Глава 3

Аналитични подпространства. Определение за комплексно многообразие.

Свойствата на пръстена $\mathcal{O}_n$ на зародишите на холоморфните в $0^n \in \mathbb{C}^n$ функции се използват за изучаване на аналитичните подпространства на $\mathbb{C}^n$.

1. Локално разлагане на комплексно аналитично пространство в обединение на неприводими компоненти

Определение 3.1. *Нека $D \subseteq \mathbb{C}^n$ е отворено множество. Подмножество $Z \subseteq D$ е аналитично, ако всяка точка $p \in D$ има отворена околност $p \in U_p \subseteq D$, така че $Z \cap U_p$ е множеството на общите нули на фамилия от холоморфни в D функции.*

Поради непрекъснатостта на холоморфните функции, аналитичните подпространства $Z \subseteq D$ са затворени подмножества на D.
За $n = 1$, аналитичните подпространства $Z \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$ са дискретни множества от точки, защото нулите на холоморфна функция на една променлива са изолирани. По определение, това означава, че всяка точка $p \in Z$ има отворена околност $p \in U_p \subseteq D \subseteq \mathbb{C}$ с $U_p \cap Z = \{p\}$.
Множеството $Z(f) \subset D$ на нулите на една холоморфна функция $f : D \to \mathbb{C}$ се нарича хиперповърхнина.
При изучаване на локалните свойства на аналитичните подпространства $Z \subseteq \mathbb{C}^n$, без ограничение на общността можем да считаме, че $0^n \in Z$ и да правим разглеждания в достатъчно малка околност на 0^n върху $\mathbb{C}^n$. Нека

$$I(Z) := \{f \in \mathcal{O}_n \mid f|_Z \equiv 0\}$$

е идеалът на Z в $\mathcal{O}_n$. Включването $Z_1 \subseteq Z_2$ на аналитични подпространства на $\mathbb{C}^n$ води до обратното включване $I(Z_2) \subseteq I(Z_1)$ на съответните идеали, защото всеки анулиращ се върху Z_2 зародиш се анулира върху Z_1.
Твърдим, че в достатъчно малка отворена околност U на 0^n върху $\mathbb{C}^n$, аналитичното подмножество Z може да се определи чрез краен брой холоморфни функции. По-точно, в подходяща отворена околност $0^n \in U_0 \subseteq \mathbb{C}^n$, аналитичното подпространство $Z \cap U_0 \subseteq U_0$ е множеството на общите нули на идеала $I(Z)$ на Z в $\mathcal{O}_n$. Пръстенът $\mathcal{O}_n$ на зародишите на холоморфните в 0^n функции е ньотеров, съгласно Твърдение 2.11 , така че съществуват краен брой зародиши $f_1, \dots, f_r \in I(Z)$, пораждащи

$$I(Z) = \langle f_1, \dots, f_r \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{r} f_i g_i \;\middle|\; g_i \in \mathcal{O}_n \right\}.$$

След евентуално свиване на U_0 до $U \subseteq U_0$ можем да считаме, че $f_1, \dots, f_r$ имат коректно определени върху U представители. Твърдим, че

$$Z \cap U = Z(f_1) \cap \dots \cap Z(f_r) \cap U.$$

Включванията $Z \cap U \subseteq Z(f_j) \cap U$ следват от $f_j \in I(Z)$ за $\forall 1 \leq j \leq r$. За произволна точка $p \in Z(f_1) \cap \dots \cap Z(f_r) \cap U$ и произволен зародиш $f \in I(Z) =$

$\langle f_1,\ldots,f_r\rangle \triangleleft \mathcal{O}_n$ имаме $p \in Z(f)\cap U$. В частност, уравненията на $Z\cap U$ в U принадлежат на $I(Z)$ и се анулират в p. Това доказва $p\in Z\cap U$ и включването $Z(f_1)\cap\ldots\cap Z(f_r)\cap U \subseteq Z\cap U$. От равенството $Z\cap U = Z(f_1)\cap\ldots\cap Z(f_r)\cap U$ следва

$$Z\cap U = Z(I(Z))\cap U,$$

защото множеството $Z(I(Z)) = Z(f_1)\cap\ldots\cap Z(f_r)$ на общите нули на идеала $I(Z) = \langle f_1,\ldots,f_r\rangle$, породен от $f_1,\ldots,f_r$ съвпада с множеството на общите нули на $f_1,\ldots,f_r$.

Определение 3.2. *Аналитично подпространство Z е приводимо, ако може да се представи като обединение $Z = Z_1\cup Z_2$ на собствени аналитични подмножества $Z_1 \subsetneq Z$ и $Z_2 \subsetneq Z$. В противен случай, Z е неприводимо.*

Лема 3.3. *Аналитично пространство $0^n \in Z \subset \mathbb{C}^n$ е неприводимо в околност на 0^n върху $\mathbb{C}^n$ тогава и само тогава, когато идеалът $I(Z)$ на Z в пръстена $\mathcal{O}_n$ на зародишите на холоморфните в 0^n функции е прост.*

Доказателство: Нека Z е локално неприводимо и $fg \in I(Z)$ за $f,g\in\mathcal{O}_n$. Тогава $Z\subseteq Z(fg) = Z(f)\cup Z(g)$, съгласно липсата на делители на нулата в полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа. Това дава възможност за представяне на $Z = [Z\cap Z(f)]\cup[Z\cap Z(g)]$ като обединение на аналитични подмножества $Z\cap Z(f)$ и $Z\cap Z(g)$. Съгласно неприводимостта на Z, оттук следва $Z = Z\cap Z(f)$ или $Z = Z\cap Z(g)$. С други думи, $Z\subseteq Z(f)$ или $Z\subseteq Z(g)$, което е еквивалентно на $f\in I(Z)$ или на $g\in I(Z)$. Това доказва простотата на идеала $I(Z)\triangleleft\mathcal{O}_n$.
Обратно, да допуснем, че идеалът $I(Z)$ в $\mathcal{O}_n$ е прост, но Z се разлага в обединение $Z = Z_1\cup Z_2$ на собствени аналитични подпространства $Z_1\subsetneq Z$ и $Z_2\subsetneq Z$. Тогава $I(Z)\subsetneq I(Z_1)$, защото от $I(Z) = I(Z_1)$ следва $Z = Z(I(Z)) = Z(I(Z_1)) = Z_1$, противно на предположението $Z_1\subsetneq Z$. Избираме зародиш $f_1\in I(Z_1)\setminus I(Z)$. Аналогично, съществува зародиш $f_2\in I(Z_2)\setminus I(Z)$. Произведението f_1f_2 се анулира върху $Z_1\cup Z_2 = Z$ и принадлежи на простия идеал $I(Z)$, но нито един от множителите f_1 или f_2 не е от $I(Z)$. Това противоречи на простотата на идеала $I(Z)\triangleleft\mathcal{O}_n$ и доказва локалната неприводимост на аналитичните пространства през 0^n с прост идеал от зародиши, Q.E.D.

