Глава 6

# Диференциални форми. Лема на Poincare

За да въведем ко-допирателното разслоение на гладко или комплексно многообразие, както и неговите външни степени, са необходими някои предварителни сведения от линейната алгебра. Нека $\mathbb{K}$ е полето $\mathbb{R}$ на реалните числа или полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа.

## 1. Поли-линейни анти-симетрични изображения на линейни пространства

Ако $V$ е линейно пространство над $\mathbb{K}$, то $\mathbb{K}$-линейните изображения $f : V \to \mathbb{K}$ се наричат $\mathbb{K}$-линейни функционали върху $V$. Множеството $V^*$ на $\mathbb{K}$-линейните функционали върху $V$ е $\mathbb{K}$-линейно пространство относно поточково определените събиране $(f+g)(v) := f(v) + g(v)$ за $\forall v \in V$, $\forall f, g \in V^*$ и умножение с $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda f)(v) := \lambda f(v)$ за $\forall v \in V$, $\forall f \in V^*$. Да напомним, че транспозицията $(p, q)$ на числата $p$ и $q$ е онази пермутация от симетричната група $S_k$, която разменя помежду си числата $p$ и $q$, оставяйки на място всички останали числа от 1 до $k$. Изображение

$$f : V^k = V \times \ldots \times V \longrightarrow \mathbb{K} \tag{6.1}$$

е поли-линейно, ако е линейно относно всеки аргумент. Изображение (6.1) е анти-симетрично, ако променя знака си под действие на произволна транспозиция $(p, q)$, $1 \leq p < q \leq n$ върху аргументите $v_1, \ldots, v_n$,

$$f(\ldots, v_p, \ldots, v_q, \ldots) = -f(\ldots, v_q, \ldots, v_p, \ldots).$$

Задача 6.1. *(i) Да се докаже, че изображение*

$$f : V^k = V \times \ldots \times V \longrightarrow \mathbb{K}$$

*е анти-симетрично тогава и само тогава, когато за всяка пермутация $\sigma \in S_k$ е в сила*

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (-1)^{[\sigma(1), \ldots, \sigma(k)]} f(v_1, \ldots, v_n),$$

*където $[\sigma(1), \ldots, \sigma(k)]$ е броят на инверсиите в редицата $\sigma(1), \ldots, \sigma(k)$ от образите на $1, \ldots, k$ под действие на $\sigma$. (Числата $\sigma(p)$ и $\sigma(q)$ от редицата на образите $\sigma(1), \ldots, \sigma(p), \ldots, \sigma(q), \ldots, \sigma(k)$ образуват инверсия, ако $p < q$ и $\sigma(p) > \sigma(q)$.)*
*(ii) Нека $f : V^k = V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$ е поли-линейно изображение. Да се докаже, че $f$ е анти-симетрично тогава и само тогава, когато $f$ се анулира при равни аргументи, $f(\ldots, v_p, \ldots, v_q = v_p, \ldots) = 0$ за $\forall 1 \leq p < q \leq k$.*

Задача 6.2. *Нека $f : V^k = V \times \ldots \times V \to \mathbb{K}$ е поли-линейна анти-симетрична функция, $e_1, \ldots, e_n$ е базис на линейното пространство $V$ над полето $\mathbb{K}$, а $v_i = \sum\limits_{j=1}^{n} v_{i,j} e_j$, $1 \leq i \leq k$ са вектори от $V$ с координати $(v_{i,1}, \ldots, v_{i,n})$ спрямо базиса $e_1, \ldots, e_n$. Да се докаже, че:*

$$(i) \quad f(v_1,\dots,v_k) = \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} \left( \sum_{\sigma\in S_k} (-1)^{[\sigma]} v_{1,j_{\sigma(1)}} \dots v_{k,j_{\sigma(k)}} \right) f(e_{j_1},\dots,e_{j_k}),$$

*където* $[\sigma]$ *е броят на инверсиите в пермутацията* $\sigma(1),\dots,\sigma(k)$ *на* $1,\dots,k$*;*
*(ii) ако* $k>n$*, то* $f(v_1,\dots,v_k)=0$ *за произволни вектори* $v_1,\dots,v_k\in V$*;*
*(iii) ако* $k\le n$ *и* $v_1,\dots,v_k$ *са линейно зависими, то* $f(v_1,\dots,v_k)=0$*;*
*(iv) ако* $k=n$ *и* $f\not\equiv 0$ *не е тъждествено нулевата функция, то*

$$f(v_1,\dots,v_n)=0$$

*тогава и само тогава, когато* $v_1,\dots,v_n$ *са линейно зависими.*

Задача 6.3. *Нека* $V$ *е линейно пространство над полето* $\mathbb{K}$*, а* $(\Lambda^m V)^*$ *е множеството на поли-линейните анти-симетрични функции*

$$f: V^k = V\times\dots\times V \longrightarrow \mathbb{K}.$$

*(За* $m=1$ *пишем* $V^*$ *вместо* $(\Lambda^1 V)^*$*.) Да се докаже, че:*
*(i)* $(\Lambda^m V)^*$ *е линейно пространство над* $\mathbb{K}$ *относно поточково определените събиране*

$$(f+g)(v_1,\dots,v_k) := f(v_1,\dots,v_k)+g(v_1,\dots,v_k) \quad \text{за} \quad \forall v_1,\dots,v_k\in V,\ \forall f,g\in(\Lambda^m V)^*$$

