Глава 2

Ньотеровост и еднозначно разлагане на зародиши на холоморфни функции

Продължаваме с изучаване на зародишите на холоморфните в $0^n \in \mathbb{C}^n$ функции. Да напомним, че $u \in \mathcal{O}_n^*$ точно когато $u(0^n) \neq 0$ В такъв случай $u^{-1} = \frac{1}{u}$. Ако не е казано противното, отъждествяваме зародишите с техни представители.

1. Локална форма на зародиш на холоморфна функция на една комплексна променлива

Твърдение 2.1. *За произволен зародиш $f \in \mathcal{O}_1 \setminus \{0\}$ на холоморфна функция на една комплексна променлива съществуват неотрицателно цяло число $m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ и обратим елемент $u \in \mathcal{O}_1^*$, така че*

$$f = z^m u.$$

Доказателство: Разлагаме $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0)\frac{z^k}{k!}$ в Тейлъров ред в околност $0 \in U \subseteq \mathbb{C}$. Съгласно $f \neq 0 \in \mathcal{O}_1$ съществува неотрицателно цяло число k, така че $\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0) \neq 0$. Означаваме с m минималното неотрицателно цяло с $\frac{\partial^m f}{\partial z^m}(0) \neq 0$. Тогава

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0)\frac{z^k}{k!} = z^m \left[\sum_{k=m}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0)\frac{z^{k-m}}{k!} \right].$$

Остава да проверим, че степенният ред

$$u(z) := \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0)\frac{z^{k-m}}{k!}$$

е абсолютно и равномерно сходящ върху компактните подмножества от достатъчно малка околност на 0 върху $\mathbb{C}$. Това е достатъчно поради почленната диференцируемост на абсолютно и равномерно сходящите редове, която дава холоморфността на $u(z)$ в 0 и поради $u(0) = \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(0) \neq 0$, осигуряващо $u \in \mathcal{O}_1^*$. За абсолютната и равномерната сходимост на $u(z)$ използваме Следствие 1.6 или интегралните формули за производните на холоморфна функция, които гласят, че

$$\frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(0,\delta)} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta = \frac{k!}{2\pi\delta^k}\int_0^{2\pi} f(\delta e^{i\theta})e^{-ki\theta} d\theta$$

за достатъчно малко $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$. Ако $M := \max\limits_{\zeta \in \partial\Delta(0,\delta)} |f(\zeta)|$, то

$$\left| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0) \right| \leq \frac{k!}{\delta^k} M.$$

Фиксираме $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$. Тогава върху всеки компакт $K \subseteq \overline{\Delta\left(0, \frac{\delta}{N}\right)}$ е в сила

$$\Big| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0) \frac{z^{k-m}}{k!} \Big| \leq \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k!} \Big| \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(0) \Big| \left(\frac{\delta}{N} \right)^{k-m} \leq \frac{M}{\delta^m} \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{N} \right)^{k-m} = \frac{M}{\delta^m} \frac{1}{1 - \frac{1}{N}} = \frac{MN}{\delta^m (N-1)}$$

и редът $u(z)$ е абсолютно и равномерно сходящ върху K, Q.E.D.

2. Полином на Weierstrass. Подготвителна Теорема на Weierstrass.

Пръстенът $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ на полиномите на z_n, чиито коефициенти са зародиши на холоморфни функции в $0^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$ е подпръстен на $\mathcal{O}_n$, съдържащ $\mathcal{O}_{n-1}$, т.е.

$$\mathcal{O}_{n-1} \subset \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \subset \mathcal{O}_n.$$

Определение 2.2. *Полиномите $P = z_n^d + a_1 z_n^{d-1} + \ldots + a_d \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ със старши коефициент 1 и анулиращи се в $0^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$ коефициенти $a_1, \ldots, a_d \in \mathcal{O}_{n-1}$ се наричат полиноми на Weierstrass.*

По аналогия с Твърдение 2.1, Подготвителната теорема на Weierstrass установява, че всеки зародиш $f \in \mathcal{O}_n$ може да се представи като произведение $f = Pu$ на полином на Weierstrasss $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ и обратим елемент $u \in \mathcal{O}_n^*$. За доказателството на тази теорема напомняме едно твърдение за холоморфни функции на една комплексна променлива. За неговото формулиране казваме, че свързано отворено подмножество $D \subset \mathbb{C}^n$ е едносвързано, ако границата му ∂D е хомотопна на постоянен път.

Твърдение 2.3. *Нека $D_o \subseteq \mathbb{C}$ е отворено подмножество, $D \subseteq D_o$ е ограничено свързано едносвързано отворено подмножество, чиято затворена обвивка $\overline{D} \subset D_o$ се съдържа в D_o и чиято граница ∂D е непрекъсната. Ако $f, g : D_o \to \mathbb{C}$ са нетъждествено нулеви холоморфни функции, f не се анулира в нито една точка на ∂D и $a_1, \ldots, a_k \in D$ са нулите на $f : D \to \mathbb{C}$, броени с техните кратности, то*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} g(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta = \sum_{j=1}^{k} g(a_j). \tag{2.1}$$

Доказателство: Преди всичко, уравнението $f(z) = 0$ има краен брой решения $a_1, \ldots, a_k$, броени с техните кратности, защото съгласно Твърдение 2.1, всяка точка $a \in D$ има отворена околност $a \in V_a \subseteq D_o$ с неповече от една нула на f във V_a. По-точно, ако f има кратност 0 в a, то f няма нули във V_a. Ако f има кратност $m \geq 1$ в a, то a е единствената нула на f във V_a. Покриваме $\overline{D} \subset D_o$ с такива околности и избираме крайно подпокритие, благодарение на компактността на затвореното ограничено множество $\overline{D}$.

Нека $a_1, \ldots, a_l \in D$ са различните нули на f в D с кратности $k_1, \ldots, k_l$. Тогава $k_1 + \ldots + k_l = k$. Избираме достатъчно малки дискове $\Delta(a_j, \varepsilon_j)$ за $1 \leq j \leq l$, така че затворените им обвивки $\overline{\Delta(a_j, \varepsilon_j)}$ се съдържат в D и не се пресичат две по две. Тогава функцията $g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ е холоморфна в отвореното множество $\Omega := D \setminus \left[\cup_{j=1}^{l} \overline{\Delta(a_j, \varepsilon_j)} \right]$. Съединяваме последователно с отсечки окръжностите $\partial\Delta(a_j, \varepsilon_j)$ с окръжностите $\partial\Delta(a_{j+1}, \varepsilon_{j+1})$ за $1 \leq j \leq l-1$, така че да можем да ги обходим последователно. Произведението на тези окръжности, определено като тяхното последователно обхождане е хомотопно на ∂D, съгласно едносвързаността на D. Това дава възможност да приложим Теорема 1 на Cauchy и да получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \sum_{j=1}^{l}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(a_j,\varepsilon_j)} g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta\right].$$

Възоснова на горното равенство, достатъчно е да проверим, че

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(a_j,\varepsilon_j)} g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = k_j g(a_j) \quad \text{за} \quad 1 \leq j \leq l.$$

За осъществяване на тази цел, след евентуално намаляване на радиуса $\varepsilon_j \in \mathbb{R}^{>0}$ можем да считаме, че

$$f(\zeta) = (\zeta - a_j)^{k_j}\varphi_j(\zeta), \quad g(\zeta) = (\zeta - a_j)^{m_j}\psi_j(\zeta)$$

за някакво неотрицателно цяло число m_j и никъде неанулиращи се функции $\varphi_j, \psi_j : \Delta(a_j, \varepsilon) \to \mathbb{C}$. Функцията

$$F(\zeta) := g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}(\zeta - a_j) = (\zeta - a_j)^{m_j}\frac{\psi_j(\zeta)}{\varphi_j(\zeta)}\left[k_j\varphi_j(\zeta) + (\zeta - a_j)\varphi_j'(\zeta)\right]$$

е холоморфна в $\Delta(a_j, \varepsilon_j)$ и

$$F(a_j) = \begin{cases} k_j\psi_j(a) = k_j g(a_j) & \text{за } m_j = 0, \\ 0 = k_j g(a_j) & \text{за } m_j \geq 1. \end{cases}$$

Формулата на Cauchy (Теорема 3) дава

$$k_j g(a_j) = F(a_j) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(a_j,\varepsilon_j)} \frac{F(\zeta)}{\zeta - a_j}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(a_j,\varepsilon_j)} g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta,$$

Q.E.D.

