че J е обратим и обратният му е

$$J^{-1} = -J = (-1)J.$$

Определение 7.7. *Ермитова форма върху комплексно линейно пространство V е изображение*

$$h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

което е $\mathbb{C}$-линейно относно първия си аргумент и изпълнява равенствата

$$h(v_2, v_1) = \overline{h(v_1, v_2)} \quad \text{за} \quad \forall v_1, v_2 \in V.$$

Ермитовата форма $h : V \times V \to \mathbb{C}$ е положително определена, ако $h(v, v) \geq 0$ за $\forall v \in V$ с равенство $h(v, v) = 0$ тогава и само тогава, когато $v = \mathcal{O}_V$ е нулевият вектор.

Непосредствено се вижда, че всяка ермитова форма $h : V \times V \to \mathbb{C}$ е $\mathbb{C}$-антилинейна относно втория си аргумент, т.е.

$$h(u, \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \overline{\lambda_1} h(u, v_1) + \ldots + \overline{\lambda_n} h(u, v_n)$$

за $\forall u, v_1, \ldots, v_n \in V$, $\forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Ще казваме, че операторът на комплексната структура $J : V \to V$, $J(v) = iv$ за $\forall v \in V$ е ортогонален относно $\mathbb{R}$-билинейната форма $B : V \times V \to \mathbb{R}$, ако $B(Jv_1, Jv_2) = B(v_1, v_2)$ за $\forall v_1, v_2 \in V$.

Задача 7.8. *Нека V е линейно пространство над $\mathbb{C}$. Да се докаже, че:*
(i) ако $h : V \times V \to \mathbb{C}$ е ермитова форма, то

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g(v_1, v_2) := \mathrm{Re} h(v_1, v_2) = \frac{1}{2}\left[h(v_1, v_2) + h(v_2, v_1)\right]$$

е симетрична билинейна форма над $\mathbb{R}$, относно която операторът J на комплексната структура е ортогонален и

$$h(v_1, v_2) = g(v_1, v_2) + ig(v_1, Jv_2)$$

се възстановява еднозначно от g;
(ii) ако $g : V \times V \to \mathbb{R}$ е симетрична билинейна форма над $\mathbb{R}$ и $J : V \to V$ е обратим линеен оператор с $J \circ J = -\mathrm{Id}_V$, който е ортогонален относно g, то

$$h : V \times V \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$h(v_1, v_2) := g(v_1, v_2) + ig(v_1, Jv_2) \quad \text{за} \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

е ермитова форма върху V *с* $\mathrm{Re}h(v_1, v_2) = g(v_1, v_2)$ *за* $\forall v_1, v_2 \in V$.
(iii) $h : V \times V \to \mathbb{C}$ *е положително определена ермитова форма тогава и само тогава, когато симетричната билинейна форма* $g = \mathrm{Re}h : V \times V \to \mathbb{R}$ *е положително определена или скаларно произведение.*

Задача 7.9. *Нека* V *е линейно пространство над полето* $\mathbb{C}$ *на комплексните числа. Да се докаже ,че:*
(i) ако $h : V \times V \to \mathbb{C}$ *е ермитова форма, то*

$$\omega(v_1, v_2) := -\mathrm{Im}h(v_1, v_2) = \frac{i}{2}\left[h(v_1, v_2) - h(v_2, v_1)\right] \quad \text{за} \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

е анти-симетрична $\mathbb{R}$*-билинейна форма* $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$*, относно която операторът на комплексната структура* $J : V \to V$ *е ортогонален и*

$$g(v_1, v_2) = \mathrm{Re}h(v_1, v_2) = \omega(v_1, Jv_2),$$

а оттам и $h(v_1, v_2)$ *се възстановяват еднозначно от* ω*;*
(ii) $\omega : V \times V \to \mathbb{R}$ *е анти-симетрична* $\mathbb{R}$*-билинейна форма, относно която операторът на комплексната структура* $J : V \to V$ *е ортогонален тогава и само тогава, когато*

$$g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$g(v_1, v_2) := \omega(v_1, Jv_2)$$

е симетрична $\mathbb{R}$*-билинейна форма, относно която операторът на комплексната структура* $J : V \to V$ *е ортогонален.*