*и умножение с* $\lambda\in\mathbb{K}$*,*

$$(\lambda f)(v_1,\dots,v_k) := \lambda f(v_1,\dots,v_k) \quad \text{за} \quad \forall v_1,\dots,v_k\in V,\ \ \forall f\in(\Lambda^m V)^*;$$

*(ii) ако* $e_1,\dots,e_n$ *е базис на* $V$ *и* $1\le j_1<\dots<j_m\le n$ *за някое* $m\in\mathbb{N}$*,* $m\le n$*, то съществува единствена поли-линейна анти-симетрична функция*

$$(e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_m})^* : V^m = V\times\dots\times V\longrightarrow\mathbb{K}$$

*с*

$$(e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_m})^*(e_{j_1},\dots,e_{j_m}) = 1 \quad \text{и}$$

$$(e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_m})^*(e_{s_1},\dots,e_{s_m}) = 0 \quad \text{за} \ \forall 1\le s_1<\dots<s_m\le n,\ \{s_1,\dots,s_m\}\ne\{j_1,\dots,j_m\}.$$

*(iii) при предположенията от подусловие (ii), функциите* $(e_{j_1}\wedge\dots\wedge e_{j_m})^*$ *за* $\forall 1\le j_1<\dots<j_m\le n$ *образуват базис на* $(\Lambda^m V)^*$ *над* $\mathbb{K}$*, така че*

$$\dim(\Lambda^m V)^* = \binom{n}{m}.$$

## 2. Диференциални форми върху гладко многообразие

Нека $M$ е гладко многообразие с размерност $\dim M = n$, $p\in M$ е точка от $M$, а $T_p^{\mathbb{R}}M$ е реалното допирателно пространство към $M$ в $p$. Тогава $T_p^{\mathbb{R}}M$ е $n$-мерно линейно пространство над $\mathbb{R}$. За $\forall m\in\mathbb{N}$, $1\le m\le n$ множеството $(\Lambda^m T_p^{\mathbb{R}}M)^*$ на поли-линейните анти-симетрични функции $T_p^{\mathbb{R}}M\times\dots\times T_p^{\mathbb{R}}M\to\mathbb{R}$ на $m$ аргумента е линейно пространство над $\mathbb{R}$ с размерност $\binom{n}{m}$. Непресичащото се обединение

$$(\Lambda^1 T^{\mathbb{R}}M)^* = (T^{\mathbb{R}}M)^* = \coprod_{p\in M} (T_p^{\mathbb{R}}M)^*$$

на дуалните допирателни пространства към $M$ е векторно разслоение от ранг $n$ над $M$, което се нарича ко-допирателно разслоение на $M$. За произволно $m\in\mathbb{N}$, $1\le m\le n$, непресичащото се обединение

$$(\Lambda^m T^{\mathbb{R}}M)^* = \coprod_{p\in M} (\Lambda^m T_p^{\mathbb{R}}M)^*$$

е векторно разслоение от ранг $\binom{n}{m}$ над $M$, което се нарича $m$-та външна степен на ко-допирателното разслоение към $M$.

Нека $U$ е отворено подмножество на $M$ с гладка координатна карта

$$f : U \longrightarrow D \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Да напомним, че гладките сечения $U \to T^{\mathbb{R}}M|_U$ на $T^{\mathbb{R}}M \to M$ над $U$ е наричат гладки векторни полета и образуват $n$-мерно линейно пространство над $\mathbb{R}$ с базис

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \circ f : U \to T^{\mathbb{R}}M|_U, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Гладките локални сечения $U \to (\Lambda^m T^{\mathbb{R}}M)^*|_U$ на $(\Lambda^m T^{\mathbb{R}}M)^* \to M$ се наричат диференциални $m$-форми върху $M$.

Нека $U \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено подмножество, а $x_1, \ldots, x_n$ са координатни функции върху $\mathbb{R}^n$. Гладките 1-форми образуват дуалното на пространството на гладките векторни полета $U \to T^{\mathbb{R}}U \simeq U \times \mathbb{R}^n$. Базисът $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ на гладките векторни полета върху $U$ отговаря на базиса $dx_1, \ldots, dx_n$ на гладките 1-форми, изпълняващ равенствата

$$dx_i \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq n, \\ 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq n. \end{cases}$$

Всяка 1-форма е от вида $\varphi_1 dx_1 + \ldots + \varphi_n dx_n$ за някакви гладки функции $\varphi_i : U \to \mathbb{R}$. Аналогично, за произволно естествено число $1 \leq m \leq n$, гладките $m$-форми $\omega$ върху $U$ са гладки поли-линейни анти-симетрични функции на $m$ векторни полета. Те могат да се зададат като сума

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n} \varphi_{i_1, \ldots, i_m} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_m},$$

зависеща от гладки функции $\varphi_{i_1, \ldots, i_m} : U \to \mathbb{R}$. Понякога записваме съкратено

$$\omega = \sum_{|I| = m} \varphi_I dx_I$$

със сумиране по всички растящи подмножества $I = \{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$, съставени от $m$ различни елемента. Съгласно Задача 6.3,

$$dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_m} := \left( \frac{\partial}{\partial x_{j_1}} \wedge \ldots \wedge \frac{\partial}{\partial x_{j_m}} \right)^*$$

за $\forall 1 \leq j_1 < \ldots < j_m \leq n$ образуват базис на гладките диференциални $m$-форми върху $U$.

