Глава 5

Холоморфно допирателно разслоение и комплексни подмногообразия на комплексно многообразие

1. Реално допирателно разслоение на гладко многообразие

Най-естествен пример за векторно разслоение над многообразие е неговото допирателно разслоение. Нека M е свързано гладко многообразие с размерност n. За всяка точка $p \in M$ съществуват отворена околност U на p върху M, отворена околност D на 0^n върху $\mathbb{R}^n$, и бихоломорфно изображение $f : U \to D$ с $f(p) = 0^n$. Композициите $x_i \circ f : U \to D$ с координатните функции $x_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$ са гладки функции, задаващи локална координатна система върху U. С известна неточност, бележим $x_i \circ f$ с x_i и разглеждаме x_i като гладки функции върху U с $x_i(p) = 0$ за $\forall 1 \leq i \leq n$.
Векторните полета $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ са диференцирания $\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{A}(D) \to \mathcal{A}(D)$ на пръстена $\mathcal{A}(D)$ на гладките функции $D \to \mathbb{R}$. Техните композиции с $f : U \to D$ могат да се разглеждат като гладки векторни полета върху $U \subseteq M$ или като диференцирания на пръстена $\mathcal{A}_M(U)$ на гладките функции $U \to \mathbb{R}$. По-точно, определяме

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\psi := \frac{\partial(\psi \circ f^{-1})}{\partial x_j} \circ f \quad \text{за} \quad \forall \psi \in \mathcal{A}_M(U).$$

Стойностите на векторните полета $\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ в точката $p \in U$ образуват $\mathbb{R}$-базис на реалното допирателно пространство

$$T_p^{\mathbb{R}} M := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right)$$

към M в p. Допирателното разслоение

$$T^{\mathbb{R}} M := \cup_{p \in M} T_p^{\mathbb{R}} M$$

е гладкото векторно разслоение над M със слоеве $T_p^{\mathbb{R}} M$. Гладките сечения на $T^{\mathbb{R}} M$ се наричат гладки векторни полета. За да намерим функции на прехода на $T^{\mathbb{R}} M$ ще проследим трансформацията на гладките векторни полета при смяна на координатите. Нека $f : U \to D \subseteq \mathbb{R}^n$ и $g : U \to E \subseteq \mathbb{R}^n$ са две карти върху M с една и съща дефиниционна област U. Означаваме с $x_1, \ldots, x_n$ координатите върху D, а с $y_1, \ldots, y_n$ - координатите върху E. Разглеждаме дифеоморфизма $h = f \circ g^{-1} = (h_1, \ldots, h_n) : E \to D$, сравняващ двете карти. Произволно гладко векторно поле

$$v : U \longrightarrow T^{\mathbb{R}} M|_U = \cup_{p \in U} T_p^{\mathbb{R}} M$$

може да се разглежда като векторно поле $v = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k(x) \frac{\partial}{\partial y_k}$ върху E. Гладките функции $\psi : D \to \mathbb{R}$ изпълняват тъждеството $\psi(x) = \psi(h(y))$ и векторните полета $\frac{\partial}{\partial y_k}$ действат върху тях по правилото

$$\frac{\partial}{\partial y_k}\psi = \frac{\partial(\psi \circ h)}{\partial y_k} \circ h^{-1} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial h_j}{\partial y_k} \circ h^{-1} \right) \frac{\partial \psi}{\partial x_j}.$$

Това означава, че като векторно поле върху D можем да представим

$$\frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial y_k}(h^{-1}(x)) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Сравнявайки представянията

$$v = \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \frac{\partial}{\partial y_k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial y_k}(h^{-1}(x)).b_k(h^{-1}(x)) \frac{\partial}{\partial x_j} =$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial y_k}(h^{-1}(x)).b_k(h^{-1}(x)) \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

и

$$v = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

на v получаваме, че

$$a_j(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial y_k}(h^{-1}(x)).b_k(h^-1(x)).$$

Вземайки предвид $h^{-1} = h \circ f^{-1}$, представяме

$$a_j \circ f = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial h_j}{\partial y_k} \circ g \right).(b_k \circ g)$$

