Глава 11

Формула на Riemann-Hurwitz. Теорема на Poincaré-Hopf.

Споменатите теореми свързват Ойлеровата характеристика на компактна Риманова повърхнина с дискретни величини, зависещи от комплексно аналитичната структура. По-точно, ако $f : X \to Y$ е непостоянно холоморфно изображение на компактни Риманови повърхнини, то формулата на Riemann-Hurwitz свързва Ойлеровите характеристики на X и Y с броя на точките в общ слой на f и с индексите на разклонение на f в точките на X. Теоремата на Poincaré-Hopf установява, че сумата на кратностите на мероморфна диференциална форма ω върху компактна Риманова повърхнина C е противоположна на Ойлеровата характеристика на C. По този начин, сумата на кратностите на мероморфен диференциал върху компактна Риманова повърхнина се оказва топологичен инвариант, който не зависи от комплексната структура. Споменатите теореми могат да се разглеждат и като свойства на рода на компактна Риманова повърхнина.

1. Описание на непостоянните холоморфни изображения на компактни Риманови повърхнини

Нека $f : C_1 \to C_2$ е непостоянно холоморфно изображение на Риманови повърхнини. За произволна точка $p \in C_1$ с $f(p) = q \in C_2$ съществуват координатни карти (U, φ) върху C_1 и (V, ψ) върху C_2, така че $p \in U$, $q \in V$ и f се ограничава до холоморфно изображение $f : U \to V$. Без ограничение на общността можем да считаме, че U и V са отворени подмножества на $\mathbb{C}$ и f има локално представяне $f|_U = z^{\nu_p(f)} u(z)$, където z е холоморфна координата върху U с $z(p) = 0$, $\nu_p(f) \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ е кратността на $f|_U$ в p, а $u : U \to \mathbb{C}^*$ е неанулираща се холоморфна функция. При избор на локална холоморфна координата върху V с център $q = f(p)$ имаме $\nu_p(f) \geq 1$. От доказателството на Теорема 10 за комплексните подмногообразия следва, че ако $\nu_p(f) = 1$ и $\frac{\partial f}{\partial z}(0) = \left(u(z) + z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = u(0) \neq 0$, то $f|_U : U \to f(U)$ е бихоломорфно върху образа си и $f : C_1 \to C_2$ е локално бихоломорфно в околност на точка $p \in C_1$ с $\nu_p(f) = 1$.

Определение 11.1. *Ако $f : C_1 \to C_2$ е непостоянно холоморфно изображение на Риманови повърхнини с локално представяне $f|_U = z^{\nu_p(f)} u(z)$ чрез холоморфна функция $u : U \to \mathbb{C}^*$ в околност U на точка p с $z(p) = 0$, то $e_f(p) := \nu_p(f) \in \mathbb{N}$ се нарича индекс на разклонение на f в p.*
Точките $p \in C_1$ с индекс на разклонение $e_f(p) = 1$ се наричат неразклонени, а тези с $e_f(p) \geq 2$ са точките на разклонение на f.

Определение 11.2. *Холоморфно изображение $f : M \to N$ на комплексни многообразия е крайно, ако във всяка точка $q \in N$ слоят $f^{-1}(q)$ е краен (или празното множество за $q \notin f(M)$.)*

Лема-Определение 11.3. *Нека $f : C_1 \to C_2$ е непостоянно холоморфно изображение на компактни Риманови повърхнини. Тогава:*

(i) f е крайно изображение;
(ii) f има краен брой точки на разклонение $p_1, \ldots, p_m \in C_1$;
(iii) ако $q \in C_1 \setminus f^{-1}\{f(p_1), \ldots f(p_m)\}$ и $f^{-1}(f(q)) = \{q_1 = q, q_2, \ldots, q_n\}$, то съществуват отворени околности U_i на q_i върху C_1 и отворена околност V на $f(q)$ върху C_2, така че $f^{-1}(V) = \coprod_{i=1}^{n} U_i$ е непресичащо се обединение на U_i и ограниченията $f|_{U_i} : U_i \to V$ са бихоломорфни;
(iv) за произволни $q, q' \in C_1 \setminus f^{-1}\{f(p_1), \ldots, f(p_m)\}$ слоевете $f^{-1}(f(q))$, $f^{-1}(f(q'))$ имат един и същи брой точки, който се нарича степен на f и се бележи с $\deg f \in \mathbb{N}$;
(v) $\sum\limits_{s \in f^{-1}(r)} e_f(s) = \deg f$ за $\forall r \in C_2$ и в частност, $f(C_1) = C_2$.

