Глава 4

Раздуване на комплексно многообразие в точка. Векторни разслоения.

Нека M е комплексно многообразие с размерност $\dim_p M = n$ в точка $p \in M$. Раздуването на M в p заменя точката p с проективно пространство $\mathbb{P}^{n-1}$, параметризиращо направленията в M през p. В резултат се получава комплексно многообразие $\mathrm{Bl}_p M$.

1. Раздуване на $\mathbb{C}^n$ в началото

Всяка точка $z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$ определя единствена комплексна права L_z в $\mathbb{C}^n$ през началото. Задаваме раздуването на $\mathbb{C}^n$ в началото 0^n като множеството

$$\mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n := \{(z, L) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \ \mid \ z \quad \text{лежи на правата} \quad L \subset \mathbb{C}^n\}.$$

Проекцията $\pi : \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, $\pi(z, L) = z$ се ограничава до взаимно еднозначно изображение $\pi : \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \setminus \pi^{-1}(0^n) \to \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$. Праобразът $\pi^{-1}(0^n) = \mathbb{P}^{n-1}$ на началото се нарича изключително множество.

Лема 4.1. *Раздуването $\mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$ на $\mathbb{C}^n$ в $0^n \in \mathbb{C}^n$ е комплексно многообразие с размерност n и холоморфна проекция $\pi : \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$. Изключителното множество $\pi^{-1}(0^n) = \mathbb{P}^{n-1}$ е подмногообразие с размерност $n-1$.*

Доказателство: Твърдим, че

$$\mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n = \{(z, [a]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \ \mid \ z_i a_j = z_j a_i \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n\}. \tag{4.1}$$

Точка $z = (z_1, \dots, z_n) \neq 0^n$ лежи върху права L с хомогенни координати $[a] = [a_1 : a_2 : \dots : a_n] \in \mathbb{P}^{n-1}$ тогава и само тогава, когато съществува $\lambda \in \mathbb{C}^*$ с $z_i = \lambda a_i$ за $\forall 1 \leq i \leq n$. В такъв случай имаме $a_i z_j = a_i(\lambda a_j) = a_j(\lambda a_i) = a_j z_i$ за $\forall 1 \leq i, j \leq n$. Обратно, нека $z_i a_j = a_i z_j$ за $\forall 1 \leq i, j \leq n$ и някаква точка $(z, [a]) \neq (\mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}) \times \mathbb{P}^{n-1}$. Избираме индекс $1 \leq i_0 \leq n$ с $a_{i_0} \neq 0$ и забелязваме, че

$$z_j = \frac{a_j}{a_{i_0}} z_{i_0} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Допускането $z_{i_0} = 0$ води до анулиране на всички компоненти $z_1 = \ldots = z_n = 0$ на z. Това противоречи на избора на $z \neq 0^n$ и доказва, че $z_{i_0} \neq 0$, ако $a_{i_0} \neq 0$ и $z_i a_j = a_i z_j$ за $\forall 1 \leq i, j \leq n$. Оттук,

$$z_j = \frac{z_{i_0}}{a_{i_0}} a_j = \lambda a_j \quad \text{за} \quad \lambda := \frac{z_{i_0}}{a_{i_0}} \in \mathbb{C}^* \quad \text{и} \quad \forall 1 \leq j \leq n,$$

така че $z = (z_1, \dots, z_n)$ принадлежи на правата в $\mathbb{C}^n$ през 0^n с хомогенни координати $[a] = [a_1 : \dots : a_n]$. С това проверихме, че

$$\mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \setminus \pi^{-1}(0^n) = \{(z, [a]) \in (\mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}) \times \mathbb{P}^{n-1} \ \mid \ z_i a_j = z_j a_i \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Уравненията $z_i a_j = a_i z_j$ за $\forall 1 \leq i, j \leq n$ са изпълнени във всяка точка на $0^n \times \mathbb{P}^{n-1} = \pi^{-1}(0^n)$. Това доказва (4.1).
Нека

$$q : \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1},$$
$$q(z, [a]) = [a] \quad \text{за} \quad \forall (z, [a]) \in \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$$

е проекцията върху $\mathbb{P}^{n-1}$. Проективното пространство $\mathbb{P}^{n-1} = \cup_{i=1}^n U_i$ се покрива от стандартните афинни отворени подмножества

$$U_i = \{[a] = [a_1 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^{n-1} \quad | \quad a_i \neq 0\},$$

така че $\mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n = \cup_{i=1}^n q^{-1}U_i$ се покрива от отворените подмножества

$$q^{-1}U_i = \{(z,[a]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \quad | \quad a_i \neq 0, \quad z_j = z_i \frac{a_j}{a_i} \quad \text{за} \quad \forall j \neq i\}.$$

Тук използваме, че от $z_j = z_i \frac{a_j}{a_i}$ за $\forall j \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}$ следва

$$z_j a_k = \left(z_i \frac{a_j}{a_i}\right) a_k = \left(z_i \frac{a_k}{a_i}\right) a_j = z_k a_j \quad \text{за} \quad \forall j,k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{i\}.$$

Твърдим, че

$$f_i : q^{-1}U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

$$f_i(z,[a]) = \left(\frac{a_1}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, z_i, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right)$$

са координатни карти. Наистина, f_i са непрекъснати взаимно еднозначни изображения с непрекъснати обратни

$$f_i^{-1} : \mathbb{C}^n \longrightarrow q^{-1}U_i,$$

$$f_i^{-1}(b_1,\ldots,b_i,\ldots,b_n) = (z = b_i a, [a]) \quad \text{за} \quad a = (b_1,\ldots,b_{i-1},1,b_{i+1},\ldots b_n),$$

$\forall b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{C}^n$. Непосредствено се вижда, че

$$f_j(q^{-1}U_i \cap q^{-1}U_j) = \{b \in \mathbb{C}^n \quad | \quad b_i \neq 0\},$$