и стигаме до извода, че функцията на прехода на $T^{\mathbb{R}}M$ от картата $f : U \to D$ към картата $g : U \to E$ е

$$J^{\mathbb{R}}(h) \circ g = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial h_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \circ g : U \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}).$$

Това дава следното еквивалентно определение за допирателно разслоение $T^{\mathbb{R}}M$ на гладко многообразие:

Определение 5.1. *Нека M е свързано гладко n-мерно многообразие с координатни карти $f_\alpha : U_\alpha \to D_\alpha$ върху отворени подмножества $D_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ с координати $x_\alpha = (x_{\alpha,1}, \dots, x_{\alpha,n})$, а $h_{\alpha,\beta} = f_\alpha \circ f_\beta^{-1} : f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ са функциите на прехода на разглеждания атлас. Гладкото векторно разслоение $T^{\mathbb{R}}M$ от ранг n с функции на прехода*

$$g_{\alpha,\beta} = J^{\mathbb{R}}(h_{\alpha,\beta}) \circ f_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (h_{\alpha,\beta})_1}{\partial x_{\beta,1}} & \dots & \frac{\partial (h_{\alpha,\beta})_1}{\partial x_{\beta,n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial (h_{\alpha,\beta})_n}{\partial x_{\beta,1}} & \dots & \frac{\partial (h_{\alpha,\beta})_n}{\partial x_{\beta,n}} \end{pmatrix} \circ f_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$$

се нарича реално допирателно разслоение на M.

2. Холоморфно допирателно разслоение на комплексно многообразие

Нека M е комплексно многообразие, а $p \in M$ е точка. Тогава съществува бихоломорфно изображение $f : U \to D$ на отворена околност $U \subset M$ на p върху отворена околност $D \subseteq \mathbb{C}^n$ на 0^n с $f(p) = 0^n$, задаващо холоморфни координати $z_1, \ldots, z_n \in \mathcal{O}_M(U)$ с център p. Представяме $z_j = x_j + iy_j$ чрез гладки функции $x_j : U \to \mathbb{R}$, $y_j : U \to \mathbb{R}$. Тогава

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

е дифеоморфизъм на U върху отворено подмножество на $\mathbb{R}^{2n}$. По този начин можем да разглеждаме n-мерното комплексно многообразие M като гладко $(2n)$-мерно реално многообразие. Реалното допирателно пространство към M в $p \in M$ е

$$T_p^{\mathbb{R}} M := \mathrm{Span}_{\mathbb{R}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)_p \right).$$

Комплексификацията

$$T_p^{\mathbb{C}} M := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)_p \right)$$

на $T_p^{\mathbb{R}} M$ се нарича комплексифицирано допирателно пространство към M в p. Векторните полета

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right)$$

задават друг базис

$$\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial z_n} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_n}} \right)_p$$

на $T_p^{\mathbb{C}} M$. Подпространството

$$T'_p M := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial z_n} \right)_p \right)$$

на $T_p^{\mathbb{C}} M$ се нарича холоморфно допирателно пространство към M в p, а

$$T''_p M := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \left(\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_n}} \right)_p \right)$$

се нарича анти-холоморфно допирателно пространство към M в $p \in M$. Понеже $\left(\frac{\partial}{\partial z_1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial z_n} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_1}} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_n}} \right)_p$ е базис на $T_p^{\mathbb{C}} M$, комплексифицираното допирателно пространство

$$T_p^{\mathbb{C}} M = T'_p M \oplus T''_p M$$

е директна сума на холоморфното допирателно пространство и анти-холоморфното допирателно пространство. Комплексното спрягане трансформила $\left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)_p$ в $\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z_j}} \right)_p$ и изобразява $T'_p M$ върху $T''_p M$, а $T''_p M$ върху $T'_p M$. Изображението

$$T_p^{\mathbb{R}} M \hookrightarrow T_p^{\mathbb{C}} M \longrightarrow T'_p M,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)_p, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p \mapsto i \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \right)_p$$

е изоморфизъм на линейни пространства над $\mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.2. *Холоморфното векторно разслоение* $T'M = \cup_{p \in M} T'_p M$, *чиито слоеве са холоморфните допирателни пространства* $T'_p M$ *към* M *в* $p \in M$ *се нарича холоморфно допирателно разслоение на* M.