Задача 3.4. *Да се докаже, че ако комплексно аналитичното множество Z е неприводимо в околност на 0^n върху $\mathbb{C}^n$, то съществуват неразложими елементи $g_1,\ldots g_t\in I(Z)\triangleleft\mathcal{O}_n$, пораждащи идеала $I(Z) = \langle g_1,\ldots g_t\rangle_{\mathcal{O}_n}$.*

Твърдение 3.5. *Нека Z е аналитично подпроствансвтво на отворено подмножество $D\subseteq\mathbb{C}^n$ с $0^n\in Z$. Тогава съществува достатъчно малка отворена околност $0^n\in U\subseteq\mathbb{C}^n$, в която Z се разлага в обединение $Z = Z_1\cup\ldots\cup Z_r$ на краен брой неприводими аналитични подпространства Z_j.*
Ако $Z_i\not\subseteq Z_j$ за $\forall 1\leq i\neq j\leq r$, то това разлагане е единствено.

Доказателство: Да допуснем, че Z не се разлага в крайно обединение на неприводими аналитични подпространства. Тогава Z е приводимо и се разлага в обединение $Z = Z_1\cup Z_1'$ на собствени аналитични подпространства $Z_1\subsetneq Z$, $Z_1'\subsetneq Z$ в някаква отворена околност на 0^n върху $\mathbb{C}^n$. Поне едно от подпространствата Z_1 или Z_1' не се разлага локално в крайно обединение на неприводими. Ако Z_1 не се разлага в крайно обединение на неприводими аналитични подпространства в отворена околност на 0^n върху $\mathbb{C}^n$, то повтаряйки горните разсъждения намираме собствено аналитично подпространство $Z_2\subsetneq Z_1$, което не се разлага локално в крайно обединение на неприводими. Продължавайки по същия начин получаваме безкрайна строго намаляваща редица

$$Z\supsetneq Z_1\supsetneq Z_2\supsetneq\ldots\supsetneq Z_m\supsetneq Z_{m+1}\supsetneq\ldots$$

от локални аналитични подпространства на $\mathbb{C}^n$. Тя отговаря на безкрайна строго растяща редица

$$I(Z) \subsetneq I(Z_1) \subsetneq I(Z_2) \subsetneq \ldots \subsetneq I(Z_m) \subsetneq I(Z_{m+1}) \subsetneq \ldots$$

от идеали в пръстена $\mathcal{O}_n$ на зародишите на холоморфните в 0^n функции. Това противоречи на ньотеровостта на $\mathcal{O}_n$, установена в Твърдение 2.11 и доказва, че произволно аналитично пространство $0^n \in Z \subseteq D \subseteq \mathbb{C}^n$ се разлага в обединение $Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_r$ на краен брой неприводими аналитични подпространства Z_j в достатъчно малка околност на 0^n върху $\mathbb{C}^n$.

Да предположим, че $Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_r = Z'_1 \cup \ldots \cup Z'_s$ с $r \leq s$ са две разлагания на Z с $Z_i \not\subseteq Z_j$ за $\forall 1 \leq i \neq j \leq r$ и $Z'_k \not\subseteq Z'_l$ за $\forall 1 \leq k \neq l \leq s$. Тогава за всяко $1 \leq k \leq s$, аналитичното пространство

$$Z'_k = Z'_k \cap Z = Z'_k \cap (Z_1 \cup \ldots \cup Z_r) = (Z'_k \cap Z_1) \cup \ldots \cup (Z'_k \cap Z_r)$$

се представя като обединение на аналитични подпространства $Z'_k \cap Z_i$, $1 \leq i \leq r$. Съгласно неприводимостта на Z'_k имаме $Z'_k = Z'_k \cap Z_j$ за някое $1 \leq j \leq r$, откъдето $Z'_k \subseteq Z_j$. Аналогично доказваме съществуването на $1 \leq l \leq s$ със $Z_j \subseteq Z'_l$. Но $Z'_k \subseteq Z_j \subseteq Z'_l$ изисква $k = l$, съгласно предположението $Z'_k \not\subseteq Z'_l$ за $1 \leq k \neq l \leq s$ и $Z'_k = Z_j$. С индукция по r получаваме $r = s$ и $Z'_k = Z_{\sigma(k)}$ за някаква пермутация $\sigma \in \mathrm{Sym}(s)$ и $\forall 1 \leq k \leq s$, Q.E.D.

2. Теорема за неявното изображение

Теоремата за неявното изображение дава информация за структурата на аналитичните пространства в обща точка. По-точно, тя дава достатъчно условие на езика на частните производни на определящите уравнения за параметризация на аналитично пространство чрез отворено подмножество на $\mathbb{C}^k$. Ако аналитичното пространство $Z \subseteq D$ се определя с холоморфни уравнения $f_1, \ldots, f_m$, то можем да разглеждаме $Z = f^{-1}(0^m)$ като праобраза на началото $0^m \in \mathbb{C}^m$ под действие на холоморфното изображение

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : D \longrightarrow \mathbb{C}^m$$

с координатни функции $f_1, \ldots, f_m$. Нека $z_1, \ldots, z_n$ са холоморфни координати върху $\mathbb{C}^n$, а

$$J(f) = \frac{\partial(f_1, \ldots, f_m)}{\partial(z_1, \ldots, z_n)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \ldots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{pmatrix}$$

е Якобиевата матрица на $f = (f_1, \ldots, f_m)$ или матрицата на частните производни. За произволни естествени $m \leq n$ записваме накратко $z = (z', z'')$ за $z' = (z_1, \ldots, z_m)$, $z'' = (z_{m+1}, \ldots, z_n)$. Аналогично, полидиск $\Delta_n(0^n, r)$ се записва като $\Delta_m(0^m, r') \times \Delta_{n-m}(0^{n-m}, r'') \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^{n-m}$ за $r' = (r_1, \ldots, r_m) \in (\mathbb{R}^{>0})^m$, $r'' = (r_{m+1}, \ldots, r_n) \in (\mathbb{R}^{>0})^{n-m}$. Тогава за произволно холоморфно изображение $f : D \to \mathbb{C}^m$ имаме

$$J(f) = (J'(f), J''(f)) = \left(\frac{\partial f}{\partial z'}, \frac{\partial f}{\partial z''} \right).$$