4. Ермитови многообразия

Нека M е комплексно многообразие, $p \in M$ е точка от M. Тогава композицията $T_p^{\mathbb{R}}M \hookrightarrow T_p^{\mathbb{C}}M \twoheadrightarrow T_p'M$ на влагането $T_p^{\mathbb{R}}M \hookrightarrow T_p^{\mathbb{C}}M$ на реалното допирателно пространство $T_p^{\mathbb{R}}M$ в своята комплексификация $T_p^{\mathbb{C}}M = \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}(T_p^{\mathbb{R}}M)$ и проекцията $T_p^{\mathbb{C}}M \twoheadrightarrow T_p'M$ върху холоморфното допирателно пространство $T_p'M$ към M в p е изоморфизъм на реални линейни пространства. Отъждествяваме $T_p'M$ с $T_p^{\mathbb{R}}M$ чрез този $\mathbb{R}$-линеен изоморфизъм и означаваме със същата буква J операторът на комплексната структура в $T_p^{\mathbb{R}}M$.

Определение 7.10. *Ермитова метрика* h *върху комплексно многообразие* M *е фамилия от положително определени ермитови форми*

$$h_p : T_p^{\mathbb{C}}M \times T_p^{\mathbb{C}}M \longrightarrow \mathbb{C}$$

върху холоморфните допирателни пространства $T_p^{\mathbb{C}}M$*, чиито реални части* $g_p = \mathrm{Re}h_p$ *индуцират Риманова метрика върху* M*, разгледано като гладко* $2n$*-мерно многообразие.*

По този начин, върху произволно ермитово многообразие (M, h) имаме Риманова метрика $g = \mathrm{Re}h$ и реално-значна диференциална 2-форма $\omega = -\mathrm{Im}h$. В локални холоморфни координати $z_1, \ldots, z_n$ върху M нека H е $n \times n$-матрицата, чиито елементи са гладките функции

$$h_{j,k} := h\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\right).$$

Във всяка точка p, в която е определена стойността $H(p)$ на H е положително определена ермитово симетрична матрица, $\overline{H(p)}^t = H(p)$. За да намерим Римановата метрика, полагаме $z_j = x_j + iy_j$ за $1 \leq j \leq n$ и напомняме, че при отъждествяването на $T^{\mathbb{R}}_pM$ с T'_pM векторните полета $\frac{\partial}{\partial x_j} \in T^{\mathbb{R}}_pM$ отговарят на векторните полета $\frac{\partial}{\partial z_j} \in T'_pM$. В резултат, $\frac{\partial}{\partial y_j} = J\frac{\partial}{\partial x_j}$ отговарят на $i\frac{\partial}{\partial z_j}$,

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \mathrm{Re}h\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\right) = \mathrm{Re}h_{j,k} \quad \text{и}$$

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, J\frac{\partial}{\partial x_k}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, i\frac{\partial}{\partial z_k}\right) = \mathrm{Im}h_{j,k}.$$

Относно базиса $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y_n}$, Римановата метрика g има квадратна матрица

$$G = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}H & \mathrm{Im}H \\ -\mathrm{Im}H & \mathrm{Re}H \end{pmatrix}.$$

от ред $2n$. От ермитовата симетричност $\overline{H}^t = H$ на матрицата H следва симетричността на $(\mathrm{Re}H)^t = \mathrm{Re}H$ на реалната и част и косо-симетричността $(\mathrm{Im}H)^t = -\mathrm{Im}H$ на имагинерната и част. Затова матрицата G е симетрична. Да отбележим, че

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) = -\mathrm{Im}h\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\right) = -\mathrm{Im}h_{j,k} \quad \text{и}$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) = -\mathrm{Im}h\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, i\frac{\partial}{\partial z_k}\right) = \mathrm{Re}h_{j,k}.$$

Продължаваме билинейно ω до комплексно-значна 2-форма върху комплексифицираните допирателни пространства $T^{\mathbb{C}}_pM$. Действието на оператора на комплексната структура J върху $T^{\mathbb{R}}_pM$ се различава от умножението с имагинерната единица $i \in \mathbb{C}$. За да изразим ω чрез $dz_1, \ldots, dz_n$, $d\overline{z_1}, \ldots, d\overline{z_n}$ пресмятаме, че

$$4\omega\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\right) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} + i\frac{\partial}{\partial y_k}\right) =$$