така че функциите на прехода

$$g_{ij} = f_i \circ f_j^{-1} : f_j(q^{-1}U_i \cap q^{-1}U_j) \longrightarrow f_i(q^{-1}U_i \cap q^{-1}U_j),$$

$$g_{ij}(b_1,\ldots,b_i,\ldots,b_j,\ldots,b_n) =$$

$$\left(\frac{b_1}{b_i}, \ldots, \frac{b_{i-1}}{b_i}, b_j b_i, \frac{b_{i+1}}{b_i}, \ldots, \frac{b_{j-1}}{b_i}, \frac{1}{b_i}, \frac{b_{j+1}}{b_i}, \ldots, \frac{b_n}{b_i}\right) \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i < j \leq n \quad \text{или}$$

$$g_{ij}(b_1,\ldots,b_j,\ldots,b_i,\ldots,b_n) =$$

$$\left(\frac{b_1}{b_i}, \ldots, \frac{b_{j-1}}{b_i}, \frac{1}{b_i}, \frac{b_{j+1}}{b_i}, \ldots, \frac{b_{i-1}}{b_i}, b_j b_i, \frac{b_{i+1}}{b_i}, \ldots, \frac{b_n}{b_i}\right) \quad \text{за} \quad 1 \leq j < i \leq n$$

са бихоломорфни. Следователно $\{(q^{-1}U_i, f_i)\}_{i=1}^n$ е холоморфен атлас върху $\mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$ и $\mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$ е комплексно многообразие съгласно Твърдение 3.12.
За холоморфността на $\pi : \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ пресмятаме в явен вид

$$\pi \circ f_i^{-1} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

$$\pi \circ f_i^{-1}(b_1,\ldots,b_n) = (b_i b_1, \ldots, b_i b_{i-1}, b_i, b_i b_{i+1}, \ldots, b_i b_n)$$

и се убеждаваме, че $\pi \circ f_i^{-1}$ са холоморфни изображения за $\forall 1 \leq i \leq n$.
Да забележим, че сеченията $\pi^{-1}(0^n) \cap q^{-1}U_i = \{(0^n,[a]) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \quad | \quad a_i \neq 0\}$ се изобразяват от координатните карти

$$f_i : \pi^{-1}(0^n) \cap q^{-1}U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

$$f_i(0^n,[a]) = \left(\frac{a_1}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, 0, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i}\right)$$

върху хиперравнините $H_i = \{b = (b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{C}^n \quad | \quad b_i = 0\} \simeq \mathbb{C}^{n-1}$. Интуитивно, това означава, че $\pi^{-1}(0^n)$ е комплексно подмногообразие на $\mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$ с размерност $n-1$. (Точното определение за комплексно подмногообразие ще бъде дадено в тема 5.) Q.E.D.
Следващата лема ни е необходима за установяване на коректността на определението за раздуване на комплексно многообразие M в точка p и по-точно,

за доказване на независимостта на това определение от избора на холоморфен атлас върху M.

Лема 4.2. *Нека $f = (f_1, \ldots, f_n) : M \to \mathbb{C}^n$ е холоморфно изображение на свързано комплексно многообразие M с образ $f(M) \neq \{0^n\}$. Ако във всяка точка $p \in f^{-1}(0^n)$ идеалът*

$$\langle f_1, \ldots, f_n \rangle_{\mathcal{O}_{M,p}} = \langle g_p \rangle_{\mathcal{O}_{M,p}}$$

на локалния пръстен $\mathcal{O}_{M,p}$ на p в M, породен от холоморфните компоненти $f_1, \ldots, f_n$ на f е главен, то съществува единствено холоморфно изображение $\widetilde{f} : M \to \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$, така че $f = \pi \circ \widetilde{f}$,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \arrow[d, "\pi"] \\ & \mathbb{C}^n \end{tikzcd} .$$

Доказателство: Проекцията $\pi : \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \setminus \pi^{-1}(0^n) \to \mathbb{C}^n \setminus \{0^n\}$ е бихоломорфна върху допълнението на изключителното множество и

$$\widetilde{f} = \pi^{-1} \circ f : M \setminus f^{-1}(0^n) \longrightarrow \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \setminus \pi^{-1}(0^n)$$

е коректно определено холоморфно изображение. Твърдим, че ако съществува продължение на $\widetilde{f}$ върху комплексно аналитичното подпространство $f^{-1}(0^n)$ на M, то $\widetilde{f} : M \to \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$ е еднозначно определено. По-точно, всяка точка $p \in f^{-1}(0^n)$ има свързана отворена околност $p \in U_p \subseteq M$ с координатна карта $\Phi : U_p \to V_{0^m}$ върху свързана отворена околност V_{0^m} на 0^m върху $\mathbb{C}^m$. Композицията $f \circ \Phi^{-1} : V_{0^m} \to \mathbb{C}^n$ е холоморфно изображение и $(f \circ \Phi^{-1})^{-1}(0^n) = \Phi(f^{-1}(0^n))$ е собствено комплексно аналитично подпространство на V_{0^m}. Тук използваме предположението $f^{-1}(0^n) \subsetneq M$, за да отхвърлим възможността $U_p = f^{-1}(0^n) \cap U_p$. Холоморфното изображение

$$\widetilde{f} \circ \Phi^{-1} = \pi^{-1} \circ f \circ \Phi^{-1} : V_{0^m} \setminus \Phi(f^{-1}(0^n)) \longrightarrow \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \setminus \pi^{-1}(0^n)$$

е еднозначно определено. Ако $\widetilde{f} : M \to \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$ и $\widehat{f} : M \to \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$ са две продължения на $\widetilde{f} : M \setminus f^{-1}(0^n) \to \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \setminus \pi^{-1}(0^n)$, то разликата им $\widetilde{f} - \widehat{f}$ се анулира върху $M \setminus f^{-1}(0^n)$, така че холоморфното изображение

$$(\widetilde{f} - \widehat{f}) \circ \Phi^{-1} : V_{0^m} \longrightarrow \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$$

се анулира върху непразното отворено подмножество $V_{0^m} \setminus \Phi(f^{-1}(0^n))$ на свързаното отворено подмножество $V_{0^m} \subseteq \mathbb{C}^m$. Съгласно Твърдение 1.10, оттук следва $(\widetilde{f} - \widehat{f}) \circ \Phi^{-1}|_{V_{0^m}} \equiv 0$ или съвпадението $\widetilde{f} \circ \Phi^{-1}|_{V_{0^m}} \equiv \widehat{f} \circ \Phi^{-1}|_{V_{0^m}}$. Вземайки предвид взаимната еднозначност на Φ^{-1}, получаваме $\widetilde{f}|_{U_p} \equiv \widehat{f}|_{U_p}$, а оттам и $\widetilde{f}|_M \equiv \widehat{f}|_M$.