Теорема 9. (за неявното изображение) *Нека $m \leq n$ са естествени числа, а $f : U \to \mathbb{C}^m$ е холоморфно изображение на отворена околност $0^n \in U \subset \mathbb{C}^n$ с $f(0^n) = 0^m$. Ако матрицата $J'(f)(0^n) = \frac{\partial f}{\partial z'}(0^n)$ е неособена, то съществуват полидиск $\Delta_n(0^n, r) \subset \mathbb{C}^n$ и холоморфно изображение*

$$\Phi : \Delta_{n-m}(0^{n-m}, r'') \longrightarrow \Delta_m(0^m, r')$$

с $\Phi(0^{n-m}) = 0^m$, така че $f(z) = 0^m$ в точка $z \in \Delta_n(0^n, r)$ тогава и само тогава, когато $z' = \Phi(z'')$.

Доказателство: С индукция по $m \in \mathbb{N}$, ако $f : U \to \mathbb{C}$ е локална холоморфна функция с $f(0^n) = 0$ и $\frac{\partial f}{\partial z_1}(0^n) \neq 0$, то f е регулярна с кратност 1 относно z_1. Съгласно Подготвителната Теорема 5 на Weierstrass, съществува зародиш

$$a(z_2, \ldots, z_n) \in \mathfrak{M}_{n-1} \lhd \mathcal{O}_{n-1}$$

на холоморфна в $0^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$ функция с $a(0^{n-1}) = 0$ и неанулираща се в околност на $0^n \in \mathbb{C}^n$ функция $u \in \mathcal{O}_n^*$, така че $f(z) = (z_1 - a(z_2, \ldots, z_n))u(z)$. Търсеното изображение е

$$\Phi = a : \Delta_{n-1}(0^{n-1}, r'') \longrightarrow \Delta(0, r_1).$$

За произволно естествено $m \geq 2$ прилагаме линейна смяна на координатите върху $\mathbb{C}^m$, така че $J'(f)(0^n) = \frac{\partial f}{\partial z'}(0^n) = E_m$ да е единичната матрица. Тогава $\frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0^n) = 1$ и съгласно случая $m = 1$ съществуват полидиск $\Delta_n(0^n, r)$ и холоморфна функция $\Phi_1 : \Delta_{n-1}(0^{n-1}, (r_2, \ldots, r_n)) \to \Delta(0, r_1)$ с $\Phi_1(0^{n-1}) = 0$, така че $f_1(z) = 0$ тогава и само тогава, когато $z_1 = \Phi_1(z_2, \ldots, z_n)$.
Холоморфното изображение

$$g : \Delta_{n-1}(0^{n-1}, (r_2, \ldots, r_n)) \longrightarrow \mathbb{C}^{m-1},$$

$$g(z_2, \ldots, z_n) = (g_2(z_2, \ldots, z_n), \ldots, g_m(z_2, \ldots, z_m)) :=$$
$$(f_2(\Phi_1(z_2, \ldots, z_n), z_2, \ldots, z_n), \ldots, f_m(\Phi_1(z_2, \ldots, z_n), z_2, \ldots, z_n))$$

има стойност $g(0^{n-1}) = 0^{m-1}$ и

$$\frac{\partial(g_2, \ldots, g_m)}{\partial(z_2, \ldots, z_m)}(0^{n-1}) = E_{m-1}.$$

По индукционно предположение, след евентуално свиване на полидиска $\Delta_n(0^n, r)$ съществува холоморфно изображение

$$\psi : \Delta_{n-m}(0^{n-m}, r'') \longrightarrow \Delta_{n-1}(0^{m-1}, (r_2, \ldots, r_m))$$

с $\psi(0^{n-m}) = 0^{m-1}$, така че $g(z_2, \ldots, z_n) = 0^{m-1}$ тогава и само тогава, когато $\psi(z'') = (z_2, \ldots, z_m)$.
Сега $f(z) = 0^m$ за $z \in \Delta_n(0^n, r)$ точно когато $z_1 = \Phi_1(z_2, \ldots, z_n)$ и $g_2(z_2, \ldots, z_m) = 0^{m-1}$. Следователно изображението

$$\Phi(z'') := (\Phi_1(\psi(z''), z''), \psi(z''))$$

приема стойност $\Phi(z'') = z'$ тогава и само тогава, когато $f(z) = 0^m$, Q.E.D.

Задача 3.6. *Нека $\mathcal{O}_3$ е пръстенът на зародишите на холоморфните функции на z_1, z_2, z_3 в околност на 0^3 върху $\mathbb{C}^3$, а $\mathcal{O}_2'$ е пръстенът на зародишите на холоморфните функции на z_2, z_3 в околност на 0^2 върху $\mathbb{C}^2$. Означаваме с $\mathfrak{M}_3$ максималния идеал на $\mathcal{O}_3$, а с $\mathfrak{M}_2'$ - максималния идеал на $\mathcal{O}_2'$. Да допуснем, че $f_1 \in \mathcal{O}_3$, $f_1 - f_1(0^3) \not\in \mathfrak{M}_2' + \mathfrak{M}_3^2$ и $f_2 \in \mathcal{O}_2'$, $f_2 - f_2(0^2) \not\in (\mathfrak{M}_2')^2$. Да се докаже, че съществуват достатъчно малко $r \in \mathbb{R}^{>0}$ и холоморфни функции*

$$\Phi : \Delta(0, r) \times \Delta(0, r) \longrightarrow \Delta(0, r), \quad \psi : \Delta(0, r) \to \Delta(0, r),$$

така че комплексно аналитичното пространство $Z(f_1, f_2)$ на общите нули на f_1 и f_2 се задава с уравненията $z_1 = \Phi(\psi(z_3), z_3)$, $z_2 = \psi(z_3)$ или с уравненията $z_1 = \Psi(z_2, \psi(z_2))$, $z_3 = \psi(z_2)$.