Задача 2.4. *Нека $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{C}$ са комплексни числа, а $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, R \in \mathbb{R}^{>0}$ са такива реални положителни числа, че дисковете $\Delta(z_j, \varepsilon_j)$ се съдържат в диска $\Delta(0, R)$ и не се пресичат два по два. Ако функции f и g са холоморфни в околност на затворената обвивка на областта $D := \Delta(0, R) \setminus \left[\cup_{j=1}^{m}\Delta(z_j, \varepsilon_j)\right]$ и f не се анулира върху границата ∂D, да се докаже, че*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} g(\zeta)\frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}d\zeta = \sum_{s=1}^{k} g(a_s)$$

за корените $a_1, \dots, a_k$ на $f(\zeta)$ в D, броени с техните кратности.

Определение 2.5. *Холоморфна функция $f : U \to \mathbb{C}$ в отворена околност U на 0^n върху $\mathbb{C}^n$ е регулярна относно z_n, ако $f(0^{n-1}, z_n) \not\equiv 0$ не се анулира тъждествено като холоморфна функция на една комплексна променлива.*
Ако $f : U \to \mathbb{C}$ е регулярна относно z_n, то съществуват неотрицателно цяло число d, околност $0 \in U_o \subseteq \mathbb{C}$ и холоморфна никъде неанулираща се функция $u : U_o \to \mathbb{C}$, така че $f(0^{n-1}, z_n) = z_n^d u(z_n)$. В такъв случай казваме, че f е регулярна с кратност d относно z_n.

Лема 2.6. *За произволен краен брой ненулеви зародиши $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{O}_n \setminus \{0\}$ съществува линейна смяна на координатите $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n)$, така че всеки от зародишите $f_1, \dots, f_m$ е регулярен относно t_n.*

Доказателство: Достатъчно е да намерим линейна смяна на координатите $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (t_1, \dots, t_n)$, така че произведението $f := f_1 \dots f_m \in \mathcal{O}_n \setminus \{0\}$ е регулярно относно t_n. От $f \neq 0$ следва, че всяка отворена околност $0^n \in U_0 \subseteq \mathbb{C}^n$ съдържа точка $a \in U_0 \setminus \{0^n\}$, в която $f(a) \neq 0$. Разглеждаме комплексната права $L_a := \{ta \mid t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{C}^n$ през началото $0^n \in \mathbb{C}^n$ и точката $a \in \mathbb{C}^n$. Нека U_1 е свързаната компонента на отвореното подмножество $U_0 \cap L \subseteq L$, съдържаща началото 0 на L. Съгласно Твърдение 2.1, съществува околност $0 \in U \subseteq U_1 \subseteq L$ на началото върху L, така че $f(sa) \neq 0$ за $\forall s \in U \setminus \{0\}$. Ако $a = (a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n) \in U_0 \setminus \{0^n\}$ има ненулева i-та координата $a_i \neq 0$ спрямо стандартния базис $e_1, \ldots, e_n$, то векторите $e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n, a \in \mathbb{C}^n$ са линейно независими над $\mathbb{C}$ и образуват $\mathbb{C}$-базис на $\mathbb{C}^n$. Нека линейната смяна на координатите $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (t_1, \ldots, t_n)$ отговаря на смяната на стандартния базис $e_1, \ldots, e_n$ с базиса $e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n, a$. Тогава от $f(sa) \not\equiv 0$ за $s \in U$ следва, че f е регулярна относно t_n, Q.E.D.

Задача 2.7. *Нека $f \in \mathcal{O}_1 \backslash \{0\}$ е нетъждествено нулев зародиш на холоморфна функция на една комплексна променлива, а d е произволно естествено число. Да се намери линейна смяна на координатите $(z_1, z_2) \mapsto (w_1, w_2)$ върху $\mathbb{C}^2$, привеждаща зародиша $g(z_1, z_2) = z_1^d f(z_2) \in \mathcal{O}_2$ в регулярен вид относно w_2.*

Теорема 5. (Подготвителна теорема на Weierstrass) *Ако зародишът $f \in \mathcal{O}_n$ е регулярен с кратност $d \in \mathbb{N}$ относно z_n, то съществува единствен полином на Weierstrass $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ от степен d относно z_n, така че*

$$f = Pu$$

за някакъв обратим елемент $u \in \mathcal{O}_n$.

Доказателство: Фиксираме достатъчно близка до началото $0^{n-1} \in \mathbb{C}^{n-1}$ точка $w = (z_1, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ и разглеждаме $f_w(z_n) := f(w, z_n)$ като холоморфна фукция на една комплексна променлива z_n. Понеже $f_{0^{n-1}}(z_n)$ има нула с кратност d в $z_n = 0$, за достатъчно близка до 0^{n-1} точка $w \in \mathbb{C}^{n-1}$ функцията $f_w(z_n)$ има d на брой нули $\zeta_1(w), \ldots, \zeta_d(w)$, броени с техните кратности. Ако $f = Pu$ за $u \in \mathcal{O}_n^*$ и полином $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ със старши коефициент 1, то

$$P(W, z_n) = (z_n - \zeta_1(w)) \ldots (z_n - \zeta_d(w)). \tag{2.2}$$

Основната трудност на доказателството е установяването на холоморфната зависимост на $P(w, z_n)$ от w.
Да означим със същата буква f представител на зародиша $f \in \mathcal{O}_n$, който е регулярен с кратност d относно z_n. Съгласно $f(0^{n-1}, z_n) \neq 0$ за всички $z_n \neq 0$ от достатъчно малка околност на 0 върху $\mathbb{C}$, съществувате $r, \delta \in \mathbb{R}^{>0}$, така че за $\forall z_n \in \mathbb{C}$ с $|z_n| = r$ е в сила $|f(0^{n-1}, z_n)| \geq \delta$. Поради непрекъснатостта на f, съществува $\varepsilon > 0$, така че за $\forall w \in \mathbb{C}^{n-1}$ с $||w|| \leq \varepsilon$ и $\forall z_n \in \mathbb{C}$ с $|z_n| = r$ е изпълнено $|f(w, z_n)| \geq \frac{\delta}{2}$.
За всяко фиксирано $w \in \mathbb{C}^{n-1}$ с $||w|| \leq \varepsilon$, интегралът

$$N(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\zeta \in \Delta(0,r)} \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(w, \zeta)}{f(w, \zeta)} d\zeta$$

е равен на броя на нулите на холоморфната функция $f(w, z_n)$ на z_n в диска $\Delta(0, r)$, броени с техните кратности. Съгласно Твърдение 2.3, от непрекъснатостта на $N(w)$ относно w и $N(0^{n-1}) = d$ следва, че $N(w) = d$ за

$$\forall w \in \overline{B(0^{n-1}, \varepsilon)} = \{w \in \mathbb{C}^{n-1} \quad | \quad ||w||^2 = z_1^2 + \ldots + z_n^2 \leq \varepsilon^2\}.$$

Нека $\zeta_1(w), \ldots, \zeta_d(w)$ са нулите на $f(w, z_n)$, разгледана като холоморфна функция на z_n в $\Delta(0, r)$. Означаваме със $\sigma_1(w), \ldots, \sigma_d(w)$ елементарните симетрични полиноми на $\zeta_1(w), \ldots, \zeta_d(w)$, т.е.

$$\sigma_k(w) := \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq d} \zeta_{i_1}(w) \ldots \zeta_{i_d}(w) \quad \text{за} \quad 1 \leq k \leq d$$

е сумата на всички произведения на k на брой от корените $\zeta_1(w), \ldots, \zeta_d(w)$ на $f(w, z_n)$. Съгласно Твърдение 2.3 имаме

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,r)} \zeta^k \frac{\frac{\partial f}{\partial z_n}(w,\zeta)}{f(w,\zeta)} d\zeta = \zeta_1(w)^k + \ldots + \zeta_d(w)^k$$