Съгласно единствеността на $\widetilde{f}$, достатъчно е да установим локалното съществуване на $\widetilde{f}$, за да докажем лемата. Това ни позволява да предполагаме, че $f : D \to \mathbb{C}^n$ е холоморфно изображение на отворена околност D на 0^m върху $\mathbb{C}^m$ с $f(0^m) = 0^n$. По предположение, идеалът $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle_{\mathcal{O}_m}$ в пръстена $\mathcal{O}_m$ на зародишите на холоморфните в 0^m функции се поражда от единствен свой елемент g. След евентуално свиване на D можем да предполагаме, че

$$g = a_1 f_1 + \ldots + a_n f_n \quad \text{и} \quad f_j = b_j g \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq n$$

и подходящи холоморфни функции $f_j, a_j, b_j \in \mathcal{O}(D)$. Сега от

$$g = (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n) g$$

в областта $\mathcal{O}(D)$ получаваме

$$1 = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n.$$

Следователно във всяка точка $z \in D$ поне една от функциите $b_1, \ldots, b_n$ приема ненулева стойност $b_j(z) \neq 0$. За $\forall z \in D$ забелязваме, че $[f_1(z) : \ldots : f_n(z)] = [b_1(z) : \ldots : b_n(z)] \in \mathbb{P}^{n-1}$ и определяме

$$\widetilde{f} : D \longrightarrow \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n,$$

$$\widetilde{f}(z) := (f_1(z), \ldots, f_n(z), [b_1(z) : \ldots : b_n(z)]).$$

Изображението $\widetilde{f}$ е коректно зададено и холоморфно върху D с

$$\pi \widetilde{f}(z) = (f_1(z), \ldots, f_n(z)) = f(z) \quad \text{за} \quad \forall z \in D,$$

Q.E.D.

Задача 4.3. *Нека $\{p_1, \ldots, p_s\}$ е обединението на неразложимите множители на краен брой елементи $r_1, \ldots, r_t$ от ньотерова комутативна област R с единица и $r_i = p_1^{a_{i,1}} \ldots p_s^{a_{i,s}}$ за някакви $a_{ij} \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. Да се докаже, че*

$$d = p_1^{\min(a_{i,1} | 1 \leq i \leq t)} \ldots p_s^{\min(a_{is} | 1 \leq i \leq t)} \in R$$

е най-голям общ делител на $r_1, \ldots, r_t$, т.е. d дели $r_1, \ldots, r_t$ в R и всеки общ делител $d_1 \in R$ на $r_1, \ldots, r_t$ дели d.

Задача 4.4. *Нека $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}_n$, $\{f_1, \ldots, f_m\} \not\subseteq \{0\}$ са зародиши на холоморфни в $0^n \in \mathbb{C}^n$ функции с най-голям общ делител $g \in \mathcal{O}_n$. Да се докаже, че :*
(i) в сила е включването на идеали $I = \langle f_1, \ldots, f_m \rangle_{\mathcal{O}_n} \subseteq \langle g \rangle_{\mathcal{O}_n}$;
(ii) ако $I = \langle h \rangle_{\mathcal{O}_n}$ е главен идеал с пораждащ $h \in \mathcal{O}_n$, то съществува $u \in \mathcal{O}_n^*$, така че $h = gu$;
(iii) I е главен идеал тогава и само тогава, когато $g \in I$;
(iv) идеалът $\langle z_1, \ldots, z_n \rangle_{\mathcal{O}_n}$ не е главен.

Задача 4.5. *Нека C е комплексна крива, т.е. комплексно многообразие с размерност 1. Да се докаже, че произволно холоморфно изображение $f : C \to \mathbb{C}^n$ с $0^n \in f(C) \neq \{0^n\}$ се повдига до холоморфно изображение $\widetilde{f} : C \to \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$ с $\pi \circ \widetilde{f} = f|_V$.*

Задача 4.6. *Нека $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_m$ са такива нетъждествено нулеви зародиши на холоморфни в $0^m \in \mathbb{C}^m$ функции, че f_1 дели $f_2, \ldots, f_n$ в пръстена $\mathcal{O}_m$ и $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{C}^n$ е холоморфно изображение на околност U на 0^m върху $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^n$. Да се докаже, че съществува холоморфно повдигане $\widetilde{f} : U \to \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$ на f, така че $\pi \circ \widetilde{f} = f$.*

Задача 4.7. *Нека $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_m$ са нетъждествено нулеви зародиши на холоморфни в $0^m \in \mathbb{C}^m$ функции, определящи холоморфно изображение $f = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{C}^n$ на околност $0^m \in U \subseteq \mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^n$, така че f_1 не се анулира в нито една точка на U. Да се докаже, че съществува холоморфно повдигане $\widetilde{f} : U \to \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$ на f, така че $\pi \circ \widetilde{f} = f$.*

2. Раздуване на комплексно многообразие в точка

След като построихме раздуването $\mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$ на $\mathbb{C}^n$ в началото 0^n, можем да определим раздуването $\mathrm{Bl}_{0^n}D$ на отворено подмножество $D \subseteq \mathbb{C}^n$ в $0^n \in D$ като праобраза $\pi^{-1}(D)$ под действие на проекцията $\pi : \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$.