Нека $f_\alpha : U_\alpha \to D_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ са локални карти върху гладко многообразие $M$. За да намерим функциите на прехода $\varphi_{\alpha,\beta} : f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to GL(n, \mathbb{R})$ на кодопирателното разслоение $(T^{\mathbb{R}}M)^*$ да напомним, че функциите на прехода на $T^{\mathbb{R}}M$ са

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} : f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

(виж Определение 5.1). Тогава

$$dx_\beta = (dx_{\beta,1}, \ldots, dx_{\beta,n}) = (dx_{\alpha,1}, \ldots, dx_{\alpha,n}).\varphi_{\beta,\alpha}$$

е еквивалентно на

$$dx_{\beta,k} = \sum_{j=1}^{n} (\varphi_{\beta,\alpha})_{j,k} dx_{\alpha,j} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq qk \leq n$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta} = \left( \frac{\partial}{\partial x_{\beta,1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{\beta,n}} \right) \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}$$

е равносилно на

$$\frac{\partial}{\partial x_{\beta,k}} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial x_{\beta,k}} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha,j}} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq k \leq n.$$

Ако

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{за } 1 \leq i = j \leq n, \\ 0 & \text{за } 1 \leq i \neq j \leq n, \end{cases}$$

е символът на Kronecker, то за произволни $1 \leq k, l \leq n$ имаме

$$\delta_{k,l} = dx_{\beta,k}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\beta,l}}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\varphi_{\beta,\alpha})_{i,k}.\frac{\partial x_{\alpha,j}}{\partial x_{\beta,l}}.dx_{\alpha,i}\left(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha,j}}\right) =$$

$$\sum_{i=1}^{n}(\varphi_{\beta,\alpha})_{i,k}.\frac{\partial x_{\alpha,i}}{\partial x_{\beta,l}} = \left(\frac{\partial x_{\alpha,1}}{\partial x_{\beta,l}}, \dots, \frac{\partial x_{\alpha,n}}{\partial x_{\beta,l}}\right)\begin{pmatrix} (\varphi_{\beta,\alpha})_{1,k} \\ \dots \\ (\varphi_{\beta,\alpha})_{n,k} \end{pmatrix} = \left[\left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^t.\varphi_{\beta,\alpha}\right]_{l,k}.$$

В резултат, $\varphi_{\beta,\alpha} = \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^t$, откъдето

$$\varphi_{\alpha,\beta} = \varphi_{\beta,\alpha}^{-1} = \left(\frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta}\right)^t.$$

За да намерим функциите на прехода $\psi_{\beta,\alpha} : f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to GL\left(\binom{n}{2}, \mathbb{R}\right)$ на $(\Lambda^2 T^{\mathbb{R}} M)^* \to M$, за произволни $1 \leq k < l \leq n$ пресмятаме, че

$$dx_{\beta,k} \wedge dx_{\beta,l} = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_{\beta,k}}{\partial x_{\alpha,i}}dx_{\alpha,i}\right) \wedge \left(\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial x_{\beta,l}}{\partial x_{\alpha,j}}dx_{\alpha,j}\right) =$$

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\left(\frac{\partial x_{\beta,k}}{\partial x_{\alpha,i}}.\frac{\partial x_{\beta,l}}{\partial x_{\alpha,j}} - \frac{\partial x_{\beta,k}}{\partial x_{\alpha,j}}.\frac{\partial x_{\beta,l}}{\partial x_{\alpha,i}}\right).dx_{\alpha,i}.dx_{\alpha,j}.$$

Ако индексираме редовете и стълбовете на матрицата $\psi_{\beta,\alpha} \in GL\left(\binom{n}{2}, \mathbb{R}\right)$ с $\{p, q\}$ за $1 \leq p < q \leq n$, то

$$dx_{\beta,k} \wedge dx_{\beta,l} = \sum_{1\leq i<j\leq n}(\psi_{\beta,\alpha})_{\{i,j\},\{k,l\}}dx_{\alpha,i} \wedge dx_{\alpha,j} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq k < l \leq n.$$

Следователно елементът

$$(\psi_{\beta,\alpha})_{\{i,j\},\{k,l\}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_{\beta,k}}{\partial x_{\alpha,i}} & \frac{\partial x_{\beta,k}}{\partial x_{\alpha,j}} \\ \frac{\partial x_{\beta,l}}{\partial x_{\alpha.i}} & \frac{\partial x_{\beta,l}}{\partial x_{\alpha_j}} \end{vmatrix} = \Delta_{i,j}^{k,l}\left(\left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^t\right)$$

на $\psi_{\beta,\alpha}$ в реда с номер $\{i, j\}$ и стълба с номер $\{k, l\}$ е минорът на $\varphi_{\beta,\alpha} = \left(\frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha}\right)^t$ от ред 2 образуван от редовете с номера $1 \leq i < j \leq n$ и стълбовете с номера $1 \leq k < l \leq n$.