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) - i\omega\left(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) + i\omega\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) + \omega\left(\frac{\partial}{\partial y_j}, \frac{\partial}{\partial y_k}\right) =$$

$$-\mathrm{Im}h_{j,k} + i\mathrm{Re}h_{j,k} + i\mathrm{Re}h_{j,k} - \mathrm{Im}h_{j,k} = 2ih_{j,k}.$$

Аналогично, от

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial z_k}\right) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}}, \frac{\partial}{\partial \overline{z_k}}\right) = 0$$

следва, че

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} h_{j,k} dz_j \wedge d\overline{z_k}. \tag{7.3}$$

Следователно ω е $(1,1)$-форма, която се нарича асоцирана $(1,1)$-форма на ермитовата метрика h.

Например, метриката върху $\mathbb{C}^n$, спрямо която векторните полета $\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}$ образуват ортонормиран базис е ермитова и нейната матрица $H = E_n$ съвпада с единичната. Асоцираната ермитова метрика g върху $\mathbb{R}^{2n}$ е стандартната евклидова метрика, а асоцираната $(1,1)$-форма е

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} dz_j \wedge d\overline{z_j} = \sum_{j=1}^{n} dx_j \wedge dy_j.$$

Ако N е подмногообразие на M, то във всяка точка $p \in N$ холоморфното допирателно пространство T'_pN към N в p е подпространство на холоморфното допирателно пространство T'_pM към M. Произволна ермитова метрика h_M върху M индуцира ермитова метрика h_N върху N с асоцирана $(1,1)$-форма $\omega_N = i^*\omega_M$, където $i : N \hookrightarrow M$ е тъждественото влагане.

5. Метрика на Fubini-Study

Върху проективното пространство $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ съществува естествена ермитова метрика, която се нарича метрика на Fubini-Study. Най-лесният начин за описание на тази метрика е чрез асоцираната и $(1,1)$-форма ω_{FS}. Да напомним, че

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}/\mathbb{C}^*$$

е пространството на $\mathbb{C}^*$-орбитите върху $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$ и изображението

$$q : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\} \longrightarrow \mathbb{P}^n,$$

съпоставящо на точка $z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$ нейната $\mathbb{C}^*$-орбита $[z] = [z_0 : z_1 : \dots : z_n] \in \mathbb{P}^n$ е холоморфно. Задаваме ω_{FS} като единствената $(1,1)$-форма върху $\mathbb{P}^n$, чието издърпване посредством q е

$$q^*\omega_{\mathrm{FS}} = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(|z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2). \tag{7.4}$$

Преди да опишем ω_{FS} в локални холоморфни координати върху $\mathbb{P}^n$ да отбележим, че ако $q^*\omega'(z_0,\dots,z_n) = q^*\omega(z_0,\dots,z_n)$ за $(1,1)$-форми ω, ω' върху $\mathbb{P}^n$, то $[q^*(\omega - \omega')](z_0,\dots,z_n) = 0$. Следователно $(\omega-\omega')q(z_0,\dots,z_n) = (\omega-\omega')[z] = 0$ или $\omega[z] = \omega'[z]$ съвпадат във всяка точка $[z] \in \mathbb{P}^n$. Това обяснява защо (7.4) определя еднозначно ω_{FS}. Всички точки на стандартната афинна карта

$$U_0 = \{[z] \in \mathbb{P}^n \ \ | \ \ z_0 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$$

са от вида $[z] = [1 : z_1 : \dots z_n]$. Означаваме $||z||^2 := |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$ и пресмятаме, че

$$\overline{\partial}\log(1 + ||z||^2) = \frac{1}{1+||z||^2}\sum_{j=1}^n z_j d\overline{z_j},$$

откъдето

$$\partial\overline{\partial}\log(1+||z||^2) = \frac{1}{1+||z||^2}\sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\overline{z_j} - \frac{1}{(1+||z||^2)^2}\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n \overline{z_k}z_j dz_k \wedge d\overline{z_j}$$