3. Геометрична структура върху топологично пространство

С доказаната по-горе Теорема 9 за неявното изображение установихме, че ако $f : U \to \mathbb{C}^m$ е холоморфно изображение в околност $0^n \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ и $J'(f) = \frac{\partial f}{\partial z'}$ има максимален ранг в U, то аналитичното пространство $Z = f^{-1}(0^m)$ изглежда като $\mathbb{C}^{n-m}$ в околност на 0^n върху $\mathbb{C}^n$. Това е основен пример за комплексно многообразие.

Топологичното пространство $\mathbb{C}^n$ има изброима база, съставена от кълбетата

$$B(p, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C}^n \ \ | \ \ ||z - p|| < \varepsilon\}$$

с рационални радиуси $\varepsilon \in \mathbb{Q}^{>0}$, чиито центрове $p = (p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{Q}(i)^n$ са наредени n-торки Гаусови числа, т.е. $p_j \in \mathbb{Q}(i) := \{a + bi \ \ | \ \ a, b \in \mathbb{Q}\}$. Поточно, за произволно отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{C}^n$ и произволна точка $q \in U$ съществува достатъчно малко положително рационално число ε, така че кълбото $B(q, 2\varepsilon) \subseteq U$ с център q и радиус 2ε да се съдържа в U. Избираме точка $p \in B(q, \varepsilon) \cap \mathbb{Q}(i)^n$ и твърдим, че $q \in B(p, \varepsilon) \subseteq B(q, 2\varepsilon) \subseteq U$. Наистина, $p \in B(q, \varepsilon)$ е равносилно на $||p - q|| < \varepsilon$, а оттам и на $q \in B(p, \varepsilon)$. За произволна точка $z \in B(p, \varepsilon)$, неравенството на триъгълника

$$||z - q|| \leq ||z - p|| + ||p - q|| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

показва, че $z \in B(q, 2\varepsilon) \subseteq U$, така че $B(p, \varepsilon) \subseteq U$.

Реалните диференцируеми многообразия са пространства, които изглеждат локално като отворени подмножества на $\mathbb{R}^n$. Аналогично, комплексните многообразия би трябвало да изглеждат локално като отворени подмножества на $\mathbb{C}^n$. За да се убедим, че това не е достатъчно, да анализираме някои свойства на множеството $\mathbb{C}^n$ на наредените n-торки комплексни числа. То може да се разглежда като Хаусдорфово топологично пространство с изброима база на топологията, като гладко $\mathbb{R}$-диференцируемо многообразие, изоморфно на $\mathbb{R}^{2n}$ или като комплексно многообразие, в зависимост от това с какъв тип глобални функции е снабдено.

Нека X е Хаусдорфово топологично пространство с изброима база на топологията. За произволно отворено подмножество $U \subseteq X$ да означим с $C(U)$ пръстена на непрекъснатите функции $f : U \to \mathbb{C}$ с поточково определени събиране $(f + g)(u) := f(u) + g(u)$ и умножение $(fg)(u) := f(u)g(u)$ за $\forall u \in U$.

Определение 3.7. *Геометрична структура $\mathcal{O}$ върху Хаусдорфово топологично пространство X с изброима база е фамилия от подпръстени $\mathcal{O}(U) \subseteq C(U)$ за всички отворени подмножества $U \subseteq X$, така че:*
(i) постоянните функции принадлежат на $\mathcal{O}(U)$;
(ii) ако $f \in \mathcal{O}(U)$ и $V \subseteq U$, то ограничението $f|_V \in \mathcal{O}(V)$;
(iii) ако $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$, $i \in I$ е фамилия от съгласувани функции

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j} \quad \text{за} \quad \forall i, j \in I$$

и $U = \cup_{i \in I} U_i$, то съществува единствена функция $f \in \mathcal{O}(U)$, така че

$$f|_{U_i} = f_i \quad \text{за} \quad \forall i \in I.$$

Двойката $(X, \mathcal{O})$ се нарича геометрично пространство.

Условията (ii) и (iii) показват, че понятието геометрична структура е локално. То е подготовка за определяне на термина сноп над топологично пространство X с изброима база на топологията.

Непосредствено се вижда, че произволно отворено подмножество $D \subseteq \mathbb{C}^n$ образува геометрично пространство $(D, \mathcal{O})$, чиято геометрична структура се състои от пръстените $\mathcal{O}(U)$ на холоморфните функции върху отворените подмножества $U \subseteq D$.

Ако $D_o \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено множество и за всяко отворено подмножество $U \subseteq D_o$ пръстенът $\mathcal{A}(U)$ се състои от безкрайно $\mathbb{R}$-диференцируемите функции върху U, то двойката $(D_o, \mathcal{A})$ е също геометрично пространство.

Задача 3.8. *Нека $Z \subset \mathbb{C}^3$ е комлексно аналитичната хиперповърхнина с уравнение $z_1^2 + z_2^2 - z_3^3 = 0$, а $\mathcal{O}$ е геометричната структура върху $\mathbb{C}^3$, съставена от пръстените $\mathcal{O}(U)$ на холоморфните функции върху отворените подмножества $U \subseteq \mathbb{C}^3$. Да се провери, че $\mathcal{O}|_Z$ е геометрична стурктура върху Z.*

Определение 3.9. *Морфизъм $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ на геометрични пространства е непрекъснато изображение $f : X \to Y$, което издърпва геометричната структура на Y в геометричната структура на X. С други думи, за произволно отворено подмножество $V \subseteq Y$ и произволна функция $g \in \mathcal{O}_Y(V)$ композицията $g \circ f \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ е функция от геометричната структура на X върху отвореното подмножество $f^{-1}(V) \subseteq X$.*

Нека $D \subseteq \mathbb{C}^n$ и $E \subseteq \mathbb{C}^m$ са отворени подмножества. Разглеждаме ги като геометрични пространства $(D, \mathcal{O})$, съответно $(E, \mathcal{O})$ относно структурите $\mathcal{O}$, съставени от холоморфните функции върху отворените подмножества на D, съответно на E. Тогава съгласно Лема 1.9, морфизмите $f : (D, \mathcal{O}) \to (E, \mathcal{O})$ са точно холоморфните изображения $f = (f_1, \dots, f_m) : D \to E \subseteq \mathbb{C}^m$.
Произволен морфизъм $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ задава хомоморфизми на пръстени

$$f^* : \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$$

за произволни отворени подмножества $V \subseteq Y$. Това се дължи на

$$f^*(g_1 + g_2) = (g_1 + g_2) \circ f = g_1 \circ f + g_2 \circ f = f^*(g_1) + f^*(g_2) \quad \text{и на}$$

$$f^*(g_1 g_2) = (g_1 g_2) \circ f = (g_1 \circ f)(g_2 \circ f) = f^*(g_1) f^*(g_2) \quad \text{за} \quad \forall g_1, g_2 \in \mathcal{O}_Y(V).$$