Задача 6.4. *Нека $M$ е гладко многообразие с $\dim_{\mathbb{R}} M = 4$. Да се намерят функциите на прехода*

$$\lambda_{\alpha,\beta} : f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow GL(4, \mathbb{R})$$

*на третата външна степен $(\Lambda^3 T^{\mathbb{R}} M)^* \to M$ на ко-допирателното разслоение на многообразието $M$.*

Ако $M$ е $n$-мерно гладко многообразие, то $(\Lambda^n T^{\mathbb{R}} M)^* \to M$ е линейно разслоение, т.е., векторно разслоение с ранг 1. Функциите на прехода на това разслоение са

$$\nu_{\alpha,\beta} = \det \left( \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} \right). \tag{6.2}$$

По-точно,

$$dx_{\alpha,1} \wedge \ldots \wedge dx_{\alpha,n} = \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_{\alpha,1}}{\partial x_{\beta,i}} dx_{\beta,i} \right) \wedge \ldots \wedge \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_{\alpha,n}}{\partial x_{\beta,i}} dx_{\beta,i} \right) =$$
$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} \frac{\partial x_{\alpha,1}}{\partial x_{\beta,i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x_{\alpha,i_n}}{\partial x_{\beta,i_n}} dx_{\beta,i_1} \wedge \ldots dx_{\beta,i_n} =$$
$$\sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} \frac{\partial x_{\alpha,1}}{\partial x_{\beta,i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x_{\alpha,i_n}}{\partial x_{\beta,i_n}} dx_{\beta,1} \wedge \ldots \wedge dx_{\beta,n},$$

където сумиранията са по пермутациите $i_1, \ldots, i_n$ на $1, \ldots, n$ а $[i_1, \ldots, i_n]$ е броят на инверсиите на $i_1, \ldots, i_n$. Оттук

$$\nu_{\alpha,\beta} = \sum_{i_1,\ldots,i_n} (-1)^{[i_1,\ldots,i_n]} \frac{\partial x_{\alpha,1}}{\partial x_{\beta,i_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial x_{\alpha,i_n}}{\partial x_{\beta,i_n}} = \det \left( \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_\beta} \right).$$

Външната производна $d\omega$ на локална $m$-форма $\omega = \sum\limits_{|I|=m} \varphi_I dx_I$ се определя като

$$d\omega = \sum_{j=1}^n \sum_{|I|=m} \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I.$$

Например, външната производна на гладка функция $f$ е нейният диференциал

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j.$$

Ако $A^k(U)$ е пространството на гладките диференциални $k$-форми върху отворено подмножество $U \subseteq M$, то външната прозиводна

$$d : A^k(M) \longrightarrow A^{k+1}(M)$$

е хомоморфизъм на адитивните групи $(A^k(M), +)$, $(A^{k+1}(M), +)$, изпълняващ правилото на Leibnitz-Newton

$$d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$$

за гладка функция $f$ и гладка $k$-форма $\omega$. Твърдим, че $d^2 = d \circ d \equiv \mathbb{O}$ е тъждествено нулевото изображение. Наистина, за произволна форма $\omega = \sum\limits_{|I|=k} \varphi_I dx_I$ имаме

$$(d \circ d)(\omega) = d \left( \sum_{j=1}^n \sum_{|I|=k} \frac{\partial \varphi_I}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I \right) = \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_l \partial x_j} dx_l \wedge dx_j \wedge dx_I = 0,$$

защото за произволни $1 \leq l < j \leq n$ събираемите

$$\frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_l \partial x_j} dx_l \wedge dx_j \wedge dx_I + \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_j \partial x_l} dx_j \wedge dx_l \wedge dx_I = 0$$

се унищожават поради

$$\frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_l \partial x_j} = \frac{\partial^2 \varphi_I}{\partial x_j \partial x_l} \quad \text{и} \quad dx_j \wedge dx_l = -dx_l \wedge dx_j.$$

По този начин, външната производна превръща множеството $A^\bullet(M) = \{A^k(M)\}_{k=0}^n$, $n = \dim_{\mathbb{R}} M$ на гладките диференциални форми върху $M$ във верижен комплекс

$$A^0(M) \xrightarrow{\quad d \quad} A^1(M) \xrightarrow{\qquad d \qquad} \cdots \xrightarrow{\qquad d \qquad} A^{n-1}(M) \xrightarrow{\quad d \quad} A^n(M)$$

от безкрайномерни линейни пространства над $\mathbb{R}$. Елементите на ядрото

$$Z^k(M) := \ker[d : A^k(M) \longrightarrow A^{k+1}(M)]$$

на $d$ върху $A^k(M)$ се наричат затворени диференциални $k$-форми. Елементите на образа

$$B^k(M) := \mathrm{im}[d : A^{k-1}(M) \longrightarrow A^k(M)]$$

на $A^{k-1}(M)$ под действие на $d$ се наричат точни диференциални $k$-форми. Съгласно $d \circ d \equiv \mathbb{O}$ имаме включване $B^k(M) \subseteq Z^k(M)$. Фактор-пространството $Z^k(M)/B^k(M)$ е изоморфно на сингулярните кохомологии $H^k(M, \mathbb{R})$ на $M$ с реални коефициенти, съгласно Теоремата на de Rham.