и

$$\omega_{\mathrm{FS}}|_{U_0} = \frac{i}{2\pi}\partial\overline{\partial}\log(1+||z||^2) =$$

$$\frac{i}{2\pi}\left[\frac{1}{1+||z||^2}\sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\overline{z_j} - \frac{1}{(1+||z||^2)^2}\sum_{k=1}^n\sum_{j=1}^n \overline{z_k}z_j dz_k \wedge d\overline{z_j}\right].$$

Използвайки (7.3), намираме коефициентите $h_{j,k}$, $1 \leq j,k \leq n$ на съответната ермитова метрика. По-точно,

$$h_{j,k} = -\frac{\overline{z_j}z_k}{(1+||z||^2)^2} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \neq k \leq n \quad \text{и}$$

$$h_{j,j} = \frac{1 + |z_1|^2 + \dots + |z_{j_1}|^2 + |z_{j+1}|^2 + \dots + |z_n|^2}{(1+||z||^2)^2} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Да отбележим, че метриката на Fubini-Study е инвариантна под действие на унитарната група

$$U(n+1) := \{A \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{C}) \ \ | \ \ A\overline{A}^t = E_{n+1}\}$$

върху $\mathbb{P}^n$. Да означим $z = (z_0, \dots z_n) \in M_{1\times(n+1)}(\mathbb{C})$ и да забележим, че всяка матрица $A \in U(n+1)$ определя холоморфни автоморфизми

$$A : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\},$$

$$z \mapsto zA \quad \text{за} \quad \forall z \in M_{1\times(n+1)}(\mathbb{C}) \setminus \{0_{1\times(n+1)}\} \quad \text{и}$$

$$f_A : \mathbb{P}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n,$$

$$f_A[z] = [zA] \quad \text{за} \quad \forall [z] \in \mathbb{P}^n.$$

Съгласно $||z||^2 = z.\overline{z}^t$ имаме

$$||zA||^2 = (zA)\overline{(zA)}^t = (zA)(\overline{A}^t\overline{z}^t) = z(A\overline{A}^t)\overline{z}^t = zE_n\overline{z}^t = z\overline{z}^t = ||z||^2,$$

откъдето $A^*(q^*\omega_{\text{FS}}) = q^*\omega_{\text{FS}}$ и $f_A^*\omega_{\text{FS}} = \omega_{\text{FS}}$.

Да забележим също, че ω_{FS} е d-затворена и $\overline{\partial}$-затворена и определя кохомологични класове в кохомологиите на de Rham $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}$ и в кохомологиите на Dolbeault $H^{1,1}(\mathbb{P}^n) \simeq \mathbb{C}$. Кохомологичните класове на ω_{FS} в $H^2(\mathbb{P}^n, \mathbb{R})$ и в $H^{1,1}(\mathbb{P}^n)$ са естествени базиси на тези 1-мерни линейни пространства над $\mathbb{R}$, съответно над $\mathbb{C}$.

Задача 7.11. *За $(1,1)$-формата ω_{FS} на метриката на Fubini-Study върху $\mathbb{P}^1$ да се докаже, че*

$$\int_{\mathbb{P}^1} \omega_{\text{FS}} = 1.$$

Задача 7.11 обяснява наличието на множителя $\frac{i}{2\pi}$ в определението на ω_{FS}.

6. Теорема на Wirtinger

Нека M е комплексно многообразие с ермитова метрика h. Локално, винаги съществуват гладки сечения $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ на $T'M$, чиито стойности $\zeta_1(p), \ldots, \zeta_n(p)$ образуват ортонормиран базис на T'_pM относно h_p за всички точки p от някакво отворено подмножество на M. За такъв репер имаме $h(\zeta_j, \zeta_k) = \delta_{jk}$. За да построим локален ортонормиран репер $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, започваме с произволен локален репер на $T'M$, например с координатните векторни полета $\frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n}$. Чрез ортогонализация по метода на Gram-Schmidt намираме ортогонален репер, нормираме и получаваме ортонормиран репер $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$. Нека $\theta_1, \ldots, \theta_n$ е дуалният базис на $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$, съставен от гладките $(1,0)$-форми θ_j, изпълняващи равенствата $\theta_j(\zeta_k) = \delta_{jk}$. Тогава $(1,1)$-формата на ермитовата метрика h приема вида