Морфизмът $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ е изоморфизъм, ако съществува морфизъм $f^{-1} : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$, така че $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{(X, \mathcal{O}_X)}$, $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{(Y, \mathcal{O}_Y)}$. Произволен изоморфизъм $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ задава хомеоморфизъм $f : X \to Y$ и изоморфизми на пръстени $f^* : \mathcal{O}_Y(V) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ за всички отворени $V \subseteq Y$. По-точно, хомоморфизмите на пръстени $(f^{-1})^* : \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)) \to \mathcal{O}_Y(V)$ са обратни на f^*, съгласно

$$(f^{-1})^* f^*(g) = (f^{-1})^*(g \circ f) = (g \circ f) \circ f^{-1} = g \quad \text{за} \quad \forall g \in \mathcal{O}_Y(V) \quad \text{и}$$

$$f^*(f^{-1})^*(\varphi) = f^*(\varphi \circ f^{-1}) = (\varphi \circ f^{-1}) \circ f = \varphi \quad \text{за} \quad \forall \varphi \in \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)).$$

Твърдим, че ако хомеоморфизъм $f : X \to Y$ индуцира изоморфизми на пръстени

$$f^* : \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \mathcal{O}_X(f^{-1}(V)),$$
$$f^*(g) = g \circ f$$

за произволни отворени подмножества $V \subseteq Y$, то $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ е изоморфизъм на геометрични пространства. По-точно, от $f^* \mathcal{O}_Y(V) \subseteq \mathcal{O}_X(f^{-1}(V))$ следва, че $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ е морфизъм на геометрични пространства. Произволно отворено подмножество $U \subseteq X$ има отворен образ $f(U) \subseteq Y$. Обратният хомоморфизъм

$$(f^*)^{-1} : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow \mathcal{O}_Y(f(U)),$$
$$(f^*)^{-1} h = h \circ f^{-1} = (f^{-1})^* h$$

се индуцира от f^{-1} и включването $(f^{-1})^* \mathcal{O}_X(U) = (f^*)^{-1} \mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{O}_Y(f(U)) = \mathcal{O}_Y((f^{-1})^{-1} U)$ доказва, че $f^{-1} : (Y, \mathcal{O}_Y) \to (X, \mathcal{O}_X)$ е морфизъм на геометрични пространства.

4. Определение за комплексно многообразие чрез геометрична структура

Произволно отворено подмножество $U \subseteq X$ на носителя X на геометрично пространство $(X, \mathcal{O}_X)$ наследява геометричната структура $\mathcal{O}_X$ на X. По-точно, геометричната структура $\mathcal{O}_X|_U$ на U съпоставя на отворено подмножество $V \subseteq U$ пръстена $\mathcal{O}_X|_U(V) := \mathcal{O}_X(V)$. Естественото влагане $(U, \mathcal{O}_X|_U) \hookrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$ се оказва морфизъм за така определената структура $\mathcal{O}_U$.

Определение 3.10. *Комплексно многообразие е геометрично пространство $(X, \mathcal{O}_X)$, в което всяка точка $p \in X$ има такава отворена околност $p \in U_p \subseteq X$, за която геометричното пространство $(U, \mathcal{O}_X|_U)$ е изоморфно на $(D, \mathcal{O})$ за отворено подмножество $D \subseteq \mathbb{C}^n$ и геометричната структура на $\mathcal{O}$ на холоморфните функции върху отворените подмножества на D.*
Естественото число n се нарича размерност на комплексното многообразие X в точката p и се бележи с $\dim_p X$.

Определяме локалния пръстен на X в $p \in X$ като проективната граница

$$\mathcal{O}_{X,p} := \lim_{p \in U} \mathcal{O}_X(U)$$

на пръстените $\mathcal{O}_X(U)$ за отворените подмножества U на X, съдържащи p. Сравнявайки с определението на пръстена $\mathcal{O}_n$ на зародишите на холоморфните в 0^n функции върху $\mathbb{C}^n$, стигаме до извода, че пръстените $\mathcal{O}_{X,p} \simeq \mathcal{O}_n$ са изоморфни. Съгласно Твърдение 1.11, пръстенът $\mathcal{O}_{X,p}$ е локален и единственият му максимален идеал

$$\mathfrak{M}_{X,p} := \{f \in \mathcal{O}_{X,p} \mid f(p) = 0\}$$

има фактор $\mathfrak{M}_{X,p}/\mathfrak{M}^2_{X,p}$ по своя квадрат с размерност $\dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{M}_{X,p}/\mathfrak{M}^2_{X,p} = n$ като линейно пространство над $\mathbb{C}$. Оттук следва, че размерността $\dim_p X = n$ на комплексно многообразие X в точка p се запазва под действие на локални изоморфизми и е коректно определена.
Още повече, функцията

$$X \longrightarrow \mathbb{N},$$

$$p \mapsto \dim_p X$$

е локално постоянна, а оттам и постоянна върху всяка свързана компонента X_o на X. Определяме размерността на X_o като размерността $\dim X_o := \dim_p X_o$ в коя и да е точка $p \in X_o$.
Свързаните комплексни многообразия с размерност 1 се наричат комплексни криви или Риманови повърхнини.
Морфизмите на комплексни многообразия ще наричаме също холоморфни изображения, вземайки предвид Лема 1.9, съгласно която $f : (D, \mathcal{O}) \to (E, \mathcal{O})$ е морфизъм на геометричните структури на холоморфните функции върху отворени подмножества $D \subseteq \mathbb{C}^n$ и $E \subseteq \mathbb{C}^m$ са точно холоморфните изображения $f : D \to E$. Изоморфизмите на комплексни многообразия ще наричаме също бихоломорфни изображения или бихоломорфизми.