и тези степенни сборове са холоморфни относно w, защото можем да диференцираме под интеграла отляво. По формулите на Newton изразяваме елементарните симетрични полиноми $\sigma_1(w), \ldots, \sigma_d(w)$ чрез степенните сборове на $\zeta_1(w), \ldots, \zeta_d(w)$ с показатели $1 \leq k \leq d$ и получаваме, че $\sigma_j(w)$ са холоморфни функции на w за $\forall 1 \leq j \leq d$. Следователно коефициентите на полинома $P(w, z_n)$, определен от (2.2) са холоморфни функции на $w \in B(0^{n-1}, \varepsilon)$. Вземайки предвид $\sigma_j(0^{n-1}) = 0$ за $\forall 1 \leq j \leq d$, стигаме до извода, че $P(w, z_n)$ е полином на Weierstrass от степен d относно z_n.
За $\forall w \in B(0^{n-1}, \varepsilon)$ и $\forall z_n \in \Delta(0, r)$ разглеждаме частното

$$u(w, z_n) := \frac{f(w, z_n)}{P(w, z_n)}$$

като холоморфна функция извън нулите на $P(w, z_n)$. За фиксирано w, функцията $u(w, z_n)$ е холоморфна относно $z_n \in \Delta(0, r)$, защото има отстраними особености в $\Delta(0, r)$. По формулата на Cauchy Теорема 3 имаме

$$u(w, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,r)} \frac{u(w, z_n)}{\zeta - z_n} d\zeta,$$

така че $u(w, z_n)$ е холоморфна функция на $(w, z_n) \in B(0^{n-1}, \varepsilon) \times \Delta(0, r)$. По предположение,

$$u(0^{n-1}, z_n) = \frac{f(0^{n-1}, z_n)}{P(0^{n-1}, z_n)} = \frac{f(0^{n-1}, z_n)}{z_n^d} \neq 0,$$

така че $u(w, z_n)$ не се анулира в $B(0^{n-1}, \varepsilon) \times \Delta(0, r)$ за достатъчно малки $\varepsilon, r \in \mathbb{R}^{>0}$.
Полиномът на Weierstrass $P(w, z_n) = (z_n - \zeta_1(w)) \ldots (z_n - \zeta_d(w))$ е еднозначно определен от $f(w, z_n)$, защото корените му $\zeta_1(w), \ldots, \zeta_d(w)$ съвпадат с корените на $f(w, z_n)$, Q.E.D.

Задача 2.8. *Да се изведе Твърдение 2.1 като частен случай на Подготвителната Теорема 5 на Weierstrass.*

Задача 2.9. *Нека* $f(z_1, z_2) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_{ij} z_1^i z_2^j \in \mathbb{C}[z_1, z_2]$ *е полином на две променливи от степен* $\deg_{z_2} f = d$ *относно* z_2 *и* $a_{00} = 0$, $a_{01} \neq 0$. *Да се докаже, че съществува достатъчно малко* $r \in \mathbb{R}^{>0}$, *така че за произволна точка* $a_1 \in \Delta(0, r)$ *уравнението* $f(a_1, z_2) = 0$ *има не повече от* $d - 1$ *корена в* $\mathbb{C} \setminus \Delta(0, r)$, *а в обща точка* $a_1 \in \Delta(0, r)$ *уравнението* $f(a_1, z_2) = 0$ *има точно* $d - 1$ *корена в* $\mathbb{C} \setminus \Delta(0, r)$.

3. Теорема на Weierstrass за деление

Теорема 6. (Теорема на Weierstrass за деление) *Нека* $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ *е полином на Weierstrass от степен* d *относно* z_n, *а* $f \in \mathcal{O}_n$. *Тогава съществуват еднозначно определени частно* $q \in \mathcal{O}_n$ *и остатък* $R \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, *чиято степен относно* z_n *е строго по-малка от* d, *така че*

$$f = qP + R.$$

Още повече, ако $f \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, *то и* $q \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.

Доказателство: Избираме достатъчно малки $\varepsilon, \rho \in \mathbb{R}^{>0}$, така че за всяко $w \in B(0^{n-1}, \varepsilon) = \{w \in \mathbb{C}^{n-1} \mid ||w|| < \varepsilon\}$ полиномът $P(w, z_n)$ да има точно d нули в диска $\Delta(0, \rho)$. За произволни $(w, z_n) \in B(0^{n-1}, \varepsilon) \times \Delta(0, \rho)$ определяме

$$q(w, z_n) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,\rho)} \frac{f(w, \zeta)}{P(w, \zeta)} \frac{d\zeta}{\zeta - z_n}.$$

Холоморфността на $q(w, z_n)$ следва от възможността за диференциране под интеграла. Следователно $R := f - qP$ е също холоморфна функция. Представяме

$$R := f - qP = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,\rho)} \left[f(w, \zeta) - P(w, z_n) \frac{f(w, \zeta)}{P(w, \zeta)} \right] \frac{d\zeta}{\zeta - z_n} =$$
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,\rho)} \frac{f(w, \zeta)}{P(w, \zeta)} \left[\frac{P(w, \zeta) - P(w, z_n)}{\zeta - z_n} \right] d\zeta$$

в интегрална форма. Частното

$$P_o(w, \zeta, z_n) := \frac{P(w, \zeta) - P(w, z_n)}{\zeta - z_n} =$$
$$\frac{\zeta^d - z_n^d}{\zeta - z_n} + \sum_{i=0}^{d-1} c_{d-i}(w) \frac{\zeta^i - z_n^i}{\zeta - z_n} = \sum_{j=0}^{d-1} \zeta^{d-1-j} z_n^j + \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} c_{d-1}(w) \zeta^{i-1-j} z_n^j =$$
$$a_0(w, \zeta) z_n^{d-1} + a_1(w, \zeta) z_n^{d-2} + \ldots + a_{d-1}(w, \zeta)$$

е полином на z_n от степен $d - 1$ със старши коефициент $a_0(w, \zeta) = 1$, чиито останали коефициенти са холоморфни функции на (w, ζ). Следователно

$$R = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,\rho)} \frac{f(w, \zeta)}{P(w, \zeta)} \left[\sum_{j=0}^{d-1} a_{d-1-j}(w, \zeta) z_n^j \right] d\zeta =$$
$$\sum_{j=0}^{d-1} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,\rho)} \frac{f(w, \zeta)}{P(w, \zeta)} a_{d-1-j}(w, \zeta) d\zeta \right] z_n^j = \sum_{j=0}^{d-1} b_{d-1-j}(w) z_n^j$$

е полином на z_n от степен $\leq d - 1$ с коефициенти

$$b_j(w) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,\rho)} \frac{f(w, \zeta)}{P(w, \zeta)} a_j(w, \zeta) d\zeta \in \mathcal{O}_{n-1}.$$

Това доказва съществуването на $q \in \mathcal{O}_n$ и $R \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ с необходимите свойства.

За да установим единствеността на $q \in \mathcal{O}_n$ и $R \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ от степен $< d$ относно z_n, да допуснем съществуването на $q_1 \in \mathcal{O}_n$ и $R_1 \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ от степен $< d$ относно z_n, така че

$$q_1(w, z_n) P(w, z_n) + R_1(w, z_n) = f(w, z_n) = q(w, z_n) P(w, z_n) + R(w, z_n)$$

за нетъждествено нулева функция $((q_1 - q)P)(w, z_n)$. Тогава $((q_1 - q)P)(w, z_n) = (R - R_1)(w, z_n)$ за $(w, z_n) \in B(0^{n-1}, \varepsilon) \times \Delta(0, \rho)$ и за произволно $r \in \mathbb{R}^{>0}$, $r < \rho$ можем да разгледаме интеграла

$$I := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,r)} \frac{\frac{\partial}{\partial\zeta}((q_1 - q)P)(w, \zeta)}{(q_1 - q)P(w, \zeta)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(0,r)} \frac{\frac{\partial}{\partial\zeta}(R - R_1)(w, \zeta)}{(R - R_1)(w, \zeta)} d\zeta.$$

Съгласно Твърдение 2.3, за произволно фиксирано $w \in B(0^{n-1}, \varepsilon)$, числото I е броят на нулите на $((q_1 - q)P)(w, z_n)$ в $\Delta(0, r)$. Понеже $P(w, z_n)$ има точно d нули в $\Delta(0, r)$, броени с техните кратности, числото $I \geq d$ и $I \in \mathbb{N}$. От друга страна, полиномът $(R - R_1)(w, z_n) \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ от степен $< d$ относно z_n има $\leq d - 1$ нули в $\Delta(0, r)$, броени с техните кратности. Условията $I \leq d - 1$ и $I \geq d$

водят до противоречие и доказват единствеността на частното $q \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ при деление на $f \in \mathcal{O}_n$ с полином на Weierstrass $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Оттук автоматично следва и $R_1(w, z_n) = R(w, z_n)$.
Ако $f \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, то по Теоремата за деление с частно и остатък на полиноми на z_n с коефициенти от областта $\mathcal{O}_{n-1}$, съществуват $Q_o \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ и $R_o \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ с $f = PQ_o + R_o$ и $\deg_{z_n} R_o < \deg_{z_n} P$. Тук съществено се използва, че полиномът на Weierstrass $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ има старши коефициент 1, за да твърдим, че Q_o е с коефициенти от $\mathcal{O}_{n-1}$, а не в полето от частни на областта $\mathcal{O}_{n-1}$. Полиномите $Q_o \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \subset \mathcal{O}_n$ и $R_o \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ изпълняват условията от Теорема 6 на Weierstrass за деление и съвпадат, съответно с $q \in \mathcal{O}_n$ и $R \in \mathcal{O}_{n+1}[z_n]$, съгласно доказаната единственост на частното q и остатъка R, Q.E.D.