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} \theta_j \wedge \overline{\theta_j}.$$

В резултат,

$$\omega^{\wedge n} = \omega \wedge \ldots \wedge \omega = n!\frac{i^n}{2^n}(\theta_1 \wedge \overline{\theta_1}) \wedge \ldots \wedge (\theta_n \wedge \overline{\theta_n}) = n! \ \text{vol}(g).$$

По този начин, формата на обема върху ориентируемото Риманово многообразие M се задава с формулата

$$\text{vol}(g) = \frac{1}{n!} \ \omega^{\wedge n}.$$

Ако предположим, че ермитовото многообразие M е компактно, то неговият обем е

$$\text{vol}(M) = \int_M \text{vol}(g) = \frac{1}{n!}\int_M \omega^{\wedge n}.$$

От Теоремата на Stokes и $\text{vol}(M) \neq 0$ следва, че формата $\omega^{\wedge n}$ не е точна. Оттук, формата ω никога не е точна.

Нека $N \subseteq M$ е комплексно подмногообразие с индуцираната от (M,h) ермитова метрика. Тогава $(1,1)$-формата ω на ермитовата метрика върху M се издърпва от тъждественото влагане $i : N \hookrightarrow M$ в $(1,1)$-формата $\omega_N = i^*\omega$ на ермитовата метрика върху N. Ако $m = \dim_{\mathbb{C}} N$, то обемът

$$\text{vol}(N) = \frac{1}{m!}\int_N i^*\omega^{\wedge m}. \tag{7.5}$$

По този начин, обемът на комплексното подмногообразие N на комплексно многообразие M се задава чрез интеграл на глобално определена върху M диференциална форма. Формулата (7.5) се нарича Теорема на Wirtinger.

7. Приложение - Разбиване на единицата върху паракомпактно многообразие

Определение 7.12. *Отвореното покритие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ на топологично пространство X се нарича локално крайно, ако всяка точка $x \in X$ има околност V_x върху X, така че V_x пресича най-много краен брой U_α.*

Определение 7.13. *Отвореното покритие $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ на топологичното пространство X е подпокритие на отвореното покритие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ на X, ако за всяко $\beta \in B$ съществува $\alpha \in A$, така че $V_\beta \subseteq U_\alpha$.*

Определение 7.14. *Хаусдорфовото топологично пространство X се нарича паракомпактно, ако всяко отворено покритие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ на X има локално крайно подпокритие $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ с компактни затворени обвивки $\overline{V_\beta}$.*
Многообразието M с пълен атлас от карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ е паракомпактно, ако топологията върху M, относно която $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^m$ са хомеоморфизми, е паракомпактна.

Да отбележим, че всяко компактно многообразие е паракомпактно.
Ще нахвърлим конструкцията на гладко разбиване на единицата върху паракомпактно многообразие. За целта ни трябват няколко помощни твърдения.

Лема 7.15. *Нека C е компактно подмножество на гладко многообразие M, а V е отворено подмножество на M, съдържащо C. Тогава съществува гладка функция $\psi : M \to [0,1]$, която е тъждествено нулева извън V и тъждествено равна на единица в C.*

Идея на доказателството: Първо се конструира гладка, навсякъде неотрицателна функция $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, която е тъждествено равна на 1 върху компактно подмножество $A \subset \mathbb{R}^m$ и тъждествено равна на нула върху затворено подмножество $B \subset \mathbb{R}^m$, непресичащо A. По-точно, за произволни реални числа $0 < a < b$, функцията

$$f_{a,b}(x) := \begin{cases} e^{\left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x-a}\right)} & \text{за } x \in (a,b) \\ 0 & \text{в противен случай} \end{cases}$$