За да опишем функциите на прехода на $T'M$, покриваме M с холоморфни координатни карти $f_\alpha : U_\alpha \to D_\alpha$ за подходящи отворени подмножества $0^n \in D_\alpha \subseteq \mathbb{C}^n$. Ако

$$h_{\alpha,\beta} = f_\alpha \circ f_\beta^{-1} : f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow f_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

са функциите на прехода между тези карти, то диференциалът

$$J(h_{\alpha,\beta}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial (g_{\alpha,\beta})_1}{\partial x_{\beta,1}} & \dots & \frac{\partial (h_{\alpha,\beta})_1}{\partial x_{\beta,n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial (h_{\alpha,\beta})_n}{\partial x_{\beta,1}} & \dots & \frac{\partial (h_{\alpha,\beta})_n}{\partial x_{\beta,n}} \end{pmatrix} : f_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

е холоморфно изображение и функциите на прехода на $T'M$ са

$$g_{\alpha,\beta} = J(h_{\alpha,\beta}) \circ f_\beta.$$

Непосредствено се проверява, че

$$g_{\alpha,\beta}.g_{\beta,\gamma} = (J(h_{\alpha,\beta}) \circ f_\beta).(J(h_{\beta,\gamma}) \circ f_\gamma) = [(J(h_{\alpha,\beta}) \circ h_{\beta,\gamma}).J(h_{\beta,\gamma})] \circ f_\gamma = \\ J(h_{\alpha,\beta} \circ h_{\beta,\gamma}) \circ f_\gamma = J(h_{\alpha,\gamma}) \circ f_\gamma = g_{\alpha,\gamma},$$

така че $g_{\alpha,\beta}$ са функции на прехода на холоморфното векторно разслоение $\pi : T'M \to M$ с ранг n. Сеченията $\sum_{j=1}^{n} a_j(z) \frac{\partial}{\partial z_j}$ на $\pi : T'M \to M$ са холоморфните векторни полета.

ЗАДАЧА 5.3. *Нека* $f_{i,j}$ *са функциите на прехода на холоморфното допирателно разслоение* $T'\mathbb{P}^n$ *на* $\mathbb{P}^n$ *спрямо стандартното афинно покритие* $\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n U_i$ *с* $U_i = \{[a] \in \mathbb{P}^n \mid a_i \neq 0\}$, *а* $g_{i,j}$ *са функциите на прехода на универсалното разслоение* $q : \mathrm{Bl}_{0^{n+1}} \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{P}^n$ *спрямо същото покритие. Да се докаже, че*

$$\det f_{0,1} = -g_{0,1}^{-(n+1)}.$$

ЗАДАЧА 5.4. *Нека* M *е* n*-мерно комплексно многообразие с холоморфни карти* $f_\alpha : U_\alpha \to D_\alpha \subseteq \mathbb{C}^n$ *и функции на прехода* $h_{\alpha,\beta} = f_\alpha \circ f_\beta^{-1}$. *Да се докаже, че функциите на прехода на анти-холоморфното разслоение* $T''M \to M$ *на* M *са*

$$G_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (\overline{h_{\alpha,\beta}})_1}{\partial \overline{z_1}} & \dots & \frac{\partial (\overline{h_{\alpha,\beta}})_1}{\partial \overline{z_n}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial (\overline{h_{\alpha,\beta}})_n}{\partial \overline{z_1}} & \dots & \frac{\partial (\overline{h_{\alpha,\beta}})_n}{\partial \overline{z_n}} \end{pmatrix} \circ \overline{f_\beta}.$$

ЗАДАЧА 5.5. *Нека* M *е* n*-мерно комплексно многообразие с функции на прехода* $g_{\alpha,\beta}$ *на холоморфното допирателно разслоение* $T'M \to M$ *и функции на прехода* $G_{\alpha,\beta}$ *на анти-холоморфното допирателно разслоение* $T''M \to M$. *Да се докаже, че*

$$\begin{pmatrix} g_{\alpha,\beta} & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & G_{\alpha,\beta} \end{pmatrix}$$