Задача 3.11. *Да се докаже, че комплексно аналитичното пространство $Z \subset \mathbb{C}^3$ с уравнение $z_1^2 + z_2^2 - z_3^3 = 0$ не е комплексно многообразие. По-точно, не съществуват отворени околности $0^3 \in V \subseteq Z$ и $0^2 \in U \subseteq \mathbb{C}^2$, за които геометричните пространства $(V, \mathcal{O}_Z|_V)$ и $(U, \mathcal{O}_U)$ са изоморфни.*

5. Определение за комплексно многообразие чрез карти и атлас

По аналогия с определението за безкрайно $\mathbb{R}$-диференцируемо многообразие чрез атлас от карти, които са съгласувани с безкрайно $\mathbb{R}$-диференцируеми изображения, можем да определим понятието комплексно многообразие чрез атлас от холоморфно съгласувани карти. Нека X е Хаусдорфово топологично пространство с изброима база на топологията. Холоморфен атлас върху X е фамилия $\{(U_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$ от наредени двойки (U_i, Φ_i), съставени от отворено подмножество $U_i \subseteq X$ и хомеоморфизъм $\Phi_i : U_i \to D_i$ върху отворено подмножество $D_i \subset \mathbb{C}^n$. Фамилията от отворени подмножества $\{U_i\}_{i \in I}$ е покритие на $X = \cup_{i \in I} U_i$. Функциите на прехода

$$g_{ij} := \Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \Phi_j(U_i \cap U_j) \longrightarrow \Phi_i(U_i \cap U_j)$$

са бихоломорфни. Да забележим, че хомеоморфизмите Φ_i, Φ_j^{-1} винаги имат хомеоморфна композиция $g_{i,j} = \Phi_i \circ \Phi_j^{-1}$, а изискването за холоморфност на $g_{i,j}$ и на $g_{i,j}^{-1}$ задава геометричната структура на X. Хомеоморфизмите $\Phi_i : U_i \to D_i \subseteq \mathbb{C}^n$ се наричат координатни карти.

Твърдение 3.12. *Задаването на геометрична структура на комплексно многообразие върху Хаусдорфово топологично пространство X с изброима база на топологията е еквивалентно на задаване на холоморфен атлас върху X.*

Доказателство: Да предположим, че геометричното пространство $(X, \mathcal{O}_X)$ изпълнява условията от Определение 3.10 за комплексно многообразие. Тогава всяка точка $p \in X$ има отворена околност $p \in U_p \subseteq X$ с изоморфизъм на геометрични пространства $\Phi_p : (U_p, \mathcal{O}_x|_{U_p}) \to (D_p, \mathcal{O})$ за отворена околност $0^n \in D_p \subseteq \mathbb{C}^n$ на $\Phi_p(p) = 0^n$. В резултат, функциите на прехода

$$g_{p,q} : \Phi_p \circ \Phi_q^{-1} : \Phi_q(U_p \cap U_q) \longrightarrow \Phi_p(U_p \cap U_q)$$

са изоморфизми на геометрични пространства, а оттам и бихоломорфизми.
Обратно, нека X е Хаусдорфово топологично пространство с изброима база на топологията, върху което е зададен холоморфен атлас $\{(U_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$. За произволно отворено подмножество $U \subseteq X$, нека пръстенът

$$\mathcal{O}_X(U) := \{f \in C(U) \ \mid \ (f|_{U \cap U_i}) \circ \Phi_i^{-1} \in \mathcal{O}(\Phi_i(U \cap U_i)), \ \ \forall i \in I\}$$

се състои от онези непрекъснати функции върху U, за които композициите

$$(f|_{U \cap U_i}) \circ \Phi_i^{-1} : \Phi_i(U \cap U_i) \longrightarrow \mathbb{C}$$

са холоморфни функции върху отворените подмножества $\Phi_i(U \cap U_i) \subseteq \mathbb{C}^n$ за всички $i \in I$. Ясно е, че постоянните функции $f : U \to \{a\} \subset \mathbb{C}^n$ принадлежат на $\mathcal{O}_X(U)$ за всяко отворено подмножество $U \subseteq X$. Ако $V \subseteq U$ са отворени подмножества на X и $f \in \mathcal{O}_X(U)$, то $f|_V \in \mathcal{O}_X(V)$, защото от холоморфността на функциите $(f|_{U \cap U_i}) \circ \Phi_i^{-1} : \Phi_i(U \cap U_i) \to \mathbb{C}$ за $\forall i \in I$ следва холоморфността на техните ограничения $(f|_{V \cap U_i}) \circ \Phi_i^{-1} : \Phi_i(V \cap U_i) \to \mathbb{C}$. Нека $V = \cup_{\alpha \in A} V_\alpha$ е обединение на отворени подмножества $V_\alpha \subseteq X$, а $f_\alpha \in \mathcal{O}_X(V_\alpha)$ е фамилия от съгласувани функции $f_\alpha|_{V_\alpha \cap V_\beta} = f_\beta|_{V_\alpha \cap V_\beta}$. Определяме

$$f : V \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$f(p) := f_\alpha(p) \quad \text{за} \quad \forall p \in V_\alpha.$$

Функцията f е коректно зададена, т.е. стойността и в точка $p \in V$ не зависи от избора на индекс $\alpha \in A$ с $p \in V_\alpha$. За произволно $i \in I$ твърдим, че функцията

$$(f|_{V \cap U_i}) \circ \Phi_i^{-1} : \Phi_i(V \cap U_i) \longrightarrow \mathbb{C}$$

е холоморфна. За целта е достатъчно да забележим, че всяка точка $p \in V \cap U_i$ има отворена околност $p \in V_\alpha \cap U_i \subseteq V \cap U_i$, така че

$$(f|_{V \cap U_i}) \circ \Phi_i^{-1} = (f_\alpha|_{V_\alpha \cap U_i}) \circ \Phi_i^{-1} : \Phi_i(V_\alpha \cap U_i) \longrightarrow \mathbb{C}$$

е холоморфна функция, съгласно $f_\alpha \in \mathcal{O}_X(V_\alpha)$. Горните разглеждания проверяват верността на условията (i), (ii) и (iii) от Определение 3.7 и доказват, че определената по-горе двойка $(X, \mathcal{O}_X)$ е геометрично пространство.
Всяка точка $p \in X$ има околност $p \in U_i \subseteq X$ с

$$\mathcal{O}_X(U_i) = \{f \in C(U_i) \ \mid \ f \circ \Phi_i^{-1} \in \mathcal{O}(\Phi_i(U_i))\}.$$

Хомеоморфизмът

$$\Phi_i : (U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i}) \longrightarrow (\Phi_i(U_i), \mathcal{O})$$

е изоморфизъм на геометрични пространства, защото за всяко отворено подмножество $W \subseteq \Phi_i(U_i)$ хомоморфизмът

$$\Phi_i^* : \mathcal{O}(W) \longrightarrow \mathcal{O}_X(\Phi_i^{-1}(W))$$

$$\Phi_i^*(g) := g \circ \Phi_i$$

е изоморфизъм на пръстени, Q.E.D.