Да напомним определението да фактор-пространство $U/V$ на линейно пространство $U$ и негово подпространство $V$ или на модул $U$ по негов подмодул $V$ над комутативен пръстен с единица $R$. Адитивната група $(U, +)$ на $U$ е абелева, така че нейната подгрупа $(V, +)$ е нормална и можем да образуваме фактор-групата $(U/V, +) \simeq (U, +)/(V, +)$ с индуцираното от $U$ събиране

$$(u_1 + V) + (u_2 + V) = u_1 + u_2 + V \quad \text{за} \quad \forall u_1, u_2 \in U.$$

Върху така определената абелева група задаваме умножение с $r \in R$ по провилото

$$\begin{aligned} R \times (U/V) &\longrightarrow (U/V), \\ r(u + V) = ru + V \quad &\text{за} \quad \forall r \in R, \quad \forall u \in U. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Задача 6.5. *(а) Да се докаже коректността на операцията (6.3), т.е. независимостта от представителя и на* $u + V$.
*(б) Да се докажат свойствата:*
*(i)* $(r + s)(u + V) = r(u + V) + s(u + V)$ *за* $\forall r, s, \in R$, $\forall u \in U$;
*(ii)* $r((u + V) + (u' + V)) = r(u + V) + r(u' + V)$ *за* $\forall r \in R$, $\forall u, u' \in U$;
*(iii)* $(rs)(u + V) = r[s(u + V)]$ *за* $\forall r, s \in R$, $\forall u \in U$;
*(iv)* $1.(u + V) = u + V$ *за* $1 \in R$, $\forall u \in V$,
*съгласно които абелевата група* $(U/V, +)$ *е* $R$*-модул.*

Диференциалните форми се издърпват чрез гладки изображения $f : M \to N$ на многообразия. По-точно, ако $x_1, \ldots, x_n$ са локални координати върху отворено подмножество $U \subseteq M$ с център $p \in U$, а $y_1, \ldots, y_m$ са локални координати върху отворено подмножество $V \subseteq N$ с център $f(p) \in V$, то $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to V$ се задава с $m$ гладки локални функции $y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$. Тогава

$$f^* dy_i = df_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j$$

и за произволна гладка диференциална $k$-форма

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \varphi_{i_1, \ldots, i_k} dy_{i_1} \wedge \ldots \wedge dy_{i_k}$$

имаме

$$f^* \omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} \varphi_{i_1, \ldots, i_k}(f(x)) df_{i_1} \wedge \ldots \wedge df_{i_k}$$

## 3. Тип на диференциална форма върху комплексно многообразие

Нека $M$ е комплексно многообразие с локални холоморфни координати $z_1, \ldots, z_n$ върху отворено подмножество $U \subseteq M$. Реалните части $x_j = \mathrm{Re} z_j$ на $z_j = x_j + iy_j$ и имагинерните части $y_j = \mathrm{Im} z_j$ на $z_j$ задават локални координати $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ върху $U$, разгледано като гладко многообразие. Съгласно

$$dz_j = dx_j + idy_j \quad \text{и} \quad d\overline{z_j} = dx_j - idy_j \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq n,$$

можем да използваме $dz_1, \ldots, dz_n, d\overline{z_1}, \ldots, d\overline{z_n}$ вместо $dx_1, \ldots, dx_n, dy_1, \ldots, dy_n$ като базис на пространството $A^1(U)$ на гладките диференциални 1-форми над пръстена на гладките функции $U \to \mathbb{R}$. За произволно естествено $1 \leq k \leq n = \dim_{\mathbb{R}} M$ можем да зададем гладките диференциални $k$-форми $\omega \in A^k(U)$ във вида

$$\omega = \sum_{|I|+|J|=k} \varphi_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z_J}$$

за растящи подмножества $I = \{i_1, \ldots, i_p\}, J = \{j_1, \ldots, j_q\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$, $p + q = k$, $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$, $1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$ и гладки функции $\varphi_{I,J} : U \to \mathbb{R}$. Казваме, че диференциална форма $\omega \in A^k(M)$ е от тип $(p, q)$, ако може да се запише локално като сума

$$\omega = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} \varphi_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z_J}.$$

Означаваме с $A^{p,q}(M)$ пространството на гладките диференциални форми върху $M$ от тип $(p, q)$.