са функции на прехода на комплексифицираното допирателно разслоение

$$T^{\mathbb{C}} M \longrightarrow M.$$

3. Комплексни подмногообразия

Нека $(X, \mathcal{O}_X)$ е геометрично пространство. Тогава произволно подмножество $Z \subseteq X$ има естествена структура на геометрично пространство. Разглеждаме индуцираната от X топология върху Z, чиито отворени подмножества са сеченията $Z \cap U$ на Z с отворените подмножества $U \subseteq X$. Функциите от геометричната структура $\mathcal{O}_X|_Z$ са онези непрекъснати функции $f : Z \cap U \to \mathbb{C}$, за които $\forall a \in Z$ има отворена околност $a \in U_a \subseteq X$ и функция $f_a \in \mathcal{O}_X(U_a)$ с $f(z) = f_a(z)$ за $\forall z \in Z \cap U \cap U_a$. Твърдим, че споменатите функции задават геометрична структура върху Z. По-точно, постоянните функции върху Z принадлежат на $\mathcal{O}_X|_Z$. Ако $V \subseteq U$ са отворени подмножества на X и $f \in \mathcal{O}_X|_Z(Z \cap U)$, то $f|_{Z\cap V} \in \mathcal{O}_X|_Z(Z \cap V)$. Произволна фамилия $f_i \in \mathcal{O}_X|_Z(Z \cap U_i)$, $i \in I$ от съгласувани функции $f_i|_{Z\cap U_i \cap U_j} = f_j|_{Z \cap U_i \cap U_j}$ задава еднозначно определена функция $f \in \mathcal{O}_X|_Z(\cup_{i\in I} U_i)$ с $f|_{Z\cap U_i} = f_i$.
В случая на комплексно многообразие X търсим достатъчни условия, при които $(Z, \mathcal{O}_X|_Z)$ също е комплексно многообразие. Като пример да разгледаме влагането $\varphi : \mathbb{C}^k \hookrightarrow \mathbb{C}^n$, $\varphi(z_1, \ldots, z_k) = (z_1, \ldots, z_k, 0, \ldots 0)$. Холоморфните функции $f : V \to \mathbb{C}$ върху отворени подмножества $V \subseteq \mathbb{C}^k$ принадлежат на $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}|_{\mathbb{C}^k}(V)$, защото се продължават до холоморфни функции върху $V \times \mathbb{C}^{n-k}$. По този начин, геометричните структури $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}|_{\mathbb{C}^k} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^k}$ съвпадат.

Определение 5.6. *Подмножество Z на комплексно многообразие $(X, \mathcal{O}_X)$ е комплексно подмногообразие, ако за всяка точка $a \in Z$ съществува координатна карта $\Phi : U \to D \subseteq \mathbb{C}^n$, така че $\Phi(U \cap Z)$ е сечението на D с комплексно подпространство на $\mathbb{C}^n$.*

Комплексните подмногообразия са комплексни многообразия, защото локалните карти $\Phi : U \to D \subseteq \mathbb{C}^n$ върху X се ограничават до локални карти $\Phi : Z \cap U \to D \cap \mathbb{C}^k \subseteq \mathbb{C}^k$ върху Z.
Холоморфните изображения $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$, чийто диференциал има постоянен ранг задават комплексни подмногообразия

$$f^{-1}(b) = \{z \in \mathbb{C}^n \ \ | \ \ f(z) = b\} \subset \mathbb{C}^n.$$

Този факт е известен като Теорема за комплексните подмногообразия.
Нека $f : M \to N$ е холоморфно изображение на комплексни многообразия. Тогава f е непрекъснато и за произволно отворено подмножество $U \subseteq N$ и холоморфна функция $g \in \mathcal{O}_N(U)$ върху U издърпването $f^*(g) = g \circ f \in \mathcal{O}_M(f^{-1}(U))$ е холоморфна функция върху праобраза $f^{-1}(U)$ на U под действие на f.
Фиксираме точка $p \in M$, холоморфни координати $z_1, \ldots, z_n$ с център p и холоморфни координати $w_1, \ldots, w_m$ с център $q = f(p)$. Относно тези координати представяме $f = (f_1, \ldots, f_m)$ като наредена m-торка холоморфни функции $w_k = f_k(z_1, \ldots, z_n)$, $1 \leq k \leq m$ в околност на 0^n върху $\mathbb{C}^n$. В частност, всяко f_k е гладка функция и $f : M \to N$ е гладко изображение. Следователно f индуцира линейно изображение