Доказателство: (i) Да допуснем съществуването на точка $q \in f(C_1)$ с безкраен слой $f^{-1}(q) \subset C_1$ и да изберем произволна нестационарна редица $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq f^{-1}(q)$. Затвореното подмножество $f^{-1}(q)$ на компакта C_1 е компактно и редицата $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ има нестационарна сходяща подредица $\{p_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Ако $p := \lim\limits_{i \to \infty} p_{n_i}$, то съгласно непрекъснатостта на f имаме

$$f(p) = f(\lim_{i \to \infty} p_{n_i}) = \lim_{i \to \infty} f(p_{n_i}) = \lim_{i \to \infty} q = q.$$

В достатъчно малка отворена околност U на p върху C_1, холоморфното изображение f има вида $f|_U = z^{e_f(p)} u(z)$ за холоморфна координата z върху U с $z(p) = 0$ и холоморфна функция $u : U \to \mathbb{C}^*$. В частност, $f(p') \neq 0$ за $\forall p' \in U \setminus \{p\}$. Околността U на p съдържа безбройно много членове на редицата $\{p_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$. За всяко $p_{n_i} \in U \setminus \{p\}$ е в сила $f(p_{n_i}) = f(p) = 0$, откъдето $p_{n_i} = p$. Това противоречи на избора на нестационарна подредица $\{p_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ на $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ и установява крайността на слоевете $f^{-1}(q)$ над всички $q \in f(C_1)$.
(ii) Достатъчно е да докажем, че всяка точка $p \in C_1$ има такава отворена околност $p \in U_p \subseteq C_1$, че $U_p \setminus \{p\}$ не съдържа точки на разклонение на f. Тогава покриваме $C_1 = \cup_{p \in C_1} U_p$ с такива отворени околности и избираме крайно подпокритие $C_1 = U_{p_1} \cup \ldots \cup U_{p_k}$, благодарение на компактността на C_1. Точките на разклонение на f се съдържат в крайното множество $\{p_1, \ldots, p_k\}$.
Произволна точка $p \in C_1$ има отворена околност $p \in U \subseteq C_1$, в която ограничението на f има вида $f|_U = z^e u(z)$ за локална холоморфна координата z върху U с $z(p) = 0$, холоморфна функция $u : U \to \mathbb{C}^*$ и индекса на разклонение $e = e_f(p)$ на f в p. Да фиксираме клона

$$\log(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-z)^n}{n}$$

на логаритмичната функция за $|z - 1| < 1$. Функцията

$$\frac{u(z)}{u(0)} : U \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

е непрекъсната и има стойност 1 в точката $z = 0$. Съществува достатъчно малка околност $0 \in V \subseteq U$, така че $\left| \frac{u(z)}{u(0)} - 1 \right| < 1$ за $\forall z \in V$. Фиксираме e-ти корен $\rho \in \sqrt[e]{u(0)} := \{\alpha \in \mathbb{C} \mid \alpha^e = u(0)\}$ от $u(0) \in \mathbb{C}^*$ и забелязваме, че

$$r(z) := \rho \exp\left(\frac{1}{e} \log\left(\frac{u(z)}{u(0)}\right)\right)$$

е коректно определена холоморфна функция върху V с $r(z)^e = u(z)$. Холоморфната функция $t(z) := z r(z)$ с $r(0) \neq 0$ е локален бихоломорфизъм в отворена околност $0 \in W \subseteq V$. Затова можем да изберем локална холоморфна координата t върху W и да представим $f|_W = t^e$ чрез степенна функция, чийто показател $e = e_f(p)$ е равен на индекса на разклонение на f в p.