Задача 6.6. *Нека $z_1, \ldots, z_n$ и $u_1, \ldots, u_n$ са локални холоморфни координати върху отворено подмножество $U$ на $n$-мерно многообразие $M$. Да се докаже, че*

$$\omega = \sum_{|I|=p} \sum_{|J|=q} \varphi_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z_J}$$

*е диференциална форма върху $U$ от тип $(p, q)$ спрямо холоморфните координати $z_1, \ldots, z_n$ тогава и само тогава, когато*

$$\omega = \sum_{|K|=p} \sum_{|L|=q} \psi_{K,L} du_K \wedge d\overline{u_L}$$

*е диференциална форма върху $U$ от тип $(p, q)$ спрямо холоморфните координати $u_1, \ldots, u_n$.*

Разлагаме външната производна $d = \partial + \overline{\partial}$ в сума на операторите

$$\partial : A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{p+1,q}(M),$$

$$\partial \left( \sum_{I,J} \varphi_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z_J} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I,J} \frac{\partial \varphi_{I,J}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_I \wedge d\overline{z_J}$$

и

$$\overline{\partial} : A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{p,q+1}(M),$$

$$\overline{\partial} \left( \sum_{I,J} \varphi_{I,J} dz_I \wedge d\overline{z_J} \right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{I,J} \frac{\partial \varphi_{I,J}}{\partial \overline{z_k}} d\overline{z_k} \wedge dz_I \wedge d\overline{z_J},$$

зададени по посочения начин спрямо локални холоморфни координати $z_1, \ldots, z_n$.

Задача 6.7. *В горните означения да се докаже, че*

$$\overline{\partial} \circ \overline{\partial} \equiv \mathbb{O} : A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{p,q+2}(M)$$

*е тъждествено нулевият оператор.*

Ако
$$Z^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) := \ker[\overline{\partial} : A^{p,q}(M) \longrightarrow A^{p,q+1}(M)]$$
и
$$B^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) := \mathrm{im}[\overline{\partial} : A^{p,q-1}(M) \longrightarrow A^{p,q}(M)],$$
то $B^{p,q}_{\overline{\partial}}(M) \subseteq Z^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$, съгласно $\overline{\partial} \circ \overline{\partial} \equiv \mathbb{O}$ и фактор-порстранствата
$$H^{p,q}(M) := Z^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)/B^{p,q}_{\overline{\partial}}(M)$$
се наричат кохомологии на Dolbeault. В частност,
$$H^{p,0}(M) = \left\{ \omega \in A^{p,0}(M) \ \Big| \omega = \sum_{|I|=p} f_I dz_I, \quad \forall \overline{\partial} f_I = 0 \right\}$$
е пространството на холоморфните $p$-форми, т.е. на крайните линейни комбинации на $dz_I$, $|I| = p$ с холоморфни коефициенти $f_I$.

## 4. $\overline{\partial}$-лема на Poincare

$\overline{\partial}$-лемата на Poincare гласи, че всяка $\overline{\partial}$-затворена диференциална форма е $\overline{\partial}$-точна. За да докажем това твърдение ще напомним, че носителят на холоморфна функция $f : U \to \mathbb{C}$ върху отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{C}^n$ е затворената обвивка $\mathrm{Supp}(f) := \overline{\{a \in U \ \mid \ f(a) \neq 0\}}$ на множеството на точките $a \in U$, в които $f$ има ненулева стойност. Първо ще докажем една интегрална формула за гладка функция на една комплексна променлива, а после ще изведем от нея $\overline{\partial}$-лемата на Poincare.

Лема 6.8. *Нека $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ е гладка функция с компактен носител $\mathrm{Supp}(g) \subset \mathbb{C}$. Тогава интегралът*
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{g(w)}{w - z} dw \wedge d\overline{w} \tag{6.4}$$
*е сходящ за $\forall z \in \mathbb{C}$ и задава гладка функция $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ с компактен носител $\mathrm{Supp}(f) \subset \mathbb{C}$ и с*
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z) = g(z).$$

**Доказателство:** Ще започнем с едно обобщение на формулата на Cauchy. Ако $f : U \to \mathbb{C}$ е гладка функция в околност $U$ на затворен диск
$$\overline{\Delta(z, R)} = \{a \in \mathbb{C} \ \ |a - z| \leq R\},$$
твърдим, че
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(z,R)} \frac{f(w)}{w - z} dw + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta(z,R)} \frac{\partial f}{\partial \overline{w}}(w) \frac{dw \wedge d\overline{w}}{w - z}. \tag{6.5}$$
За целта избираме реално положително $\varepsilon < R$ и прилагаме Теоремата на Stokes
$$\int_{\partial(\Delta(z,R) \setminus \Delta(z,\varepsilon))} \alpha = \int_{\partial \Delta(z,R)} \alpha - \int_{\partial \Delta(z,\varepsilon)} \alpha$$
към
$$\alpha = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$
По този начин получаваме
$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta(z,R) \setminus \Delta(z,\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial \overline{w}} \frac{dw \wedge d\overline{w}}{w - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(z,R)} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(z,\varepsilon)} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$
Полагаме $w = z + re^{i\theta}$ и пресмятаме, че
$$dw \wedge d\overline{w} = (ire^{i\theta} d\theta + e^{i\theta} dr) \wedge (-ire^{-i\theta} d\theta \wedge e^{-i\theta} dr) = 2ird\theta \wedge dr.$$

Това дава възможност да изведем равенството

$$-\frac{1}{\pi}\int_{\Delta(z,R)\setminus\Delta(z,\varepsilon)}\frac{\partial f}{\partial\overline{w}}(z+re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta\wedge dr=\int_0^{2\pi}f(z+Re^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}-\int_0^{2\pi}f(z+\varepsilon e^{i\theta})\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Подинтегралната функция $f(z+\varepsilon e^{i\theta})$ е непрекъсната относно $\varepsilon$ и при граничен преход $\varepsilon\to 0$ следва (6.5).