За да дефинираме раздуването Bl_pM на комплексно многообразие M в точка $p \in M$, избираме координатна карта $\varphi : U \to D \subseteq \mathbb{C}^n$ с център p, т.е. хомеоморфно изображение $\varphi : U \to D$ на отворена околност U на p върху отворена околност D на 0^n с $\varphi(p) = 0^n$. Ако $M^* := M \backslash \{p\}$, то $U^* := U \cap M^* = U \backslash \{p\} \simeq D \backslash \{0^n\}$ е изоморфно на $\mathrm{Bl}_{0^n} D \backslash \pi^{-1}(0^n) = \pi^{-1}(D) \backslash \pi^{-1}(0^n) = \pi^{-1}(D \backslash \{0^n\})$, защото проекцията π се ограничава до бихоломорфно изображение $\pi : \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \backslash \{0^n\}$. Това ни дава възможност "да залепим"M^* с $\mathrm{Bl}_{0^n} D$ по протежение на общото им отворено подмножество $U^* \simeq \mathrm{Bl}_{0^n} D \setminus \pi^{-1}(0^n)$. По-точно, разглеждаме непресичащото се обединение $M^* \coprod \mathrm{Bl}_{0^n} D$ и определяме

$$\mathrm{Bl}_pM := M^* \coprod \mathrm{Bl}_{0^n} D / \sim$$

като множеството на класовете на еквивалентност на $M^* \coprod \mathrm{Bl}_{0^n} D$ относно релацията

$$p \sim_{U^*} x \Leftrightarrow \varphi(p) = \pi(x) \quad \text{за} \quad p \in U^*, \quad x \in \mathrm{Bl}_{0^n} D \setminus \pi^{-1}(0^n).$$

Избираме холоморфен атлас $\{(V_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ върху M^*. Ако $\{(q^{-1}U_i, f_i)\}_{i=1}^n$ с

$$q : \mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}, \quad q(z, [a]) = [a]$$

и

$$f_i : q^{-1}U_i \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad f_i(z, [a]) = \left(\frac{a_1}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, z_i, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i} \right)$$

е холоморфният атлас върху $\mathrm{Bl}_{0^n}\mathbb{C}^n$, построен в доказателството на Лема 4.1, то $\{(q^{-1}(U_i \cap D), f_i)\}_{i=1}^n$ е холоморфен атлас върху $\mathrm{Bl}_{0^n} D$. Поради бихоломорфността на $\varphi : U^* \to D \setminus \{0^n\}$ и на $\pi : \mathrm{Bl}_{0^n} D \setminus \pi^{-1}(0^n) \to D \setminus \{0^n\}$, функциите на прехода между карти от вида (V_α, Φ_α), $\alpha \in A$ и $(q^{-1}(U_i \cap D), f_i)$, $1 \leq i \leq n$ са бихоломорфни. Това доказва, че $\{(V_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in A} \cup \{(q^{-1}(U_i \cap D), f_i)\}_{i=1}^n$ е холоморфен атлас върху Bl_pM. Проекцията

$$\Pi : \mathrm{Bl}_pM \to M,$$

$$\Pi(x) = x \quad \text{за} \quad x \in M^*,$$

$$\Pi(0^n, [a]) = p = f^{-1}(0^n) \quad \text{за} \quad (0^n, [a]) \in \pi^{-1}(0^n)$$

е холоморфно изображение, поради холоморфността на $\pi : \mathrm{Bl}_{0^n} D \to D$, бихоломорфността на $\varphi : U \to D$ и $\Pi(x, y) = \varphi^{-1} \circ \pi(y)$ за $\forall x \in U$, $\forall y \in \mathrm{Bl}_{0^n} D$.

Твърдение 4.8. *Раздуването Bl_pM на комплексно многообразие M в точка $p \in M$ е коректно определено с точност до локален изоморфизъм и не зависи от избора на холоморфен атлас върху M.*

Доказателство: Нека $\{(V_\alpha, \Phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ и $\{(W_\beta, \Psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ са холоморфни атласи върху M. Тогава $\{V_\alpha \cap W_\beta\}_{\alpha \in A, \beta \in B}$ е отворено покритие на M и хомеоморфизмите $\Phi_\alpha : V_\alpha \cap W_\beta \to D$, $\Psi_\beta : V_\alpha \cap W_\beta \to E$ върху отворени околности $0^n \in D \subseteq \mathbb{C}^n$, $0^n \in E \subseteq \mathbb{C}^n$ могат да се включат в комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd} V_\alpha \cap W_\beta \arrow[r, "\Phi_\alpha"] \arrow[dr, "\Psi_\beta"'] & D \arrow[d, "f_{\beta,\alpha}"] \\ & E \end{tikzcd}$$

с бихоломорфни изображения $f_{\beta,\alpha} : D \to E$, трансформиращи $0^n \in D$ в $f_{\beta,\alpha}(0^n) = 0^n \in E$. Трябва да докажем, че всяко $f_{\beta,\alpha}$ индуцира бихоломорфизъм $\widetilde{f_{\beta,\alpha}} : \mathrm{Bl}_{0^n} D \to \mathrm{Bl}_{0^n} E$ на съответните раздувания в началото 0^n. Фиксираме $\alpha \in A$, $\beta \in B$ и означаваме с $F_1, \ldots, F_n$ холоморфните компоненти