е гладка и навсякъде неотрицателна. Да разгледаме функцията

$$F_{a,b}(x) := \frac{\int_x^b f_{a,b}(t)dt}{\int_a^b f_{a,b}(t)dt}.$$

Непосредствено се вижда, че $F_{a,b}(x)$ взема стойности в интервала $[0,1]$, $F_{a,b}(x) = 1$ за $\forall x \leq a$ и $F_{a,b}(x) = 0$ за $\forall x \geq b$. Сега

$$G_{a,b} : \mathbb{R}^m \longrightarrow [0,1],$$

$$G_{a,b}(x_1, \ldots, x_m) := F_{a,b}(x_1^2 + \ldots x_m^2)$$

е гладка функция със стойност 1 в затвореното кълбо

$$\overline{B^m(\check{o}, a)} := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq a^2\}, \quad B^m(\check{o}, a) := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i^2 < a\}$$

и стойност 0 в допълнението $\mathbb{R}^m \setminus B^m(\check{o}, b)$ на отвореното кълбо $B^m(\check{o}, b)$. За произволни концентрични сфери S' и S, така че S' е във вътрешността на

S, съществува гладка функция $G_{S',S} : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ със стойност 1 във вътрешността на S' и стойност 0 извън S. Функцията $G_{S',S}$ се получава от $G_{a,b}$ чрез модификация посредством линеен оператор в $\mathbb{R}^m$. Произволно компактно подмножество $A \subset \mathbb{R}^m$ се покрива с краен брой отворени кълба $B_1, \ldots, B_n$ в $\mathbb{R}^m$, така че затворените обвивки $\overline{B_i}$ не пресичат затвореното подмножество $B \subset \mathbb{R}^m$ с $B \cap A = \emptyset$. Свиваме сферите $S_i := \partial B_i$ до концентрични сфери S'_i, така че съответните отворени кълба B'_i с $\partial B'_i = S'_i$ образуват покритие на A. Да означим с $\varphi_i : \mathbb{R}^m \to [0,1]$ някаква гладка функция със стойност 1 в B'_i и стойност 0 в $\mathbb{R}^m \setminus B_i$. Тогава гладката функция

$$\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\varphi(x_1, \ldots, x_m) := 1 - (1-\varphi_1)(1-\varphi_2)\ldots(1-\varphi_n)$$

взема стойности в $[0,1]$ и е тъждествено равна на 1 върху A и на 0 върху B.
За произволно компактно подмножество C на многообразие M с $\dim M = m$ и отворено подмножество $V \subseteq M$, съдържащо C, да разгледаме пълен атлас $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ върху M. За всяко компактно подмножество C_α на U_α съществува гладка функция $f_\alpha : \mathbb{R}^m \to [0,1]$, която има стойност 1 върху $\varphi_\alpha(C_\alpha)$ и носител

$$\mathrm{Supp}(f_\alpha) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^m \mid f_\alpha(x) \neq 0\}},$$

съдържащ се във $\varphi_\alpha(U_\alpha)$. Тогава

$$F_\alpha(p) := \begin{cases} f_\alpha \varphi_\alpha(p) & \text{за } p \in U_\alpha \\ 0 & \text{в противен случай.} \end{cases}$$

е гладка функция върху M със стойности в $[0,1]$, тъждествено равна на 1 върху C_α и на 0 върху $M \setminus U_\alpha$. Доколкото C е компактно, а V е отворено, съществуват краен брой карти $U_1, \ldots, U_n$ и техни компактни подмножества $C_1, \ldots, C_n$, така че

$$C \subseteq \cup_{i=1}^n C_i, \quad C_i \subseteq U_i, \quad \cup_{i=1}^n U_i \subseteq V.$$

Ако $F_i : M \to [0,1]$ е гладка функция със стойност 1 върху C_i и стойност 0 върху $M \setminus U_i$, то

$$\psi := 1 - (1-F_1)(1-F_2)\ldots(1-F_n)$$

е гладка функция върху M със стойности в $[0,1]$, тъждествено равна на върху C и на 0 върху $M \setminus V$, Q.E.D.
За да формулираме и докажем следващата лема, да дадем още едно

Определение 7.16. *Топологичното пространство X се нарича нормално, ако за произволни непресичащи се затворени подмножества $A \subset X$ и $B \subset X$ съществуват непресичащи се отворени подмножества $U \subset X$, $V \subset X$, така че $A \subset U$, $B \subset V$.*
Многообразието M с пълен атлас от карти $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_{\alpha \in A}$ е нормално, ако топологията върху M, относно която координатните карти $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^m$, $m = \dim M$ са хомеоморфизми, е нормална.