$$(df)_p : T_p^{\mathbb{R}} M \longrightarrow T_{f(p)}^{\mathbb{R}} N$$

на реалните допирателни пространства, а оттам и на комплексифицираните допирателни пространства. По правилото за диференциране на композиция имаме

$$(df)_p \frac{\partial}{\partial z_j} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial w_k}, \tag{5.1}$$

съгласно холоморфността на функциите $f_k : M \to \mathbb{C}$. Следователно, $(df)_p$ изобразява холоморфното допирателно порстранство T'_pM в холоморфното допирателно пространство $T'_{f(p)}N$. Непосредствено се проверява, че гладко изображение $f : M \to N$ на комплексни многообразия е холоморфно, ако изобразява холоморфното допирателно разслоение $T'M$ на M в холоморфното допирателно разслоение $T'N$ на N.
Ако $f : M \to N$ е холоморфно изображение на n-мерно комплексно многообразие M в m-мерно комлексно многообразие N, полагаме

$$J(f) = \frac{\partial f}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

и разглеждаме матрицата

$$J_{\mathbb{C}}(f) := \frac{\partial(f, \overline{f})}{\partial(z, \overline{z})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} & \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z_1}} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \overline{z_n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} & \frac{\partial f_m}{\partial \overline{z_1}} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial \overline{z_n}} \\ \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial z_n} & \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial \overline{z_1}} & \dots & \frac{\partial \overline{f_1}}{\partial \overline{z_n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \overline{f_m}}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial \overline{f_m}}{\partial z_n} & \frac{\partial \overline{f_m}}{\partial \overline{z_1}} & \dots & \frac{\partial \overline{f_m}}{\partial \overline{z_n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J(f) & 0_{m\times n} \\ 0_{m\times n} & \overline{J(f)} \end{pmatrix}$$

с $2m$ реда и $2n$ стълба. В случая $m = n$ имаме $\det J_{\mathbb{C}}(f) = |\det J(f)|^2$. Това позволява извеждането на следващата теорема за комплексните подмногообразия от съответния гладък вариант. Понеже Теорема 9 за неявното изображение е вече доказана в тема 3 над комплексните числа, ще дадем директно доказателство на следната

Теорема 10. (Теорема за комплексните подмногообразия) *Нека $f : M \to N$ е холоморфно изображение на комплексни многообразия, чийто диференциал*

$$(df)_p : T'_pM \longrightarrow T'_{f(p)}N$$

има постоянен ранг r във всяка отчка $p \in M$. Тогава праобразът

$$f^{-1}(q) = \{p \in M \quad | \quad f(p) = q\}$$

на точка $q \in N$ е или празното множество, или комплексно подмногообразие на M. Още повече, ако $f(p) = q$, то $\dim_p f^{-1}(q) = \dim_p M - r$.

Доказателство: Нека $p \in M$ и $f(p) = q$. Избираме локални холоморфни координати върху M с център p и локални холоморфни координати върху N с център q, за да сведем до случая на отворена околност $D \subseteq \mathbb{C}^n$ на 0^n и холоморфно изображение $f = (f_1, \dots, f_m) : D \to \mathbb{C}^m$ с $f(0^n) = 0^m$ и $\mathrm{rk} J(f)(a) = r$ за $\forall a \in D$. След евентуална линейна смяна на променливите и свиване на D можем да предполагаме, че квадратната матрица

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_r)}{\partial(z_1, \dots, z_r)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_r} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_r}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial z_r} \end{pmatrix}$$

е обратима във всяка точка на D. За да докажем теоремата е достатъчно да проверим, че в околност D на 0^n върху $\mathbb{C}^n$, подмножеството $f^{-1}(0^m) \subset D$ е комплексно подмногообразие с размерност $n - r$.
За целта разглеждаме холоморфното изображение

$$g = (f_1, \dots, f_r, z_{r+1}, \dots, z_n) : D \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