4. Ньотеровост на зародишите на холоморфните функции

Подготвителната теорема на Weierstrass и Теоремата на Weietstrass за деление дават възможност за извеждане на някои алгебрични свойства на $\mathcal{O}_n$ от съответните свойства на $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. За да уточним, нека напомним следното

Определение 2.10. *Комутативният пръстен с единица R е ньотеров, ако всеки идеал $I \triangleleft R$ е крайно породен, т.е. за всеки идеал $I \triangleleft R$ съществуват краен брой елементи $x_1, \dots, x_k \in I$, така че $I = \langle x_1, \dots, x_k \rangle = \left\{ \sum_{j=1}^{k} r_j x_j \;\middle|\; r_j \in R \right\}$.*

Твърдение 2.11. *Пръстенът $\mathcal{O}_n$ на зародишите на холоморфните в $0^n \in \mathbb{C}^n$ функции е ньотеров.*

Доказателство: Нулевият идеал $\{0\} = \langle 0 \rangle$ е крайно породен във всеки пръстен. Достатъчно е да проверим, че всеки ненулев идеал $\{0\} \neq I \triangleleft \mathcal{O}_n$ е крайно породен. С индукция по $n \geq 1$, ако $\{0\} \neq I \triangleleft \mathcal{O}_1$, то съгласно Твърдение 2.1, всеки елемент $f \in \mathcal{O}_1 \setminus \{0\}$ е от вида $f = z^{m_f} u_f$ за подходящи $m_f \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ и $u_f \in \mathcal{O}_1^*$. Избираме $h \in I \setminus \{0\}$ с минимална кратност $m_h \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ в $0 \in \mathbb{C}$ и доказваме, че $I = \langle h \rangle$. Включването $\langle h \rangle := \{hg \mid g \in \mathcal{O}_n\} \subseteq I$ следва от $h \in I$ и от определението за идеал. За обратното включване $I \subseteq \langle h \rangle$ използваме, че произволен елемент $f \in I \setminus \{0\}$ е от вида $f = z^{m_f} u_f$ за подходящи $m_f \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, $m_f \geq m_h$ и $u_f \in \mathcal{O}_1^*$. Следователно

$$f = (z^{m_h} u_h)(z^{m_f - m_h} u_h^{-1} u_f) = h(z^{m_f - m_h} u_h^{-1} u_f) \in \langle h \rangle$$

и $I \subseteq \langle h \rangle$. Това доказва, че всеки идеал I в $\mathcal{O}_1$ е не само крайно породен, но и главен, т.е. породен от единствен елемент.
В общия случай, пръстенът $\mathcal{O}_{n-1}$ е ньотеров по индукционно предположение. Съгласно Теорема 7 на Hilbert за базиса, доказана в Приложението към тази тема, пръстенът $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ на полиномите на z_n с коефициенти от ньотеровия пръстен $\mathcal{O}_{n-1}$ е ньотеров. Произволен ненулев идеал $\{0\} \neq I \triangleleft \mathcal{O}_n$ пресича пръстена $\mathcal{O}_{n-1}[z_n] \leq \mathcal{O}_n$ в идеал $J_o := I \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ на $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Следователно съществуват краен брой пораждащи $P_1, \dots, P_k \in J_o$ на идеала

$$J_o = \langle P_1, \dots, P_k \rangle_{\mathcal{O}_{n-1}[z_n]} = \left\{ \sum_{j=1}^{k} P_j Q_j \;\middle|\; Q_j \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \right\} \triangleleft \mathcal{O}_{n-1}[z_n].$$

Нека

$$J := \langle P_1, \dots, P_k \rangle_{\mathcal{O}_n} = J_o \mathcal{O}_n = \left\{ \sum_{j=1}^{k} P_j g_j \;\middle|\; g_j \in \mathcal{O}_n \right\}$$

е идеалът в $\mathcal{O}_n$, породен от $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ или от J_o. За произволен ненулев елемент $f_o \in I$ твърдим, че идеалът

$$I = J + \langle f_o \rangle_{\mathcal{O}_n} = \langle P_1, \dots, P_k, f_o \rangle_{\mathcal{O}_n}$$

се поражда от $P_1, \dots, P_k \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \subset \mathcal{O}_n$ и от $f_o \in I$. Преди всичко, включването $\langle P_1, \dots, P_k, f_o \rangle_{\mathcal{O}_n} \subseteq I$ е ясно от $P_1, \dots, P_k \in J_o \subset I$ и $f_o \in I$. За обратното включване $I \subseteq \langle P_1, \dots, P_k, f_o \rangle_{\mathcal{O}_n}$ прилагаме линейна смяна на координатите, така че зародишът f_o да стане регулярен относно z_n. Съгласно Подготвителната Теорема 5 на Weierstrass съществува полином $P_o \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ на Weierstrass и обратим елемент $u_o \in \mathcal{O}_n^*$, така че $f_o = P_o u_o$. Произволен елемент $f \in I$ се дели на $P_o \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ с частно $q \in \mathcal{O}_n$ и остатък $R \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ от степен $\deg_{z_n} R < \deg_{z_n} P_o$, по Теорема 6 за деление, $f = P_o q + R$. Сега

$$R = f - P_o q = f - f_o u_o^{-1} q \in I \cap \mathcal{O}_{n-1}[z_n] = J_o \subset J,$$

защото $f, f_o \in I$. Следователно съществуват зародиши $g_j \in \mathcal{O}_n$, $1 \leq j \leq k$, така че $R = \sum\limits_{j=1}^{k} P_j g_j$ и

$$f = R + f_o u_o^{-1} q = \sum_{j=1}^{k} P_j g_j + f_o u_o^{-1} q \in \langle P_1, \dots, P_k, f_o \rangle_{\mathcal{O}_n}.$$

Това доказва $I \subseteq \langle P_1, \dots, P_k, f_o \rangle_{\mathcal{O}_n}$ и $I = \langle P_1, \dots, P_k, f_o \rangle_{\mathcal{O}_n}$, Q.E.D.

Задача 2.12. *За произволен идеал $I \triangleleft \mathcal{O}_n$ нека $\pi_I : \mathcal{O}_n \to \mathcal{O}_n / I$, $\pi_I(f) = f + I$ е естественият епиморфизъм с ядро I, а J е идеалът на $\mathcal{O}_n$, породен от ядрото $\ker[\pi_I \circ \mathrm{Id} : \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \to \mathcal{O}_n / I]$ на композицията на тъждественото влагане $\mathrm{Id} : \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \hookrightarrow \mathcal{O}_n$ с π_I. Да се докаже, че $J \subseteq I$,*

$$\ker[\pi_J \circ \mathrm{Id} : \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \to \mathcal{O}_n / J] = \ker[\pi_I \circ \mathrm{Id} : \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \to \mathcal{O}_n / I]$$

и фактор-идеалът $I/J = \langle f_o + J \rangle_{\mathcal{O}_n / J} \triangleleft \mathcal{O}_n / J$ е главен.

5. Еднозначно разлагане на зародиши на холоморфни функции

Ще докажем, че произволен елемент $f \in \mathcal{O}_n \setminus (\mathcal{O}_n^* \cup \{0\})$ има единствено с точност до множители от $\mathcal{O}_n^*$ разлагане в произведение на краен брой неразложими елементи от $\mathcal{O}_n$.