на
$$F := f_{\beta,\alpha} \circ \pi = (F_1, \dots, F_n) : \mathrm{Bl}_{0^n} D \longrightarrow E \subseteq \mathbb{C}^n.$$
Съгласно взаимната еднозначност на $f_{\beta,\alpha}$, комплексно аналитичното пространство $Z(F_1, \dots, F_n) = F^{-1}(0^n) = \pi^{-1}(0^n) = \mathbb{P}^{n-1}$ съвпада с изключителното множество на раздуването $\mathrm{Bl}_{0^n} D$ на D в $0^n \in D$. По Лема 4.2, достатъчно е да проверим, че във всяка точка $p \in F^{-1}(0^n) = \pi^{-1}(0^n) = \mathbb{P}^{n-1}$ идеалът $I_p := \langle F_1, \dots, F_n \rangle_{\mathcal{O}_{\mathrm{Bl}_{0^n} D, p}}$ на локалния пръстен на $\mathrm{Bl}_{0^n} D$ в p е главен, за да получим съществуването на холоморфно изображение $\widetilde{F} : \mathrm{Bl}_{0^n} D \to \mathrm{Bl}_{0^n} E$ с $\pi \circ \widetilde{F} = F$. Да забележим, че $F := f_{\alpha,\beta} \circ \pi : \mathrm{Bl}_{0^n} D \to E$ е взаимно еднозначно над $E \setminus \{0^n\}$ и има слой $F(0^n) = \pi^{-1}(0^n) = \mathbb{P}^{n-1}$ над $0^n \in E$. Понеже $\pi : \mathrm{Bl}_{0^n} E \to E$ е взаимно еднозначно над $E \setminus \{0^n\}$ и има слой $\pi^{-1}(0^n) = \mathbb{P}^{n-1}$ над $0^n \in E$, холоморфното изображение $\widetilde{F} : \mathrm{Bl}_{0^n} D \to \mathrm{Bl}_{0^n} E$ ще е взаимно еднозначно. Разменяйки ролите на D и E ще получим холоморфността на $\widetilde{F}^{-1} : \mathrm{Bl}_{0^n} E \to \mathrm{Bl}_{0^n} D$ и ще завършим доказателството на твърдението.
За да проверим, че идеалът $I_p := \langle F_1, \dots, F_n \rangle_{\mathcal{O}_{\mathrm{Bl}_{0^n} D, p}}$ е главен за $\forall p \in F^{-1}(0^n) = \pi^{-1}(0^n) = \mathbb{P}^{n-1}$, използваме холоморфния атлас $\{(g_i, U_i)\}_{i=1}^n$ върху $\mathbb{P}^{n-1}$ с $U_i = \{[a] = [a_1 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^{n-1} \ \mid \ a_i \neq 0\}$ и
$$g_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1},$$
$$g_i([a]) = \left(\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right).$$
Чрез проекцията $q : \mathrm{Bl}_{0^n} D \to \mathbb{P}^{n-1}$, $q(z, [a]) = [a]$ издърпваме (g_i, U_i) до локални карти $(q^{-1}U_i, f_i)$ върху $\mathrm{Bl}_{0^n} D$ с
$$f_i(z, [a]) = \left(\frac{a_1}{a_i}, \dots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, z_i, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \dots, \frac{a_n}{a_i} \right),$$
както в доказателството на Лема 4.1. Холоморфното изображение
$$G := F \circ f_i^{-1} : \mathbb{C}^n \to E$$
действа по правилото
$$G(w_1, \dots, w_n) = f_{\beta,\alpha}(w_i w_1, \dots, w_i w_{i-1}, w_i, w_i w_{i+1}, \dots, w_i w_n) \tag{4.2}$$
за $\forall w = (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{C}^n$. Компонентите $G_1, \dots, G_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ на G се определят от компонентите на F, т.е.
$$G_s(w_1, \dots, w_n) =$$
$$F_s((w_i w_1, \dots, w_i w_{i-1}, w_i, w_i w_{i+1}, \dots, w_i w_n), [w_1 : \ldots : w_{i-1} : 1 : w_{i+1} : \ldots w_n])$$
за $\forall 1 \leq s \leq n$. Фиксираме точка $b \in \mathbb{C}^n$ и разглеждаме идеала
$$I_b := \langle G_1, \dots, G_n \rangle_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, b}},$$
породен от $G_1, \dots, G_n$ в локалния пръстен $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, b}$ на b в $\mathbb{C}^n$. Ако $b_i \neq 0$, то поради взаимната еднозначност на $f_{\beta,\alpha}$ с $f_{\beta,\alpha}(0^n) = 0^n$ съществува $1 \leq j \leq n$ с $G_j(b) \neq 0$. Оттук, $I_b = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, b}$ съвпада с целия локален пръстен и е главен идеал, породен от $1 \in \mathbb{C} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, b}$. В случая $b_i = 0$ ще докажем, че $I_b = \langle w_i \rangle_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, b}}$ се поражда от $w_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, b}$. Съгласно $f_{\beta,\alpha}(0^n) = 0^n$ съществува $n \times n$-матрица $A(z)$ от холоморфни функции $A_{ij}(z)$ на z с
$$f_{\beta,\alpha}(z) = (z_1, \dots, z_n) A(z).$$
Оттук,
$$(G_1(w), \dots, G_n(w)) = G(w) = f_{\beta,\alpha}(w_i w_1, \dots, w_i w_{i-1}, w_i, w_i w_{i+1}, \dots, w_i w_n) =$$
$$(w_i w_1, \dots, w_i w_{i-1}, w_i, w_i w_{i+1}, \dots, w_i w_n) A(w_i w_1, \dots, w_i w_{i-1}, w_i, w_i w_{i+1}, \dots, w_i w_n)$$

и всяка компонента $G_s(w) \in \langle w_i \rangle_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,b}}$ е от идеала, породен от w_i. От друга страна, матрицата $A(0^n) = J(f_{\beta,\alpha})(0^n)$ е обратима и съществува матрица $A(z)^{-1}$ от холоморфни функции върху околност на 0^n върху D, така че

$$(z_1, \dots, z_n) = f_{\beta,\alpha}(a) A(z)^{-1}.$$

Комбинирайки с (4.2) получаваме

$$(w_i w_1, \dots, w_i w_{i-1}, w_i, w_i w_{i+1}, \dots, w_i w_n) =$$
$$(G_1(w), \dots, G_n(w)) A(w_i w_1, \dots, w_i w_{i-1}, w_i, w_i w_{i+1}, \dots, w_i w_n)^{-1}.$$

По този начин, w_i се оказва в идеала $I_b = \langle G_1, \dots, G_n \rangle_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,b}}$ и $\langle w_i \rangle_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,b}} \subseteq I_b$. Това доказва $I_b = \langle w_i \rangle_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,b}}$, Q.E.D.