с Якобиева матрица

$$J(g) = \frac{\partial g}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(f_1,\dots,f_r)}{\partial(z_1,\dots,z_r)} & \frac{\partial(f_1,\dots,f_r)}{\partial(z_{r+1},\dots,z_n)} \\ & \\ 0_{(n-r)\times r} & E_{n-r} \end{pmatrix}$$

и холоморфното изображение

$$G : D \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

$$G(z,w) = g(z) - w$$

с Якобиева матрица $J(G) = \begin{pmatrix} J(g) & -E_n \end{pmatrix}$. Лявата половина $J(g)$ на $J(G)$ е неособена в началото $0^{2n} \in D \times \mathbb{C}^n$. По Теорема 9 за неявното изображение съществуват полидиск $\Delta_{2n}(0^{2n}, r) \subset \mathbb{C}^{2n}$ с $r = (r', r'')$ за $r', r'' \in (\mathbb{R}^{>0})^n$ и холоморфно изображение

$$\Phi : \Delta_n(0^n, r'') \longrightarrow \Delta_n(0^n, r'),$$

така че $\Phi(0^n) = 0^n$ и $g(z) = w$ за $(z,w) \in \Delta_{2n}(0^{2n}, r)$ тогава и само тогава, когато $z = \Phi(w)$. Това доказва, че $g : \Delta_n(0^n, r') \to \mathbb{C}^n$ е бихоломорфно изображение на $\Delta_n(0^n, r')$ върху околност на 0^n върху $\mathbb{C}^n$. След холоморфна смяна на координатите g, изображението f се заменя с $f \circ g^{-1}$. По този начин можем да предполагаме, че $f : D \to \mathbb{C}^m$ има вида

$$f(z) = (z_1, \dots, z_r, f_{r+1}(z), \dots, f_m(z)).$$

Твърдим, че функциите $f_{r+1}(z), \dots, f_m(z)$ зависят само от $z_1, \dots, z_r$. По-точно, Якобиевата матрица

$$J(f) = \begin{pmatrix} E_r & 0_{r\times(n-r)} \\ & \\ \frac{\partial(f_{r+1},\dots,f_m)}{\partial(z_1,\dots,z_r)} & \frac{\partial(f_{r+1},\dots,f_m)}{\partial(z_{r+1},\dots,z_n)} \end{pmatrix}$$

е от ранг r, така че

$$\frac{\partial(f_{r+1},\dots,f_m)}{\partial(z_{r+1},\dots,z_n)}(a) = 0_{(m-r)\times(n-r)}$$

във всяка точка $a \in D$ и $\frac{\partial f_j}{\partial z_k} \equiv 0$ за $\forall r < j \leq m$, $\forall r < k \leq n$. От

$$f(z) = f(z_1, \dots, z_r) = (z_1, \dots, z_r, f_{r+1}(z_1, \dots, z_r), \dots, f_m(z_1, \dots, z_r))$$

следва, че $f^{-1}(0^m) = \{z \in D \mid z_1 = \ldots = z_r = 0\}$ е сечението на D с линейното подпространство на $\mathbb{C}^n$, зададено с уравненията $z_1 = \ldots = z_r = 0$. Следователно $f^{-1}(0^m) \subset D$ е комплексно подмногообразие на D с размерност $n - r$, Q.E.D.

Нека $f : D \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция върху отворено подмножество $D \subseteq \mathbb{C}^n$ с ненулев холоморфен градиент $\left(\frac{\partial f}{\partial z_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial z_n}(a)\right) \neq 0^n$ във всяка точка $a \in D$. Тогава $f^{-1}(f(a)) \subseteq D$ са $(n-1)$-мерни комплексни подмногообразия на D или хиперповърхнини в D.