Определение 2.13. *Елементът $r \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ е неразложим, ако във всяко разлагане $r = r_1 r_2$ в произведение на $r_1, r_2 \in R$, единият от множителите r_1 или r_2 е обратим в R.*

Определение 2.14. *Област R с еднознначно разлагане е такава комутативна област с единица, в която всеки елемент $r \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ има единствено с точност до множители от R^* разлагане $r = r_1 \dots r_k$ в произведение на краен брой неразложими елементи $r_j \in R$.*

Твърдение 2.15. *Пръстенът $\mathcal{O}_n$ на зародишите на холоморфните в $0^n \in \mathbb{C}^n$ функции е област с еднозначно разлагане.*

Доказателство: Ще работим с индукция по $n \in \mathbb{N}$. Холоморфната координата $z \in \mathcal{O}_1 \setminus (\mathcal{O}_1^* \cup \{0\})$ е неразложим елемент на $\mathcal{O}_1$. По-точно, ако $z = fg$ за $f, g \in \mathcal{O}_1$, то $f \not\equiv 0$, $g \not\equiv 0$ и можем да представим $f = z^{m_f} u_f$, $g = z^{m_g} u_g$ чрез подходящи $m_f, m_g \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ и $u_f, u_g \in \mathcal{O}_1^*$. Съгласно Твърдение 2.1, зародишът $z = z^{m_f + m_g}(u_f u_g) \in \mathcal{O}_1$ е с кратност $1 = m_f + m_g$ в $0 \in \mathbb{C}$, така че $m_f = 0$ или $m_g = 0$. Това означава $f \in \mathcal{O}_1^*$ или, съответно, $g \in \mathcal{O}_1^*$ и доказва неразложимостта на z в $\mathcal{O}_1$. Използвайки отново Твърдение 2.1 представяме всеки зародиш $f \in \mathcal{O}_1 \setminus (\mathcal{O}_1^* \cup \{0\})$ във вида $f = z^{m_f} u_f$ за подходящи $m_f \in \mathbb{N}$ и

$u_f \in \mathcal{O}_1^*$. Следователно f е произведение на m_f неразложими множители, първите $m_f - 1$ от които са равни на z, а последният е zu_f. Съгласно еднозначната определеност на кратността m_f на f в $0 \in \mathbb{C}$, това разлагане е единствено с точност до обратими зародиши.

Преди да разгледаме общия случай ще проверим, че ако $f \in \mathcal{O}_n$ е регулярен относно z_n и $f = Pu$ за полином на Weierstrass $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ и $u \in \mathcal{O}_n^*$, то $f \in \mathcal{O}_n$ е неразложим в $\mathcal{O}_n$ тогава и само тогава, когато $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ е неразложим в $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Еквивалентно, $f \in \mathcal{O}_n$ е разложим в $\mathcal{O}_n$ тогава и само тогава, когато $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ е разложим в $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Наистина, ако $P = P_1 P_2$ се разлага в множители $P_1, P_2 \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \setminus \mathcal{O}_{n-1}[z_n]^* = \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \setminus \mathcal{O}_{n-1}^*$, то $f = P_1(P_2 u)$. Допускането $P_1 \in \mathcal{O}_n^*$ изисква $P_1(w, z_n)$ да е от степен $\deg_{z_n} P_1(w, z_n) = 0$ относно z_n, т.е. $P_1 \in \mathcal{O}_{n-1}$. Следователно $P_1^{-1} = \frac{1}{P_1} \in \mathcal{O}_{n-1}$ и $P_1 \in \mathcal{O}_{n-1}^*$, противно на избора на $P_1 \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n] \setminus \mathcal{O}_{n-1}^*$. Обратно, ако съществува разлагане $f = f_1 f_2$ с $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_n \setminus \mathcal{O}_n^*$, то f_1 и f_2 са регулярни относно z_n спрямо всяка координатна система, в която f е регулярен относно z_n. Съгласно Подготвителната Теорема 5 на Weierstrass съществуват полиноми $P, P_1, P_2 \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ на Weierstrasss и обратими елементи $u, u_1, u_2 \in \mathcal{O}_n^*$, така че $f = Pu$ и $f_j = P_j u_j$ за $1 \leq j \leq 2$. В резултат,

$$Pu = f = f_1 f_2 = (P_1 P_2)(u_1 u_2).$$

Произведението $P_1 P_2$ на полиноми на Weierstrass е полином на Weierstrass, така че съгласно единствеността на P от представянето $f = Pu$, доказана в Теорема 5 имаме равенство на полиноми $P = P_1 P_2$ в $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Допускането $P_1 \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]^* = \mathcal{O}_{n-1}^* \subset \mathcal{O}_n^*$ води до $f_1 = P_1 u_1 \in \mathcal{O}_n^*$, противно на избора на $f_1 \in \mathcal{O}_n \setminus \mathcal{O}_n^*$ и доказва разложимостта на P.

Остава да проверим, че ако $\mathcal{O}_{n-1}$ е област с еднозначно разлагане, то и $\mathcal{O}_n$ е област с еднозначно разлагане. За целта прилагаме Теорема 8 от Приложението и получаваме, че $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ е област с еднозначно разлагане. За произволен зародиш $f \in \mathcal{O}_n \setminus (\mathcal{O}_n^* \cup \{0\})$ прилагаме подходяща линейна смяна на променливите, така че да го направим регулярен относно z_n. Тогава съгласно Подготвителната Теорема 5 на Weierstrass съществува полином на Weierstrass $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ и обратим елемент $u \in \mathcal{O}_n^*$, така че $f = Pu$. Да забележим, че $P \not\equiv 0$, съгласно $f \not\equiv 0$ и $P \not\in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]^* = \mathcal{O}_{n-1}^* \subset \mathcal{O}_n^*$, съгласно $f \not\in \mathcal{O}_n^*$. Следователно съществува разлагане $P = P_1 \dots P_k$ в произведение на краен брой неразложими елементи $P_j \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Съгласно доказаното по-горе, $P_j \in \mathcal{O}_n$ са неразложими в $\mathcal{O}_n$.

Нека $f_1 \dots f_k = f = g_1 \dots g_m$ с $k \leq m$ са две разлагания на $f \in \mathcal{O}_n$ в произведение на неразложими $f_i, g_j \in \mathcal{O}_n$. Съгласно Подготвителната Теорема 5 на Weierstrass съществуват полиноми на Weierstrass $P_i, Q_j \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ и обратими елементи $u_i, v_j \in \mathcal{O}_n^*$, така че $f_i = P_i u_i$ и $g_j = Q_j v_j$ за $\forall 1 \leq i \leq k$, $\forall 1 \leq j \leq m$. Следователно

$$P_1 \dots P_k (u_1 \dots u_k) = f = Q_1 \dots Q_m (v_1 \dots v_m),$$

откъдето $P_1 \dots P_k = Q_1 \dots Q_m$, съгласно единствеността на полинома на Weierstrass от представянето на f. Вземайки предвид еднозначността на разлагането в $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ получаваме $k = m$ и $Q_j = P_j w_j$ за подходящи $w_j \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]^* = \mathcal{O}_{n-1}^* \subset \mathcal{O}_n^*$ и $\forall 1 \leq j \leq k$. Оттук

$$g_j = Q_j v_j = P_j w_j v_j = (P_j u_j)(u_j^{-1} w_j v_j) = f_j (u_j^{-1} w_j v_j)$$

с $u_j^{-1} w_j v_j \in \mathcal{O}_n^*$, което доказва еднозначността на разлагането в $\mathcal{O}_n$, Q.E.D.

Задача 2.16. *Да се докаже, че:*
(i) ако зародишът $f \in \mathcal{O}_n$ е регулярен с кратност 1 относно z_n, то f е неразложим в $\mathcal{O}_n$;

(i) ако $g \in \mathcal{O}_n$ е регулярен с кратност 2 относно z_n, то g се разлага в произведение на два неразложими регулярни зародиша с кратност 1 спрямо z_n.

6. Приложение - Ньотерови комутативни области с единица и с еднозначно разлагане

Твърдение 2.17. *Комутативният пръстен с единица R е ньотеров тогава и само тогава, когато всяка ненамаляваща редица от идеали*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq \ldots \tag{2.3}$$

се стабилизира след краен брой стъпки.
В частност, ако R е ньотеров пръстен, то всяко пораждащо подмножество S на идеал $\langle S \rangle \lhd R$ има крайно пораждащо подмножество $\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq S$, $\langle S \rangle = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$.