3. Векторни разслоения

Полезен клас от комплексни многообразия са холоморфните векторни разслоения.

Нека $\mathbb{K}$ е полето $\mathbb{R}$ на реалните числа или полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа.

Определение 4.9. *Под $\mathbb{K}$-векторно разслоение C с ранг r над топологично пространство M разбираме топологично пространство E с непрекъснато изображение $\pi : E \to M$, така че:*
(i) във всяка точка $p \in M$ слоят $E_p = \pi^{-1}(p)$ е $\mathbb{K}$-линейно пространство с размерност r и
(ii) всяка точка $p \in M$ има околност U върху M с хомеоморфизъм

$$\Phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{K}^r,$$

за който $\Phi(E_p) = p \times \mathbb{K}^r$ и композицията $E_p \xrightarrow{\Phi} p \times \mathbb{K}^r \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} \mathbb{K}^r$ е $\mathbb{K}$-линеен изоморфизъм.

Пространството M се нарича база на векторното разслоение. Двойките (U, Φ) са локални тривиализации на $\pi : E \to M$.

Съгласно условие (ii) от определението, за произволни локални тривиализации (U_α, Φ_α) и (U_β, Φ_β) на $\pi : E \to M$ с $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, композицията

$$\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r$$

е от вида $(\mathrm{Id}_{U_\alpha \cap U_\beta}, g_{\alpha,\beta})$ за непрекъснато изображение

$$g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathrm{GL}(r, \mathbb{K}),$$

което се нарича функция на прехода. Функциите на прехода изпълняват условията

$$\begin{aligned} g_{\alpha,\alpha}(p) = E_r \quad \text{за} \quad \forall p \in U_\alpha, \\ g_{\alpha,\beta}(p) g_{\beta,\gamma}(p) g_{\gamma,\alpha}(p) = E_r \quad \text{за} \quad \forall p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma, \end{aligned} \tag{4.3}$$

където $E_r \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ е единичната матрица от ред r.

Като отворено подмножество на множеството $M_{r \times r}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^{r^2}$ на матриците от ред r с елементи от $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, общата линейна група

$$\mathrm{GL}(r, \mathbb{K}) = \{A \in M_{r \times r}(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$$

има естествена структура на гладко многообразие. Ако базата M на векторно разслоение $\pi : E \to M$ е гладко многообразие и функциите на прехода $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ са гладки изображения, то E е гладко многообразие и казваме, че $\pi : E \to M$ е гладко векторно разслоение. По-точно, ако множествата U_α на всички тривиализации (U_α, Φ_α), $\alpha \in A$ на $\pi : E \to M$ се съдържат в локални карти (V_i, Ψ_i), $i \in I$ върху M, то $(U_\alpha \times \mathbb{K}^r, \Psi_i|_{U_\alpha} \times \mathrm{Id}_{\mathbb{K}^r})$, $\alpha \in A$ са локални карти върху E. За $U_\alpha \subseteq V_i$ и $U_\beta \subseteq V_j$, функциите на прехода

$$\Psi_i \circ \Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1} \circ \Psi_j^{-1} = (\Psi_i \circ \Psi_j^{-1}, g_{\alpha,\beta}) : \Psi_j(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r \longrightarrow \Psi_i(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r$$

между тези карти са дифеоморфизми. Относно така зададената структура на гладко многообразие върху E, проекцията $\pi : E \to M$ е гладко изображение, както и локалните тривиализации $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{K}^r$.
Аналогично, ако M е комплексно многообразие, то $\mathbb{C}$-векторно разслоение $\pi : E \to M$ е холоморфно, ако функциите на прехода $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ са холоморфни изображения. (Тук използваме, че отвореното подмножество $\mathrm{GL}(r, \mathbb{C}) = \{A \in M_{r\times r}(\mathbb{C}) \mid \det A \neq 0\}$ на $M_{r\times r}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^{r^2}$ е комплексно многообразие.) Както в гладкия случай, E има естествена структура на комплексно многообразие, относно която проекцията $\pi : E \to M$ е холоморфно изображение, както и локалните тривиализации $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{C}^r$.
Следващото твърдение установява, че функциите на прехода $g_{\alpha,\beta}$ определят еднозначно (с точност до изоморфизъм) векторното разслоение E.

Твърдение 4.10. *Нека M е топологично пространство с отворено покритие $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ са непрекъснати изображения, изпълняващи условията $g_{\alpha,\alpha} = E_r$ за $\forall \alpha \in A$ и $g_{\alpha,\beta} \circ g_{\beta,\gamma} \circ g_{\gamma,\alpha} = E_r$ за $\forall \alpha, \beta, \gamma \in A$ с $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$. Тогава съществува векторно разслоение $\pi : E \to M$ от ранг r върху M с функции на прехода $g_{\alpha,\beta}$.*
Ако M е гладко (съответно, комплексно) многообразие и $g_{\alpha,\beta}$ са гладки (съответно, холоморфни) изображения, то $\pi : E \to M$ е гладко (съответно, холоморфно) векторно разслоение.