4. Аналитични подпространства на комплексно многообразие

Подмножество Z на комплексно многообразие M е аналитично подпространство, ако за всяка точка $p \in M$ съществуват отворена околност $U \subset M$, съдържаща се в дефиниционната област U_α на локална координатна карта $\Phi_\alpha : U_\alpha \to D_\alpha \subset \mathbb{C}^n$ и холоморфни функции $g_1, \dots, g_m : D_\alpha \to \mathbb{C}$, така че $Z \cap U = \{q \in U \mid g_j \circ \Phi_\alpha(q) = 0, \ 1 \leq j \leq m\}$ е множеството на общите нули на холоморфните функции $g_j \circ \Phi_\alpha : U \to \mathbb{C}$. Съгласно Твърдение 3.5, произволна точка p на компелксно аналитично пространство Z на комлексно многообразие M има околност $p \in U_p \subseteq M$, така че $Z \cap U_p$ се разлага в обединение на краен брой неприводими компоненти. По Теорема 10, ако $z_1, \dots, z_n$ са локални холоморфни координати с център $p \in M$ и $Z \cap U = \{q \in U \mid f_1(q) = \dots = f_m(q) = 0\}$ е множеството на общите нули на холоморфни функции $f_j : U \to \mathbb{C}$ на отворена околност U на p върху M с $\mathrm{rk}\frac{\partial(f_1,\dots,f_m)}{\partial(z_1,\dots,z_n)}(q) = r$ за $\forall q \in U$, то $Z \cap U$ е комплексно подмногообразие на M с размерност $\dim_p M - r = n - r$.

Задача 5.7. *(i) Нека $z = (z_1, \dots, z_n)$ са холоморфни координати върху отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{C}^n$ и $w(z) = (w_1(z), \dots, w_n(z)) : U \to U$ е холоморфен автоморфизъм на U. Произволни холоморфни функции $f_j(w) = f_j(w_1, \dots, w_n)$, $1 \leq j \leq m$ могат да се разглеждат като холоморфни функции $g_j(z) := f_j(w_1(z), \dots, w_n(z))$ на $z = (z_1, \dots, z_n)$. Да се докаже, че*

$$\mathrm{rk}\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(w_1, \dots, w_n)}(w(a)) = \mathrm{rk}\frac{\partial(g_1, \dots, g_m)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}(a)$$

в произволна точка $a \in U$.
(ii) Нека $f_1, \dots, f_m : U \to \mathbb{C}$ са холоморфни функции върху отворено подмножество U на комплексно многообразие M, съдържащо се в дефиниционната област на координатна карта. Да се докаже, че рангът на Якобиевата матрица

$$\frac{\partial(f_1, \dots, f_m)}{\partial(z_1, \dots, z_n)}(a)$$

в $a \in U$ не зависи от избора на локални холоморфни координати върху U.

Задача 5.8. *Нека $f : M \to N$ е холоморфно изображение на комплексни многообразия. Да се докаже ,че:*
(i) допълнението $M \setminus Z$ на собствено комплексно аналитично подпространство $Z \subsetneq M$ е комплексно многообразие;
(ii) съществува собствено комплексно аналитично пространство $Z_o \subsetneq M$, така че за всяка точка $p \in M \setminus Z_o$ подмножеството $f^{-1}(f(p)) \subseteq M \setminus Z_o$ е комплексно многообразие.

Нека Z е комплексно аналитично подпространство на комплексно многообразие M, зададено в околност U на $p \in Z$ върху M с холоморфни уравнения $f_1 = \dots = f_m = 0$, т.е. $Z \cap U = \{q \in U \mid f_i(q) = 0, \ \ 1 \leq i \leq m\}$. Ако

$$\mathrm{rk}\frac{\partial f}{\partial z}(p) = \max_{q \in Z \cap U} \mathrm{rk}\frac{\partial f}{\partial z}(q),$$

то точката $p \in Z$ е гладка. Точките $p \in Z$, които не са гладки се наричат особени. Означаваме с Z^{smooth} множеството на гладките точки на Z, а с Z^{sing}-множеството на особените точки.

Задача 5.9. *Да се намерят гладките и особените точки на комплексно аналитичното подпространство $Z = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid z_1^2 + z_2^3 = 0\}$ на $\mathbb{C}^2$.*

Задача 5.10. *Нека Z е комплексно аналитично подпространство на комплексно многообразие M. Да се докаже ,че множеството Z^{sing} на особените точки на Z е собствено комплексно аналитично подпространство на Z.*