Доказателство: Нека R е ньотеров пръстен и (2.3) е ненамаляваща редица от идеали Твърдим, че $I := \cup_{s=1}^{\infty} I_s$ е идеал в R. Наистина, за произволни $a, b \in I$ съществуват $p, q \in \mathbb{N}$, така че $a \in I_p$, $b \in I_q$. Ако $n := \max(p, q)$, то $a, b \in I_n$ и $a - b \in I_n \lhd R$. За $\forall a \in I_p$ и $\forall r \in R$, имаме $ar \in I_p \subseteq I$, така че I е идеал в R. По определението за ньотеровост, идеалът $I = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle = Ra_1 + \ldots + Ra_k$ е крайнопороден. Ако $a_j \in I_{n_j}$ и $n := \max(n_1, \ldots, n_k)$, то за вяко $m \geq n$ е в сила $I \subseteq I_n \subseteq I_m \subseteq I$. Следователно $I = I_n = I_{n+1} = \ldots$ и редицата (2.3) се стабилизира след краен брой стъпки.
Ще докажем, че ако всяка ненамаляваща редица от идеали 2.3 се стабилизира след краен брой стъпки, то всяко пораждащо множество $S \subseteq R$ на идеал $I = \langle S \rangle$ има крайно пораждащо подмножество $\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq S$, $I = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$. Оттук следва, че условието за стабилизация на ненамаляващите редици от идеали е достатъчно за ньотеровостта на пръстена. Освен това, ако R е ньотеров пръстен то всяко пораждащо множество на идеал има крайно пораждащо подмножество, защото стабилизацията на ненамаляващите редици от идеали е необходимо условие за ньотеровост.
С допускане на противното, нека $S \subseteq R$ е такова подмножество, че идеалът $I = \langle S \rangle$ няма крайна пораждаща система $\{s_1, \ldots, s_n\} \subseteq S$. Тогава избираме $\sigma_1 \in S$. С индукция по $n \in \mathbb{N}$, ако $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in S$ са такива, че $\sigma_i \in S \setminus \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{i-1} \rangle$ за $\forall 2 \leq i \leq n$, то съществува $\sigma_{n+1} \in S \setminus \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle$. В противен случай, от $S \subseteq I_n := \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle$ следва $\langle S \rangle \subseteq I_n$, защото I_n е затворено относно събиране на свои елементи и умножение с елементи на R. Комбинирайки с $I_n \subseteq \langle S \rangle$ получаваме $I = I_n$, така че крайното подмножество $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \subseteq S$ поражда I. Това противоречи на допускането и доказва съществуването на безкрайна редица $\{\sigma_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq S$, изпълняваща условието $\sigma_n \in S \setminus I_{n-1} := \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1} \rangle$ за $\forall n \geq 2$. Безкрайната редица от идеали $I_{n-1} \subsetneq I_n$ е строго растяща. Това противоречи на предположението за стабилизация на ненамаляващите редици от идеали и доказва твърдението, Q.E.D.

Теорема 7. *Ако R е ньотеров комутативен пръстен с единица, то пръстенът $R[x]$ на полиномите на една променлива x с коефициенти от R е ньотеров комутативен пръстен с единица.*

Доказателство: Допускаме, че пръстенът $R[x]$ не е ньотеров и разглеждаме идеал $I \lhd R[x]$, който не е крайно породен. Избираме $f_1 \in I \setminus \{0\}$ от минимална степен. С индукция по броя на избраните полиноми, да предположим, че сме фиксирали $f_1, \ldots, f_{j-1} \in I$ с $f_i \in I \setminus \langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle$ от минимална степен за всяко $2 \leq i \leq j-1$. Вземаме $f_j \in I \setminus \langle f_1, \ldots, f_{j-1} \rangle$ от минимална степен. По този начин получаваме безкрайна редица от полиноми $f_1, \ldots, f_j, \ldots$.

Нека $J = \langle LC(f_n) \ \mid \ n \in \mathbb{N} \rangle$ е идеалът в R, породен от старшите коефициенти $LC(f_n) \in R$ на всички полиноми от редицата $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq R[x]$. Съгласно Твърдение 2.17, съществува крайно подмножество $\{LC(f_{i_1}), \ldots, LC(f_{i_s})\} \subseteq \{LC(f_n) \ \mid \ n \in \mathbb{N}\}$ от пораждащи на J. Оттук, за $m := \max(i_1, \ldots, i_s)$ имаме $J = \langle LC(f_1), \ldots, LC(f_m) \rangle$. Представяме $LC(f_{m+1}) \in J = \langle LC(f_1), \ldots, LC(f_m) \rangle$ във вида $LC(f_{m+1}) = \sum\limits_{i=1}^{m} LC(f_i) r_i$ за някои $r_i \in R$.

Твърдим, че $\deg(f_{m+1}) \geq \deg(f_i)$ за $\forall 1 \leq i \leq m$. В противен случай, съгласно $f_{m+1} \in S \setminus \langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle$ би трябвало да изберем f_{m+1} за i-ти член на конструираната редица от полиноми. Полиномът

$$f'_{m+1} = f_{m+1} - \sum_{i=1}^{m} x^{\deg(f_{m+1}) - \deg(f_i)} f_i r_i,$$

е от степен $\deg(f'_{m+1}) < \deg(f_{m+1})$, защото коефициентът на $x^{\deg(f_{m+1})}$ в f'_{m+1} се анулира. Съгласно избора на $f_{m+1} \in I \setminus \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$ от минимална степен, $f'_{m+1} \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle$. В резултат,

$$f_{m+1} = f'_{m+1} + \sum_{i=1}^{m} x^{\deg(f_{m+1}) - \deg(f_i)} f_i r_i \in \langle f_1, \ldots, f_m \rangle,$$

което противоречи на избора на f_{m+1} и доказва ньотеровостта на $R[x]$, Q.E.D.
Да напомним, че идеалът $\mathfrak{p}$ на комутативен пръстен с единица R е прост, ако от $ab \in \mathfrak{p}$ за $a, b \in R$ следва $a \in \mathfrak{p}$ или $b \in \mathfrak{p}$.

Лема 2.18. (Достатъчни условия за еднозначно разлагане)
(i) В ньотерова комутативна област R с единица, всеки ненулев елемент $r \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$ има необезателно единствено с точност до множители от R^* разлагане в крайно произведение $r = r_1 \ldots r_k$ на неразложими $r_i \in R$.
(ii) В ньотеровата област R има еднозначно разлагане на множители тогава и само тогава, когато всеки неразложим $s \in R$ поражда прост идеал $\langle s \rangle = sR \triangleleft R$.

Доказателство: (i) Да допуснем противното. Ако $r \in R$ е необратим елемент без крайно разлагане в произведение от неразложими, то $r = r_1$ не е неразложим и съществува разлагане $r_1 = r_2 r'_2$ в произведение на $r_2, r'_2 \in R \setminus R^*$. Поне единият от множителите, например r_2, не се разлага в крайно произведение от неразложими. Продължавайки по същия начин получаваме безкрайна редица $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ от необратими елементи, които не се разлагат в крайно произведение от неразложими и r_{n+1} дели r_n за $\forall n \in \mathbb{N}$. Съответните главни идеали $r_n R$ образуват безкрайна ненамаляваща редица

$$r_1 R \subseteq r_2 R \subseteq \ldots \subseteq r_n R \subseteq r_{n+1} R \subseteq \ldots.$$

Твърдим, че тази редица е строго растяща. Наистина, от равенството $r_n R = r_{n+1} R$ следва $r_{n+1} = r_n s$ за някое $s \in R$. Замествайки в $r_n = r_{n+1} r'_{n+1}$ получаваме, че $r_n - r_n s r'_{n+1} = r_n(1 - s r'_{n+1}) = 0$. Понеже R е област и $r_n \neq 0$, последното е равносилно на $1 = s r'_{n+1}$. Това означава, че $r'_{n+1} \in R^*$, противно на избора на $r'_{n+1} \in R \setminus R^*$. Наличието на безкрайна строго растяща редица от идеали

$$r_1 R \subsetneq r_2 R \subsetneq \ldots \subsetneq r_n R \subsetneq r_{n+1} R \subsetneq \ldots$$

противоречи на ньотеровостта на R и доказва съществуването на крайно разлагане на всяко $r \in R$ в произведение от неразложими елементи на R.