Лема 7.17. *Всяко паракомпактно топологично пространство X е нормално.*

Доказателство: Нека A и B са затворени непресичащи се подмножества на X. За всяка точка $p \in A$ ще докажем, че съществува околност $U_p \subset X$ и отворено подмножество $V_p \subset X$, съдържащо B и непресичащо U_p. За целта използваме, че X е Хаусдорфово и за всяка точка $q \in B$ избираме непресичащи се околности U_q на p и V_q на q. Тогава отворените подмножества V_q за $\forall q \in B$ и $X \setminus B$ образуват покритие на X. Съгласно паракампактността на X това покритие има локално крайно подпокритие $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$. Обединението

$$V_p := \cup_{W_\alpha \cap B \neq \emptyset} W_\alpha$$

е околност на B. Нека N_p е околност на p, която пресича краен брой W_α с $W_\alpha \cap B \neq \emptyset$, например $W_1, \ldots, W_n$ за някакво $n \in \mathbb{N}$. За произволно W_i избираме $q_i \in B$, така че $W_i \subseteq V_{q_i}$. Тогава околността

$$U_p := (\cap_{i=1}^n U_{q_i}) \cap N_p$$

на p и околността $V_p := \cup_{W_\alpha \cap B \neq} W_\alpha$ на B отделят p от B, т.е. $U_p \cap V_p = \emptyset$.
Сега да разгледаме отвореното покритие на X, съставено от всички U_p, $p \in A$, построени по-горе и допълнението $X \setminus A$. Съществува локално крайно подпокритие $(N_\beta)_{\beta \in B}$ на това покритие. Отвореното множество

$$U := \cup_{N_\beta \cap A \neq \emptyset} N_\beta$$

е околност на A. За $\forall q \in B$ съществува околност B_q, която пресича най-много краен брой N_β с $N_\beta \cap A \neq \emptyset$, например, $N_1(q), \ldots, N_{m_q}(q)$. Всяко $N_j(q)$ се съдържа в някое U_{p_j}, така че

$$W_q := \left(\cap_{j=1}^{m_q} V_{p_j}\right) \cap B_q$$

е околност на $q \in B$, непресичаща U. Обединението

$$V := \cup_{q \in B} W_q$$

е околност на B, непресичаща U, Q.E.D.
За съществуването на разбиване на единицата е нужна и следната

Лема 7.18. *Нека $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ е локално крайно покритие на нормално топологично пространство X. Тогава за $\forall \alpha \in A$ съществува отворено подмножество $V\alpha \subset U_\alpha$, така че затворената обвивка $\overline{V_\alpha}$ се съдържа в U_α и $(V_\alpha)_{\alpha \in A}$ е покритие на X.*

Доказателство : Нека Φ е множеството от всички функции φ, които на $\alpha \in A$ съпоставят $\varphi(\alpha) = U_\alpha$ или отворено подмножество $V_\alpha \subset U_\alpha$ с $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$, така че $(\varphi(\alpha))_{\alpha \in A}$ е покритие на X. Въвеждаме частична наредба във Φ, считайки че $\varphi \leq \varphi'$ точно когато $\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha)$ за всички $\varphi(\alpha) = V_\alpha$. За всяко линейно наредено подмножество $\Psi \subseteq \Phi$ определяме