6. Комплексно проективно пространство

В този параграф ще определим комплексното проективно пространство $\mathbb{P}^n$ като множество и ще зададем геометрична структура, която го превръща в комплексно многообразие.
Проективното пространство $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ е множеството на правите в $\mathbb{C}^{n+1}$ през началото $0^{n+1} \in \mathbb{C}^{n+1}$. Всяка такава права се поражда от ненулев вектор $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$. Ненулевите вектори $a, b \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$ определят една и съща права тогава и само тогава, когато $a = \lambda b$ за някое $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Мултипликативната група $\mathbb{C}^*$ на полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа действа върху $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$ чрез покомпонентно умножение,

$$\mathbb{C}^* \times (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}) \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\},$$

$$(\lambda, (a_0, a_1, \dots, a_n)) \mapsto \lambda a = (\lambda a_0, \lambda a_1, \dots, \lambda a_n).$$

По-точно, $1.a = a$ и $(\lambda\mu)a = \lambda(\mu a)$ за $\forall a \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}^*$. Множеството

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}/\mathbb{C}^*$$

на правите през началото $0^{n+1} \in \mathbb{C}^{n+1}$ може да се отъждестви с множеството на $\mathbb{C}^*$-орбитите върху $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$. Проекцията

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\} \longrightarrow \mathbb{P}^n,$$

$$\pi(a) = [a] = [a_0 : a_1 : \ldots : a_n]$$

съпоставя на точка $a = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$ нейната $\mathbb{C}^*$-орбита $[a]$. Компонентите $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ на a се наричат хомогенни координати на $[a]$ и са определени с точност до множител $\lambda \in \mathbb{C}^*$, т.е. $[a] = [b]$ точно когато $b_0 = \lambda a_0$, $b_1 = \lambda a_1, \dots,$ $b_n = \lambda a_n$ за някое $\lambda \in \mathbb{C}^*$.
Разглеждаме $\mathbb{P}^n$ с фактор-топологията, индуцирана от метричната топология върху $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$. По определение, това означава, че подмножество $U \subseteq \mathbb{P}^n$ е отворено тогава и само тогава, когато праобразът му $\pi^{-1}(U)$ е отворен в $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$. Това условие е еквивалентно на непрекъснатост и отвореност на проекцията $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\} \to \mathbb{P}^n$. Твърдим, че $\mathbb{P}^n$ е компактно и Хаусдорфово относно фактор-топологията, индуцирана от метричната топология върху

$\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$. За целта използваме, че всяка точка $[a] \in \mathbb{P}^n$ има представител a от единичната сфера

$$S^{2n+1} = \{z = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \;\; | \;\; ||z||^2 = |z_0|^2 + |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 = 1\}$$

с реална размерност $2n+1$. Подгрупата

$$S^1 := \{\lambda \in \mathbb{C}^* \;\; | \;\; |\lambda| = 1\}$$

на $\mathbb{C}^*$ действа върху S^{2n+1} и фактор-пространството $S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{P}^n$ съвпада с проективното пространство $\mathbb{P}^n$. Топологията върху S^{2n+1} е индуцирана от влагането $S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$ и проекцията $\pi : S^{2n+1} \to \mathbb{P}^n$ е непрекъснато и отворено изображение. Затова от компактността на S^{2n+1} следва компактността на $\mathbb{P}^n$. С други думи, всяко отворено покритие $\mathbb{P}^n = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ се повдига до отворено покритие $S^{2n+1} = \cup_{\alpha \in A} [\pi^{-1}(U_\alpha) \cap S^{2n+1}]$. Сферата $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$ е затворена и ограничена, а оттам и компактна относно метричната топология на $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$. Затова съществува крайно подпокритие $S^{2n+1} = \cup_{j=1}^m [\pi^{-1}(U_j) \cap S^{2n+1}]$ на S^{2n+1}, което се изобразява в крайно подпокритие $\mathbb{P}^n = \pi S^{2n+1} = \cup_{j=1}^m U_j$ на $\mathbb{P}^n$. За да обясним защо топологията върху $\mathbb{P}^n$ е Хаусдорфова, да изберем различни точки $[a], [b] \in \mathbb{P}^n$ и техни представители $a, b \in S^{2n+1}$. Орбитите $\mathrm{Orb}_{S^1}(a) = \{\mu a \;\; | \;\; \mu \in S^1\}$ и $\mathrm{Orb}_{S^1}(b)$ не се пресичат. Избираме достатъчно малко $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, така че обединението $\cup_{\mu \in S^1} B(\mu a, \varepsilon)$ на кълбетата с центрове в $\mathrm{Orb}_{S^1}(a)$ и радиус ε да не се пресичат с обединението $\cup_{\nu \in S^1} B(\nu b, \varepsilon)$ на кълбетата с центрове в $\mathrm{Orb}_{S^1}(b)$ и радиус ε. Твърдим, че отворените околности $\pi B(a, \varepsilon)$ и $\pi B(b, \varepsilon)$ на $[a]$ и $[b]$ върху $\mathbb{P}^n$ имат празно сечение $\pi B(a, \varepsilon) \cap \pi B(b, \varepsilon) = \emptyset$. В противен случай съществува точка $[c] \in \pi B(a, \varepsilon) \cap \pi B(b, \varepsilon)$ с представители $p \in B(a, \varepsilon) \cap S^{2n+1}$ и $q \in B(b, \varepsilon) \cap S^{2n+1}$. Точките p, q са от една и съща S^1-орбита върху S^{2n+1}, т.е. $q = \lambda p$ за някое $\lambda \in S^1$. Вземайки предвид

$$||q - b|| = ||\lambda p - b|| = ||\lambda(p - \lambda^{-1} b)|| = ||p - \lambda^{-1} b||,$$

стигаме до извода, че $p \in B(\lambda^{-1} b, \varepsilon)$. Това противоречи на избора на кълбета с $[\cup_{\mu \in S^1} B(\mu a, \varepsilon)] \cap [\cup_{\nu \in S^1} B(\nu b, \varepsilon)] = \emptyset$ и доказва, че фактор-топологията върху $\mathbb{P}^n$, индуцирана от метричната топология на $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\}$ е Хаусдорфова.