(ii) Нека ньотеровата област R има еднозначно разлагане, $s \in R$ е неразложим елемент, а $uv \in sR$. Тогава съществува $r \in R$, така че $uv = sr$ и s (с точност до множител от R^*) участва в разлагането на u или v в произведение на неразложими множители. Ако $u = st$, то $u \in sR$ и идеалът sR е прост.
Нека всеки неразложим в R елемент поражда прост идеал и

$$r = r_1 r_2 \dots r_m = s_1 s_2 \dots s_n \quad \text{за } m \geq n$$

са две крайни разлагания на $r \in R \setminus R^*$ в произведение на неразложими r_i, s_j. От $r_1 \dots r_m \in s_1 R$ и простотата на $s_1 R \triangleleft R$ следва, че след евентуално преномериране $r_1 \in s_1 R$. Ако $r_1 = s_1 t_1$ за $t_1 \in R$, неразложимостта на r_1 и $s_1 \notin R^*$ изискват $t_1 \in R^*$. Следователно

$$r_1 r_2 \dots r_m - s_1 s_2 \dots s_n = s_1(t_1 r_2 \dots r_m - s_2 \dots s_n) = 0$$

в областта R. Неразложимият елемент $s_1 \neq 0$, така че $(t_1 r_2) r_3 \dots r_m = s_2 \dots s_n$. Продължаваме по същия начин докато получим $m = n$ и съвпадение на r_i и s_i с точност до обратими елементи на R, Q.E.D.

Определение 2.19. *Ако $a_0, \dots, a_n$ са неедновременно нулеви елементи от комутативна област с единица R, то най-големият общ делител $d(a_0, \dots, a_n)$ е такъв общ делител на $a_0, \dots, a_n$, който се дели на всеки общ делител δ на $a_0, \dots, a_n$.*
В случая $d(a_0, a_1, \dots, a_n) \in R^*$ казваме, че $a_0, a_1, \dots, a_n$ са взаимно прости.

Ако съществува, най-големият общ делител $d(a_0, \dots, a_n)$ е единствен с точност до множител от R^*. По-точно, ако d и d' са най-големи общи делители на $a_0, \dots, a_n$, то $d' = dr_1$ за някое $r_1 \in R$, защото d е общ делител, а d' е най-голям общ делител на $a_0, \dots, a_n$. Аналогично, $d = d'r_2$ за някое $r_2 \in R$, откъдето $d = dr_1 r_2$. Съществуването на $a_i \neq 0$ гарантира $d \neq 0$. Сега от $d(r_1 r_2 - 1) = 0$ с $d \neq 0$ в областта R следва, че $r_1 r_2 = 1$ или $r_1, r_2 \in R^*$.

Лема 2.20. *Ако R е ньотерова комутативна област с единица и еднозначно разлагане, то за произволни неедновременно нулеви $a_0, \dots, a_n \in R$ съществува най-голям общ делител $d(a_0, \dots, a_n) \in R$.*

Доказателство: Нека $b_1, \dots, b_k$ са различните ненулеви елементи на множеството $\{a_0, \dots, a_n\}$. Тогава $d(a_0, \dots, a_n) = d(b_1, \dots, b_k)$. Ако съществува $b_j \in R^*$, то $d(b_1, \dots, b_k) = 1$ и $a_0, \dots, a_n$ са взаимно прости.
Нека $b_1, \dots, b_k \in R \setminus (R^* \cup \{0\})$. Ще казваме, че елементите r_1, r_2 на комутативен пръстен с единица R са асоциирани, ако съществува $u \in R^*$, така че $r_2 = r_1 u$. Всяко b_i има разлагане в произведение на краен брой неразложими множители. Означаваме с $\{p_1, \dots, p_m\}$ обединението на неасоциираните помежду си неразложими делители на $b_1, \dots, b_k$ и представяме $b_i = \prod_{j=1}^{m} p_j^{s_{ij}}$ за някои цели $s_{ij} \geq 0$, $1 \leq i \leq k$. Твърдим, че

$$d := \prod_{j=1}^{m} p_j^{\min(s_{1j}, s_{2j}, \dots, s_{kj})}$$

е най-голям общ делител на $b_1, \dots, b_k$. Преди всичко, d дели всяко b_i, защото

$$\frac{b_i}{d} = \prod_{j=1}^{m} p_j^{s_{ij} - \min(s_{1j}, \dots, s_{kj})} \in R$$

като произведение на неотрицателни степени на $p_j \in R$.
Ако δ е общ делител на $b_1, \dots, b_k$, то неразложимите делители на δ са неразложими делители на b_i за всяко $1 \leq i \leq k$. В частност, неразложимите делители на δ принадлежат на множеството $\{p_1, \dots, p_k\}$ и можем да представим

$\delta = \prod_{j=1}^{m} p_j^{n_j}$ за някои цели $n_j \geq 0$. Твърдим, че от

$$\frac{b_i}{\delta} = \prod_{j=1}^{m} p_j^{s_{ij}-n_j} \in R$$

следва $s_{ij} \geq n_j$ за $\forall 1 \leq j \leq m$. Да допуснем съществуването на $1 \leq j_o \leq m$ с $s_{ij_o} < n_{j_o}$ и да означим с $p_1, \ldots, p_l$, $l \in \mathbb{N}$ онези елементи на $\{p_1, \ldots, p_m\}$, за които $s_{ij} < n_j$, $\forall 1 \leq j \leq l$. Тогава

$$r = \frac{b_i}{\delta} = \frac{\prod_{j=l+1}^{m} p_j^{s_{ij}-n_j}}{\prod_{j=1}^{l} p_j^{n_j - s_{ij}}} = \frac{\lambda}{\mu} \in R$$

с $\lambda := \prod_{j=l+1}^{m} p_j^{s_{ij}-n_j} \in R$, съгласно $s_{ij} \geq n_j$ за $\forall l+1 \leq j \leq m$ и $\mu := \prod_{j=1}^{l} p_j^{n_j - s_{ij}} \in R \backslash R^*$ съгласно $n_j > s_{ij}$ за $\forall 1 \leq j \leq l$. От равенството $\lambda = \mu r$ следва, че всеки от неразложимите делители $p_1, \ldots, p_l$ на μ е асоцииран с някой от неразложимите делители на λ. Неразложимите делители на λ се съдържат в множеството $\{p_{l+1}, \ldots, p_m\}$, така че $\lambda = \mu r$ противоречи на избора на неасоциирани помежду си $p_1, \ldots, p_m$. Следователно $s_{ij} \geq n_j$ за $\forall 1 \leq i \leq k$, $\forall 1 \leq j \leq m$, откъдето $\min(s_{1j}, \ldots, s_{kj}) \geq n_j$ и

$$\frac{d}{\delta} = \prod_{j=1}^{m} p_j^{\min(s_{1j},\ldots,s_{kj})-n_j} \in R.$$

Това доказва, че δ дели d и d е най-голям общ делител на $a_0, \ldots, a_n$, Q.E.D.

Определение 2.21. *Нека $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \in R[x]$ е полином с коефициенти от ньотерова комутативна област R с единица и с еднозначно разлагане. Бележим с*

$$d(f) = d(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

най-големия общ делител на коефициентите на $f(x)$.
Ако $d(f) \in R^*$, то полиномът $f(x)$ се нарича примитивен.

Лема 2.22. (Gauss) *Ако R е ньотерова комутативна област с единица и с еднозначно разлагане, а $f(x), g(x) \in R[x]$, то*

$$d(fg) = d(f)d(g).$$

В частност, произведението на примитивни полиноми $f(x), g(x) \in R[x]$ е примитивен полином $fg \in R[x]$.

Доказателство: Достатъчно е да докажем твърдението за примитивни полиноми. Наистина, произволни полиноми $f(x), g(x) \in R[x]$ се представят във вида $f(x) = d(f)f_1(x)$, $g(x) = d(g)g_1(x)$ чрез най-големите общи делители $d(f), d(g) \in R$ на коефициентите им и примитивни $f_1(x), g_1(x) \in R[x]$. Ако сме установили, че $f_1(x)g_1(x)$ е примитивен, то най-големият общ делител $d(fg)$ на коефициентите на $f(x)g(x) = d(f)d(g)f_1(x)g_1(x)$ е точно $d(fg) = d(f)d(g)$.
Да допуснем, че полиномите

$$f(x) = a_m x^m + \ldots + a_1 x + a_0 \in R[x] \quad \text{и} \quad g(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0 \in R[x]$$

са примитивни, но $f(x)g(x) \in R[x]$ не е примитивен. За произволен неразложим общ делител p на коефициентите на $f(x)g(x)$ да означим с i минималното неотрицателно цяло число, за което p не дели a_i. Аналогично, нека j е минималното неотрицателно цяло число, за което p не дели b_j. Съществуването на i

и j се осигурява от примитивността на $f(x)$, съответно, на $g(x)$. Коефициентът c_{i+j} на x^{i+j} в $f(x)g(x)$ е равен на

$$c_{i+j} = a_i b_j + \sum_{s=1}^{\min(i,n-j)} a_{i-s} b_{j+s} + \sum_{s=1}^{\min(j,m-i)} a_{i+s} b_{j-s}$$

и се дели на p. Съгласно избора на i, коефициентите a_{i-s} с $s \geq 1$ се делят на p. Аналогично, b_{j-s} с $s \geq 1$ се делят на p, откъдето p дели и $a_i b_j$. С други думи, $a_i b_j$ принадлежи на идеала pR, породен от p. В ньотеровата област R с еднозначно разлагане, идеалът pR, породен от неразложим елемент p е прост, така че $a_i \in pR$ или $b_j \in pR$. Това противоречи на избора на $a_i \notin pR$, $b_j \notin pR$ и доказва, че произведението на примитивни полиноми $f(x), g(x) \in R[x]$ е примитивен полином $f(x)g(x) \in R[x]$, Q.E.D.