За да довършим доказателството на лемата преминаваме отново към полярни координати $w=z+re^{i\theta}$ и записваме (6.4) във вида

$$f(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}g(z+re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta\wedge dr.$$

Поради компактността на носителя $\operatorname{Supp}(g)$ на $g$, функцията $f$ е коректно определена и гладка върху $\mathbb{C}$. Разменяйки реда на диференцирането и интегрирането получаваме

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial g}{\partial\overline{z}}(z+re^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta\wedge dr.$$

Връщаме се към променливата $w=z+re^{i\theta}$ и използвайки

$$\frac{\partial g}{\partial\overline{z}}(w)=\frac{\partial\overline{w}}{\partial\overline{z}}\frac{\partial g}{\partial\overline{w}}(w)=\frac{\partial g}{\partial\overline{w}}(w)$$

извеждаме, че

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial g}{\partial\overline{w}}(w)\frac{dw\wedge d\overline{w}}{w-z}. \tag{6.6}$$

За достатъчно голямо $R\in\mathbb{R}^{>0}$ имаме $\operatorname{Supp}(g)\subset\Delta(z,R)$, откъдето

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(z,R)}\frac{g(w)}{w-z}dw=0$$

и

$$g(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta(z,R)}\frac{\partial g}{\partial\overline{w}}(w)\frac{dw\wedge d\overline{w}}{w-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial g}{\partial\overline{w}}(w)\frac{dw\wedge d\overline{w}}{w-z},$$

съгласно (6.5). Комбинирайки с (6.6) получаваме, че

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}}(z)=g(z),$$

Q.E.D.

С помощта на Лема 6.5 ще докажем следното

Твърдение 6.9. ($\overline{\partial}$-лема на Poincare) *Нека $D\subseteq\mathbb{C}^n$ е отворено подмножество, а $\omega\in A^{p,q+1}(D)$ е $\overline{\partial}$-затворена $(p,q+1)$-форма за някое $q\geq 0$. Тогава за всяко отворено подмножество $U\subset D$ с компактна затворена обвивка $\overline{U}\subset D$ съществува $(p,q)$-форма $\psi\in A^{p,q}(U)$ с $\overline{\partial}\psi=\omega$ върху $U$.*

**Доказателство:** С индукция по $1\leq k\leq n$ ще докажем твърдението за диференциалните форме $\omega\in A^{p,q+1}(D)$, които не зависят от $d\overline{z_{k+1}},\dots,d\overline{z_n}$.

Ако $k=1$, то $\omega=\sum\limits_{|I|=p}\omega_I dz_I\wedge d\overline{z_1}$ и тъждественото анулиране

$$0=\overline{\partial}\omega=\sum_{j=2}^n\frac{\partial\omega_I}{d\overline{z_j}}d\overline{z_j}\wedge dz_I\wedge d\overline{z_1}$$

върху $D$ изисква холоморфността на функциите $\omega_I$ относно $z_2,\dots,z_n$. За произволно фиксирано отворено подмножество $U\subset D$ с компактна затворена обвивка $\overline{U}\subset D$ избираме гладка функция $\rho$ с компактен носител $\operatorname{Supp}(\rho)\subset D$, която взема стойност 1 върху отворено подмножество $V\subseteq D$, съдържащо $\overline{U}$.

Гладките функции $\omega_I(z_1,\dots,z_n)\rho(z_1)$ имат компактен носител, така че по Лема 6.8 функциите

$$\eta_I(z_1,\dots,z_n) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \omega_I(w,z_2,\dots,z_n)\frac{\rho(w)}{w-z_1}dw\wedge d\overline{w}$$

са гладки и

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial \overline{z_1}}(z_1,\dots,z_n) = \omega_I(z_1,\dots,z_n).$$

Чрез размяна на диференцирането и интегрирането получаваме

$$\frac{\partial \eta_I}{\partial \overline{z_j}}(z_1,\dots,z_n) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \omega_I}{\partial \overline{z_j}}(w,z_2,\dots,z_n)\frac{\rho(w)}{w-z_1}dw\wedge d\overline{w} = 0 \quad \text{за} \quad \forall 2\leq j\leq n.$$

Диференциалната форма $\eta := (-1)^p \sum\limits_{|I|=p}\eta_I dz_I$ изпълнява равенството

$$\overline{\partial}\eta = (-1)^p\sum_{j=1}^n\sum_{|I|=0}\frac{\partial \eta_I}{\partial \overline{z_j}}d\overline{z_j}\wedge dz_I = (-1)^p\sum_{|I|=p}\omega_I d\overline{z_1}\wedge z_I = \sum_{|I|=p}\omega_I dz_I\wedge\overline{z_1} = \omega.$$