$$\psi^* := \cap_{\psi \in \Psi} \psi(\alpha)$$

и твърдим, че $\psi^* \in \Phi$. По-точно, фамилията $(\psi(\alpha))_{\psi \in \Psi}$ се състои от най-много две отворени подмножества, съгласно линейната нареденост на Ψ. Следователно $\psi^*(\alpha) = U_\alpha$ или $\psi^*(\alpha) = V_\alpha$ за отворено подмножество $V_\alpha \subset X$ с $\overline{V_\alpha} \subset W_\alpha$. Освен това, $(\psi^*(\alpha))_{\alpha \in A}$ е покритие на X, защото за всяка точка $p \in X$ съществуват краен брой отворени подмножества $U_1(p), \ldots, U_{m_p}(p)$ от покритието $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, които съдържат p. Ако ψ_p е функцията върху A със стойности $\psi_p(\alpha) := \psi^*(\alpha)$ за $\alpha = 1, \ldots, m_p$ и $\psi_p(\alpha) := U_\alpha$ за всички останали $\alpha \in A \setminus \{1, \ldots, m_p\}$, то $(\psi_p(\alpha))_{\alpha \in A}$ се получава от $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ чрез свиване на неповече от краен брой U_α и всяко такова свиване води до покритие на X. Следователно $(\psi_p(\alpha))_{\alpha \in A}$ е покритие на X, откъдето $(\psi^*(\alpha))_{\alpha \in A}$ е покритие на X и $\psi^* \in \Phi$. По определение, ψ^* е точна горна граница на Ψ, така че можем да приложим Лемата на Цорн и да получим съществуването на максимален елемент $\varphi^* \in \Phi$.
Остава да докажем, че $\varphi^*(\alpha) = V_\alpha$ за $\forall \alpha \in A$. Ако допуснем, че $\varphi^*(\beta) = U_\beta$ за някое $\beta \in A$, то

$$Z_\beta := X \setminus (\cup_{\alpha \neq \beta} \varphi^*(\alpha))$$

е затворено подмножество на U_β, доколкото $(\varphi^*(\alpha))_{\alpha \in A}$ е покритие на X. Вземайки предвид, че топологичното пространство X е нормално и $U_\beta \neq \overline{U_\beta}$, получаваме съществуването на отворено подмножество $V_\beta \subset U_\beta$ с $Z_\beta \subset V_\beta \subset \overline{V_\beta} \subset U_\beta$. Тогава функцията φ_o с $\varphi_o(\beta) := V_\beta$ и $\varphi_o(\alpha) := \varphi^*(\alpha)$ за $\forall \alpha \in A \setminus \{\beta\}$

е строго по-голяма от φ^*, което противоречи на максималността на $\varphi^* \in \Phi$ и доказва, че $\varphi^*(\alpha) = V_\alpha$ за $\forall\alpha \in A$, Q.E.D.

Лема-Определение 7.19. *Нека M е нормално многообразие, а $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ е локално крайно покритие на M с компактни затворени обвивки $\overline{U_\alpha}$ за $\forall\alpha \in A$. Тогава съществува фамилия $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ от гладки функции*

$$\varphi_\alpha : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

с компактни носители

$$\mathrm{Supp}(\varphi_\alpha) := \overline{\{p \in M \mid \varphi_\alpha(p) \neq 0\}} \subset U_\alpha,$$

така че $\varphi_\alpha \geq 0$ за $\forall\alpha \in A$ и $\sum_{\alpha\in A} \varphi_\alpha = 1$.
Фамилията от гладки функции $(\varphi_\alpha)_{\alpha\in A}$ се нарича разбиване на единицата върху M, съгласувано с локално крайното покритие $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$.

Доказателство: Съгласно Лема 7.18 съществува подпокритие $(V_\alpha)_{\alpha\in A}$ на $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ с компактни затворени обвивки $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. Прилагаме Лема 7.15 към $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$ и получаваме гладки функции $\psi_\alpha : M \to [0, 1]$ с компактен носител $\mathrm{Supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$, вземащи стойност 1 върху V_α и неотрицателни върху цялото многообразие M. Сумата $\psi := \sum_{\alpha\in A} \psi_\alpha$ е коректно определена благодарение на локалната крайност на покритието $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$. Непосредствено се вижда, че ψ е гладка функция върху M със строго положителна стойност $\psi(p) > 0$ във всяка точка $p \in M$. Гладките функции

$$\varphi_\alpha := \frac{\psi_\alpha}{\psi} = \frac{\psi_\alpha}{\sum_{\alpha\in A} \psi_\alpha}$$

образуват търсеното разбиване на единицата върху M, съгласувано с локално крайното покритие $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$, Q.E.D.