Доказателство: За да определим E като топологично пространство, върху непресичащото се обединение $\coprod_{\alpha\in A} U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ въвеждаме релацията

$$(p, v) \sim (p, w) \quad \text{за} \quad (p, v) \in U_\alpha \times \mathbb{K}^r,\ (p, w) \in U_\beta \times \mathbb{K}^r \quad \text{точно когато} \quad v = g_{\alpha,\beta}(p)w.$$

Проверяваме, че $\sim$ е релация на еквивалентност. За целта използваме, че ако $g_{\alpha,\beta}(p) \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ зависи непрекъснато от p, то и $g_{\alpha,\beta}(p)^{-1} \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ зависи непрекъснато от p. По-точно,

$$g_{\alpha,\beta}(p)^{-1} = \frac{1}{\det g_{\alpha,\beta}(p)} g_{\alpha,\beta}(p)^*,$$

където (j, i)-тият елемент на матрицата $g_{\alpha,\beta}(p)^* \in M_{r\times r}(\mathbb{K})$ е адюнгираното количество на (i, j)-тия елемент на $g_{\alpha,\beta}(p)$. Понеже $\frac{1}{\det g_{\alpha,\beta}(p)}$ и елементите на $g_{\alpha,\beta}(p)^*$ зависят непрекъснато от елементите на $g_{\alpha,\beta}(p)$, функцията на прехода $g_{\beta,\alpha}(p) := g_{\alpha,\beta}(p)^{-1}$ е непрекъсната и $(p, v) \sim (p, w)$ е еквивалентно на $(p, w) \sim (p, v)$. Ако $(p, u) \sim (p, v)$ и $(p, v) \sim (p, w)$, то $u = g_{\alpha,\beta}(p)v$ и $v = g_{\beta,\gamma}(p)w$, откъдето

$$u = g_{\alpha,\beta}(p)g_{\beta,\gamma}(p)w = g_{\alpha,\gamma}(p)w$$

и $(p, u) \sim (p, w)$. Следователно $\sim$ е релация на еквивалентност и можем да определим E като множеството на класовете на еквивалентност на $\coprod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ относно $\sim$.
Изображението,

$$\Pi : \coprod_{\alpha\in A} U_\alpha \times \mathbb{K}^r \longrightarrow M$$

ограничаващо се до канонични проекции $\mathrm{pr}_1 : U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ върху всички $U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ индуцира изображение $\pi : E \to M$. Топологията върху E има за отворени подмножества праобразите $\pi^{-1}(U)$ на отворените подмножества $U \subseteq M$, така че проекцията $\pi : E \to M$ е непрекъснато изображение. Ще проверим, че

$\pi : E \to M$ изпълнява условията (i) и (ii) от Определение 4.9. За всяка точка $p \in M$ слоят

$$E_p = \pi^{-1}(p) = \coprod_{\alpha \in A, p \in U_\alpha} p \times \mathbb{K}^r / \sim$$

е изоморфен на $\mathbb{K}^r$. По-точно, за произволно фиксирано $\beta \in A$ с $p \in U_\beta$ и всички $\alpha \in A \setminus \{\beta\}$ с $U_\alpha \ni p$, изображенията

$$(U_\beta \cap U_\alpha) \times \mathbb{K}^r \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r,$$

$$(q, w) \mapsto (q, g_{\alpha,\beta}(q) w)$$

се ограничават до $\mathbb{K}$-линейни изоморфизми

$$p \times \mathbb{K}^r \longrightarrow p \times \mathbb{K}^r,$$

$$(p, w) \mapsto (p, g_{\alpha,\beta}(p) w),$$

защото $g_{\alpha,\beta}(p) \in \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$. Можем да отъждествим слоя $E_p = \pi^{-1}(p)$ с $\mathbb{K}$-линейното пространство $p \times \mathbb{K}^r \simeq \mathbb{K}^r$ с размерност r, съдържащо се в $U_\beta \times \mathbb{K}^r$. Това установява верността на (i) от Определение 4.9. Ако

$$\varphi : \coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{K}^r \longrightarrow E$$

е изображението, съпоставящо на точка $(p, v) \in U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ класът на еквивалентност на (p, v) относно $\sim$, то имаме комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{K}^r \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\Pi"'] & E \arrow[d, "\pi"] \\
& M
\end{tikzcd}$$

от непрекъснати сюрективни изображения. За произволно фиксирано $\beta \in A$ праобразът на U_β под действие на Π е

$$\Pi^{-1}(U_\beta) = (U_\beta \times \mathbb{K}^r) \coprod \Big(\coprod_{\alpha \in A \setminus \{\beta\}} (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r \Big).$$

За произволни $\alpha \in A \setminus \{\beta\}$ и $(p, v) \in U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ са в сила отъждествявания

$$(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{K}^r \longrightarrow (U_\beta \cap U_\alpha) \times \mathbb{K}^r \subset U_\beta \times \mathbb{K}^r,$$

$$(p, v) \mapsto (p, g_{\beta,\alpha}(p) v) = (p, g_{\alpha,\beta}(p)^{-1} v)$$

в E, така че отвореното множество $\pi^{-1}(U_\beta) = \Pi^{-1}(U_\beta) / \sim$ е изоморфно на произведението $U_\beta \times \mathbb{K}^r$. Разглежданият изоморфизъм $\pi^{-1}(U_\beta) \to U_\beta \times \mathbb{K}^r$ отъждествява слоевете $E_p = \pi^{-1}(p) \subset \pi^{-1}(U_\beta)$ с $p \times \mathbb{K}^r \subset U_\beta \times \mathbb{K}^r$ за $\forall p \in U_\beta$. С това сме проверили условие (ii) от Определение 4.9 и сме доказали, че

$$\pi : E = \left(\coprod_{\alpha \in A} U_\alpha \times \mathbb{K}^r / \sim \right) \longrightarrow M$$

е векторно разслоение с ранг r.
Гладкостта на E при гладка база M и гладки функции на прехода $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{K})$ е доказана преди формулировката на Твърдение 4.10. Аналогично се извежда, че E е комплексно многообразие, ако M е комплексно многообразие и функциите на прехода $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(r, \mathbb{C})$ са холоморфни, Q.E.D.

Определение 4.11. *Сечение на векторно разслоение $\pi : E \to M$ над отворено подмножество $U \subseteq M$ е непрекъснато изображение $s : U \to E$ с $\pi \circ s = \mathrm{Id}_U$. Означаваме с $\Gamma(U, E)$ множеството на сеченията на E над U.*
Когато E е гладко (съответно, холоморфно) векторно разслоение, обикновено разглеждаме само гладките (съответно, само холоморфните) сечения на E.