Да допуснем, че твърдението е доказано за всички $\eta\in A^{p,q+1}(D)$, които не зависят от $d\overline{z_k}, d\overline{z_{k+1}}\dots d\overline{z_n}$ и $\omega\in A^{p,q+1}(D)$ не зависи от $d\overline{z_{k+1}},\dots,d\overline{z_n}$. Представяме

$$\omega = d\overline{z_k}\wedge\alpha+\beta$$

чрез диференциални форми $\alpha\in A^{p,q}(D)$ и $\beta\in A^{p,q+1}(D)$, които не зависят от $d\overline{z_k}, d\overline{z_{k+1}},\dots,d\overline{z_n}$. Ако $\alpha = \sum\limits_{|I|=p}\sum\limits_{|J|=q}\alpha_{I,J}dz_I\wedge d\overline{z_J}$, то съгласно $\overline{\partial}\omega = 0$ имаме

$$\frac{\partial \alpha_{I,J}}{\partial\overline{z_j}} = 0 \quad \text{за} \quad \forall j>k,$$

защото събираемите на $\overline{\partial}\beta$ не могат да са кратни на $d\overline{z_j}\wedge d\overline{z_k}$.
Както в доказателството на случая $k=1$, за произволно фиксирано отворено подмножество $U\subset D$ с компактна затворена обвивка $\overline{U}\subset D$ избираме гладка функция $\rho$ с компактен носител $\mathrm{Supp}(\rho)\subset D$, която взема стойност 1 върху отворено подмножество $V\subseteq D$, съдържащо $\overline{U}$. Образуваме гладките функции

$$\varphi_{I,J}(z_1,\dots,z_n) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\alpha_{I,J}(z_1,\dots,z_{k-1},w,z_{k+1},\dots,z_n)\frac{\rho(w)}{w-z_k}dw\wedge d\overline{w}$$

за $I\subseteq\{1,\dots,n\}$ с $|I|=p$ и $J\subseteq\{1,\dots,k-1\}$ с $|J|=q$. Ясно е, че

$$\frac{\partial\varphi_{I,J}}{\partial\overline{z_j}} = 0 \quad \text{за} \quad \forall j>k.$$

Съгласно Лема 6.8 имаме

$$\frac{\partial\varphi_{I,J}}{\partial\overline{z_k}}(z_1,\dots,z_n) = \alpha_{I,J}(z_1,\dots,z_n).$$

За гладката диференциална форма

$$\varphi(z_1,\dots,z_n) := \sum_{|I|=p}\sum_{J\subseteq\{1,\dots,k-1\},|J|=q}\varphi_{I,J}(z_1,\dots,z_n)dz_I\wedge d\overline{z_J}$$

представяме

$$\overline{\partial}\varphi = \sum_{s=1}^k\sum_{|I|=p}\sum_{J\subseteq\{1,\dots,k-1\},|J|=q}\frac{\partial\varphi_{I,J}}{\partial\overline{z_s}}d\overline{z_s}\wedge dz_I\wedge d\overline{z_J} =$$

$$\varphi_o + \sum_{|I|=p}\sum_{J\subseteq\{1,\dots,k-1\},|J|=q}\alpha_{I,J}d\overline{z_k}\wedge dz_I\wedge d\overline{z_J} = \varphi_o + d\overline{z_k}\wedge\alpha$$

върху $V$ като сума на $d\overline{z_k} \wedge \alpha$ и гладка диференциална $(p, q+1)$-форма $\varphi_o$, не зависеща от $d\overline{z_k}, d\overline{z_{k+1}}, \ldots, d\overline{z_n}$. Следователно

$$\omega - \overline{\partial}\varphi = \beta - \varphi_o$$

не зависи от $d\overline{z_k}, d\overline{z_{k+1}}, \ldots, d\overline{z_n}$ върху $V$. Непосредствено се вижда, че $\omega - \overline{\partial}\varphi$ е $\overline{\partial}$-затворена. По индукционно предположение съществува гладка $(p, q)$-форма $\psi' \in A^{p,q}(U)$, така че $\omega - \overline{\partial}\varphi = \overline{\partial}\psi'$. Следователно

$$\psi := \varphi + \psi' \in A^{p,q}(U)$$

изпълнява равенството $\overline{\partial}\psi = \omega$.
Случаят $k = n$ доказва $\overline{\partial}$-лемата на Poincare, Q.E.D.
Нека $\{r_m\}_{m=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^{>0}$ е строго растяща редица от положителни реални числа. За произволна точка $a \in \mathbb{C}$ полагаме $\Delta(a, \infty) := \cup_{m=1}^{\infty} \Delta(a, r_m)$ да е строго растящото обединение на дискове. За произволни

$$r = (r_1, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^{>0} \cup \{\infty\})^n \quad \text{и} \quad a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$$

ще казваме, че

$$\Delta_n(a, r) := \prod_{i=1}^{n} \Delta(a_i, r_i)$$

е обобщен полидиск. Горните разглеждания доказват следното

Твърдение 6.10. *Ако* $D = \Delta_n(a, r) = \prod_{i=1}^{n} \Delta(a_i, r_i)$ *е обобщен полидиск, то кохомологичните групи* $H^{p,q}(D) = 0$ *се анулират за всички* $q \geq 1$.