Лема 2.23. *Нека R е ньотерова комутативна област с единица и с еднозначно разлагане, $f(x)$ и $g(x) \not\equiv 0$ са полиноми с коефициенти от R, а $0 \neq r \in R$. Ако $f(x)$ е примитивен полином, делящ $rg(x)$, то $f(x)$ дели $g(x)$.*

Доказателство: Ако $rg(x) = f(x)h(x)$ за някакъв полином $h(x)$, то по Лема 2.22 (Gauss),

$$rd(g) = d(rg) = d(fh) = d(f)d(h) = d(h)$$

с точност до обратим елемент на R. След представяне на $g(x) = d(g)g_1(x)$ и $h(x) = d(h)h_1(x)$ чрез примитивни полиноми $g_1(x), h_1(x) \in R[x]$ получаваме, че $rd(g)[g_1(x) - f(x)h_1(x)] = 0$. Но R, а оттам и $R[x]$ са области, така че $g_1(x) = f(x)h_1(x)$. В резултат, $g(x) = f(x)d(g)h_1(x)$ и $f(x)$ дели $g(x)$, Q.E.D.

Теорема 8. *Ако R е ньотерова комутативна област с единица и с еднозначно разлагане, то пръстенът $R[x]$ на полиномите на x с коефициенти от R е също ньотерова комутативна област с единица и с еднозначно разлагане.*

Доказателство: Съгласно критерия за наличие на еднозначно разлагане в ньотерова комутативна област с единица (Лема 2.18 (ii)), достатъчно е да докажем, че всеки неразложим елемент $p(x) \in R[x]$ поражда прост идеал $\langle p(x) \rangle_{R[x]}$ в $R[x]$.
Ако $\deg p(x) = 0$, то $p \in R$ е неразложим и в R. Предположението $f(x)g(x) \in \langle p \rangle_{R[x]}$ е еквивалентно на $f(x)g(x) = ph(x)$ за някакъв полином $h(x) \in R[x]$. Най-големите общи делители на коефициентите

$$d(f)d(g) = d(fg) = d(ph) = pd(h),$$

така че $d(f)d(g) \in \langle p \rangle_R$ е от простия идеал в R, породен от p. Следователно $d(f) \in \langle p \rangle_R$ или $d(g) \in \langle p \rangle_R$, откъдето $f(x) = d(f)f_1(x) \in \langle p \rangle_{R[x]}$ или, съответно, $g(x) = d(g)g_1(x) \in \langle p \rangle_{R[x]}$. Това доказва простотата на идеала $\langle p \rangle_{R[x]}$ в случая $\deg p(x) = 0$.
Ако $\deg p(x) \geq 1$, то неразложимият полином $p(x)$ е обезателно примитивен. Наистина, разлагайки $p(x) = d(p)p_1(x)$ в произведение на най-големия общ делител $d(p)$ на коефициентите на $p(x)$ и примитивен полином $p_1(x)$ от степен $\deg p_1(x) = \deg p(x) \geq 1$ забелязваме, че неразложимостта на $p(x)$ изисква обратимост на $d(p)$ в R.
Нека $f(x)g(x) \in \langle p(x) \rangle_{R[x]}$ и $f(x) \notin \langle p(x) \rangle_{R[x]}$. Избираме ненулев полином

$$h(x) \in \langle p(x), f(x) \rangle_{R[x]}$$

от минимална степен. Ако $h(x) = d(h)h_1(x)$ за примитивен полином $h_1(x) \in R[x]$, то твърдим, че

$$\langle p(x), f(x) \rangle_{R[x]} \subseteq \langle h_1(x) \rangle_{R[x]}. \tag{2.4}$$

Тогава $p(x) = c(x)h_1(x)$ за $c(x) \in R[x]$. Неразложимостта на $p(x)$ налага обратимост на $c(x)$ или $h_1(x)$ в $R[x]$. Ако $c(x)$ е обратим, то $h_1(x) = c^{-1}p(x) \in \langle p(x)\rangle_{R[x]}$, откъдето

$$\langle p(x), f(x)\rangle_{R[x]} \subseteq \langle h_1(x)\rangle_{R[x]} \subseteq \langle p(x)\rangle_{R[x]},$$

противно на предположението $f(x) \notin \langle p(x)\rangle_{R[x]}$. Ако $h_1(x) \in R[x]^* = R^*$, то $h(x) = d(h)h_1 \in R$. Съгласно $h \in \langle p(x), f(x)\rangle_{R[x]}$, съществуват полиноми $a(x), b(x) \in R[x]$, така че $h = p(x)a(x) + f(x)b(x)$. В резултат,

$$g(x)h = p(x)a(x)g(x) + f(x)g(x)b(x) \in \langle p(x)\rangle_{R[x]}$$

и примитивният полином $p(x)$ дели $hg(x) \not\equiv 0$. Съгласно Лема 2.23, оттук следва, че $p(x)$ дели $g(x)$ и $g(x) \in \langle p(x)\rangle_{R[x]}$. Това доказва простотата на идеала $\langle p(x)\rangle_{R[x]}$ и наличието на еднозначно разлагане в $R[x]$.
За да проверим включването (2.4), разширяваме коефициентите на полиномите до полето от частни Q на R и делим $p(x)$ на $h(x)$ с частно $\widetilde{q}(x) \in Q[x]$ и остатък $\widetilde{r}(x) \in Q[x]$, $p(x) = h(x)\widetilde{q}(x) + \widetilde{r}(x)$, $\deg \widetilde{r}(x) < \deg h(x)$. Ако

$$h(x) = ax^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in R[x], \quad a \neq 0$$

и $m := \deg \widetilde{q}(x) = \deg p(x) - \deg h(x)$, то съгласно алгоритъма за деление на полиноми на една променлива ,

$$\widetilde{q}(x) \in a^{-1}Rx^m + a^{-2}Rx^{m-1} + \ldots + a^{-m}Rx + a^{-(m+1)}R.$$

Затова $q(x) := a^{m+1}\widetilde{q}(x) \in R[x]$ и от равенството

$$a^{m+1}p(x) = h(x)q(x) + a^{m+1}\widetilde{r}(x)$$

следва, че $r(x) := a^{m+1}\widetilde{r}(x) = a^{m+1}p(x) - h(x)q(x)$ е полином от $R[x]$. Още повече, $h(x) \in \langle p(x), f(x)\rangle_{R[x]}$, така че $r(x) \in \langle p(x), f(x)\rangle_{R[x]}$ от степен $\deg r(x) = \deg \widetilde{r}(x) < \deg h(x)$. Изборът на $h(x)$ като ненулев полином от $\langle p(x), f(x)\rangle_{R[x]}$ с минимална степен налага тъждественото анулиране на $r(x) \equiv 0$. Следователно полиномът $a^{m+1}p(x) = h(x)q(x)$ се дели на $h(x)$. Отделяме $d(h)$ като множител и разлагаме $h(x) = d(h)h_1(x)$ чрез примитивен полином $h_1(x) \in R[x]$. Тогава равенството $a^{m+1}p(x) = d(h)h_1(x)q(x)$ показва, че $h_1(x)$ дели $a^{m+1}p(x)$. Прилагаме Следствие 2.23 и получаваме, че $h_1(x)$ дели $p(x)$ или $p(x) \in \langle h_1(x)\rangle_{R[x]}$. Аналогични разсъждения доказват, че $f(x) \in \langle h_1(x)\rangle_{R[x]}$, Q.E.D.