Сеченията $s : M \to E$ на $\pi : E \to M$ са свързани чрез функциите на прехода. По-точно, за произволна локална тривиализация $\Phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{K}^r$ съществува непрекъснато изображение $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{K}^r$, така че композицията

$$(\Phi_\alpha \circ s) : U_\alpha \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{K}^r,$$
$$(\Phi_\alpha \circ s)(p) = (p, s_\alpha(p)).$$

Това се дължи на условието $\Phi_\alpha(\pi^{-1}(p)) = p \times \mathbb{K}^r$ от определението за векторно разслоение, което е еквивалентно на съществуването на комутативна диаграма

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[r, "\Phi_\alpha"] \arrow[d, "\pi"'] & U_\alpha \times \mathbb{K}^r \arrow[dl, "\mathrm{pr}_1"] \\
U_\alpha &
\end{tikzcd}$$

за първата канонична проекция $\mathrm{pr}_1 : U_\alpha \times \mathbb{K}^r \to U_\alpha$, $\mathrm{pr}_1(p, v) = p$ на директното произведение $U_\alpha \times \mathbb{K}^r$. По-точно, за произволни точки $p \in U_\alpha$ и $r \in \pi^{-1}(p)$ от $\Phi_\alpha(\pi^{-1}(p)) = p \times \mathbb{K}^r$ получаваме $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi_\alpha(r) = p = \pi(r)$. Следователно $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi_\alpha = \pi$, откъдето $\mathrm{pr}_1 \circ \Phi_\alpha \circ s|_{U_\alpha} = \pi \circ s = \mathrm{Id}|_{U_\alpha}$. Втората канонична проекция $\mathrm{pr}_2 : U_\alpha \times \mathbb{K}^r \to \mathbb{K}^r$, $\mathrm{pr}_2(p, v) = v$ е непрекъснато изображение, така че и композицията $\mathrm{pr}_2 \circ \Phi_\alpha \circ s : U_\alpha \to \mathbb{K}^r$ е непрекъснато изображение, което означаваме с s_α. Сега равенството $(\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}) \circ (\Phi_\beta \circ s) = \Phi_\alpha \circ s$ е еквивалентно на $(\mathrm{Id}_{U_\alpha \cap U_\beta}, g_{\alpha,\beta}) \circ (\mathrm{Id}_{U_\alpha \cap U_\beta}, s_\beta) = (\mathrm{Id}_{U_\alpha \cap U_\beta}, s_\alpha)$ и се свежда до

$$g_{\alpha,\beta} s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}.$$

Обратно, произволна фамилия от непрекъснати изображения $s_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{K}^r$, свързани с равенствата $g_{\alpha,\beta} s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$ задава глобално сечение $s : M \to E$ на векторното разслоение $\pi : E \to M$.
За произволно отворено подмножество $U \subseteq M$, множеството $\Gamma(U, E)$ на непрекъснатите (гладките или, съответно, холоморфните) сечения на E над U е линейно пространство над $\mathbb{K}$ относно поточково определените събиране

$$s + t : U \longrightarrow E, \quad (s + t)(p) := s(p) + t(p) \quad \text{за} \quad \forall p \in U$$

и умножение с $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda s : U \longrightarrow E, \quad \lambda s(p) := \lambda s(p) \quad \text{за} \quad \forall p \in U.$$

Така въведените структури на $\mathbb{K}$-линейни пространства върху $\Gamma(U_\alpha, E)$, $\alpha \in A$ са съгласувани помежду си, защото $s_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, E)$ зависят линейно от $s_\beta \in \Gamma(U_\beta, E)$ чрез равенствата $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = g_{\alpha,\beta} s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$.
Векторните разслоения $\pi : L \to M$ с ранг 1 се наричат линейни.

Задача 4.12. *Да се докаже, че раздуването $\mathrm{Bl}_{0^{n+1}}\mathbb{C}^{n+1}$ на $\mathbb{C}^{n+1}$ в началото $0^{n+1} \in \mathbb{C}^{n+1}$ е холоморфно линейно разслоение*

$$q : \mathrm{Bl}_{0^{n+1}}\mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}^n,$$
$$q(z, L) = L$$

над комплексното проективно пространство $\mathbb{P}^n$. Това разслоение се нарича универсално. Да се намерят функциите на прехода на универсалното линейно разслоение над $\mathbb{P}^n$, спрямо стандартното отворено покритие $\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n U_i$ с

$U_i = \{[a] \in \mathbb{P}^n \mid a_i \neq 0\}$ *и холоморфно сечение* $s : U_i \to \mathrm{Bl}_{0^{n+1}}\mathbb{C}^{n+1}$ *на* $q : \mathrm{Bl}_{0^{n+1}}\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{P}^n$ *над* U_i.

Задача 4.13. *Да се докаже, че ако* $\pi : \mathcal{L} \to M$ *е холоморфно линейно разслоение над комплексно многообразие* M *с функции на прехода* $g_{\alpha,\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$, *то за всяко цяло число* m *съществува холоморфно линейно разслоение*

$$\pi^{\otimes m} : \mathcal{L}^{\otimes m} \longrightarrow M$$

с функции на прехода $(g_{\alpha,\beta})^m : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathbb{C}^*$.

Задача 4.14. *Нека* $g_{ij} : U_i \to U_j \to \mathbb{C}^*$ *са функциите на прехода на универсалното линейно разслоение* $q : \mathrm{Bl}_{0^{n+1}}\mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{P}^n$ *спрямо стандартното афинно покритие* $\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n U_i$ *с* $U_i = \{[a] \in \mathbb{P}^n \mid a_i \neq 0\}$, *а* $\pi : \mathcal{L} \to \mathbb{P}^n$ *е холоморфно линейно разслоение с функции на прехода*

$$h_{i,j} := g_{ij}^{-1} = g_{ji} : U_i \cap U_j \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

спрямо $\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n U_i$. *Да се намерят холоморфни изображения* $\sigma_j : U_i \cap U_j \to \mathbb{C}$, *задаващи холоморфно сечение* $\sigma : U_i \to \mathcal{L}$ *на* $\pi : \mathcal{L} \to \mathbb{P}^n$ *над* U_i.