Ще въведем такава структура на комплексно многообразие върху $\mathbb{P}^n$, относно която проекцията $\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0^{n+1}\} \to \mathbb{P}^n$ е холоморфно изображение. Това означава, че функция $f : U \to \mathbb{C}$ върху отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{P}^n$ е холоморфна точно когато издърпването и $\pi^* f = f \circ \pi : \pi^{-1}(U) \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция с едни и същи стойности върху всяка комплексна права в $\mathbb{C}^{n+1}$ през началото 0^{n+1}. Това ни кара да определим

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U) := \{f \in C(U) \,|\, \pi^* f = f \circ \pi \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U)),\, f \circ \pi(\lambda a) = f \circ \pi(a) \text{ за } \forall \lambda \in \mathbb{C}^*\}.$$

Проверяваме, че съответствието $U \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$ върху отворените подмножества $U \subseteq \mathbb{P}^n$ е геометрична структура. Постоянните функции $f : U \to \{\zeta\} \subset \mathbb{C}$ са от $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$. Ако $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$ и $V \subseteq U$ е отворено подмножество, то $f|_V \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(V)$, защото $\pi^* f|_V = f|_V \circ \pi \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(V))$ и $f \circ \pi(\lambda a) = f \circ (a)$ за $\forall a \in \pi^{-1}(V) \subseteq \pi^{-1}(U)$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$. Нека $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ е фамилия от наредени двойки (U_α, f_α), съставени от отворени подмножества $U_\alpha \subseteq \mathbb{P}^n$ и функции $f_\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U_\alpha)$, които са съгласувани върху всички $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, $f_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = f_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$. Задаваме $f : U \to \mathbb{C}$, $f(p) := f_\alpha(p)$ за $\forall p \in U_\alpha$ и забелязваме, че f е коректно определено, благодарение на условията за съгласуване $f_\alpha(p) = f_\beta(p)$ за $\forall \alpha, \beta \in A$ с $U_\alpha \cap U_\beta \ni p$. Холоморфността на функция е локално понятие, така че $\pi^* f = f \circ \pi \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(\cup_{\alpha \in A} U_\alpha)) = \mathcal{O}(\cup_{\alpha \in A} \pi^{-1}(U_\alpha))$, съгласно $f \circ \pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} = f_\alpha \circ \pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} \in \mathcal{O}(\pi^{-1}(U_\alpha))$ за $\forall \alpha \in A$. Освен това, $f \circ \pi(p) = f_\alpha \circ \pi(p) = f_\alpha \circ \pi(\lambda p) = f \circ \pi(\lambda p)$

за $\forall p \in U_\alpha$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}^*$, така че $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\cup_{\alpha \in A} U_\alpha)$ и $U \mapsto \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(U)$ е геометрична структура върху $\mathbb{P}^n$, съгласно Определение 3.7.
За да установим, че $\mathbb{P}^n$ е комплексно многообразие относно тази геометрична стурктура забелязваме, че $\mathbb{P}^n = \cup_{i=0}^n U_i$ се покрива от стандартните афинни отворени подмножества

$$U_i := \{[a] = [a_0 : a_1 : \ldots : a_n] \in \mathbb{P}^n \quad | \quad a_i \neq 0\}$$

с хомеоморфизми

$$\Phi_i : U_i \to \mathbb{C}^n,$$
$$\Phi_i([a]) = \left(\frac{a_0}{a_i}, \ldots, \frac{a_{i-1}}{a_i}, \frac{a_{i+1}}{a_i}, \ldots, \frac{a_n}{a_i} \right).$$

Обратните изображения са

$$\Phi_i^{-1} : \mathbb{C}^n \longrightarrow U_i,$$
$$\Phi_i^{-1}(z_1, \ldots, z_n) = [z_1 : \ldots : z_{i-1} : 1 : z_{i+1} : \ldots : z_n] \quad \text{за} \quad \forall (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Твърдим, че $\Phi_i : (U_i, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_i}) \to (\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ са изоморфизми на геометрични пространства. Ще проверим, че $\Phi_0 : (U_0, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}|_{U_0}) \to (\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ е изоморфизъм на геометрични пространства. За останалите стойности на i разглежданията са аналогични. Понеже

$$\Phi_0 : U_0 \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$
$$\Phi_0([a]) = \left(\frac{a_1}{a_0}, \ldots, \frac{a_n}{a_0} \right)$$

е хомеоморфизъм, достатъчно е да се уверим, че

$$\Phi_0^* : \mathcal{O}(D) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\Phi_0^{-1}(D)),$$
$$\Phi_0^*(f) := f \circ \Phi_0$$

е изоморфизъм на пръстени за произволно отворено подмножество $D \subseteq \mathbb{C}^n$. С други думи, непрекъсната функция $f : D \to \mathbb{C}$ е холоморфна тогава и само тогава, когато функцията $f \circ \Phi_0 \circ \pi : (\Phi_0 \circ \pi)^{-1}(D) \to \mathbb{C}$ е холоморфна. Възоснова на

$$f(z_1, \ldots, z_n) = f \circ \Phi_0 \circ \pi(1, z_1, \ldots, z_n),$$

от холоморфността на $f \circ \Phi_0 \circ \pi$ следва холоморфността на f. От друга страна, върху отвореното подмножество

$$W_0 := \pi^{-1}(U_0) = \{(z_0, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \quad | \quad z_0 \neq 0\}$$

имаме

$$f \circ \Phi_0 \circ \pi(z_0, z_1, \ldots, z_n) = f\left(\frac{z_1}{z_0}, \ldots, \frac{z_n}{z_0} \right),$$

така че от холоморфността на f следва холоморфността на $f \circ \Phi_0 \circ \pi$ върху W_0. С това сме доказали, че $\mathbb{P}^n$ е комплексно многообразие относно зададената геометрична структура, Q.E.D.

Задача 3.13. *Произволно подпространство* $V \subset \mathbb{C}^{n+1}$ *с* $\dim_{\mathbb{C}} V = k+1 < n+1$ *е комплексно многообразие относно геометричната структура, наследена от* $(\mathbb{C}^{n+1}, \mathcal{O})$. *Разглеждаме множеството* $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^k(\mathbb{C})$ *на правите във* V *през началото с геометричната структура, относно която проекцията*

$$\pi_V : V \setminus \{0^{n+1}\} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

е холоморфно изображение. Да се провери, че $\mathbb{P}(V)$ *е* k*-мерно комплексно многообразие и комплексно аналитично подпространство на* $\mathbb{P}^n$.