Всяка точка $p' \in W \setminus \{p\}$ има отворена околност $p' \in W' \subseteq V$, върху която $f|_{W'} = t^e : W' \to f(W')$ е бихоломорфизъм. Избираме локална координата x с център p' и представяме $f(t) = g(x) = x^{e_f(p')} v(x)$ чрез локална холоморфна функция $v : W' \to \mathbb{C}^*$. Ако y е локална холоморфна координата с център $f(t(p'))$ върху $f(W') \subseteq C_2$, то диференцирането на холоморфната функция $g^{-1}(g(x)) = x$ дава

$$\frac{\partial g^{-1}}{\partial y}(g(x)) \frac{\partial g}{\partial x} = 1 \quad \text{за} \quad \forall x \in W'.$$

В частност, $\frac{\partial g}{\partial x}(0) \neq 0$ за $\forall x \in W'$. Но

$$\frac{\partial g}{\partial x} = x^{e_f(p')-1} \left[e_f(p') v(x) + x \frac{\partial v}{\partial x} \right]$$

не се анулира в $x = 0$ точно когато $e_f(p') = 1$. Това доказва, че $W \setminus \{p\}$ не съдържа точки на разклонение на f.

(iii) За произволна точка $q \in C_1 \setminus f^{-1}\{f(p_1), \dots, f(p_m)\}$ слоят

$$f^{-1}(f(q)) = \{q_1 = q, q_2, \dots, q_n\}$$

над $f(q)$ се състои от неразклонени точки за f. В противен случай, $q_i = p_j$ за някои $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$ и $f(q) = f(q_i) = f(p_j)$, противно на избора на $q \notin f^{-1}\{f(p_1), \dots, f(p_m)\}$. Следователно $e_f(q_i) = 1$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ и съгласно доказателството на (ii) съществуват локални координати t_i в отворени околности W_i на q_i, така че $f|_{W_i} = t_i$. След евентуално свиване на W_i можем да предполагаме, че отворените подмножества $W_1, \dots, W_n \subset C_1$ не се пресичат, т.е. $W_i \cap W_j = \emptyset$ за $\forall 1 \leq i \neq j \leq n$. Оттук, $f : W_i \to f(W_i)$ са бихоломорфни изображения и $f_i(W_i)$ са отворени подмножества на C_2, съгласно непрекъснатостта на $f^{-1} : f(W_i) \to W_i$. Сечението $V := \cap_{i=1}^n f(W_i)$ на краен брой отворени подмножества е отворено подмножество на C_2. Полагайки $U_i := f^{-1}(V) \cap W_i$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ получаваме отворено подмножество $\coprod_{i=1}^n U_i \subseteq f^{-1}(V)$ с бихоломорфни ограничения $f|_{U_i} : U_i \to V$. Твърдим, че след евентуално свиване на V е в сила равенството $f^{-1}(V) = \coprod_{i=1}^n U_i$. В противен случай, за произволна намаляваща редица $V \supset V_1 \supset V_2 \supset \dots \supset V_j \supset V_{j+1} \supset \dots$ от отворени околности на $f(q)$ върху C_2 с $\cap_{j=1}^\infty V_j = \{f(q)\}$ съществуват точки $s_j \in C_1 \setminus \coprod_{i=1}^n W_i$ с $f(s_j) \in V_j$. Затвореното подмножество $C_1 \setminus \coprod_{i=1}^n W_i$ на компакта C_1 е компактно, така че редицата $\{s_j\}_{j=1}^\infty$ има сходяща подредица $\{s_{j_i}\}_{i=1}^n$ с граница $s = \lim_{i \to \infty} s_{j_i} \in C_1 \setminus \coprod_{i=1}^n W_i$. Съгласно непрекъснатостта на f, от $f(s_{j_i}) \in V_{j_i}$ следва, че

$$f(s) = f(\lim_{i \to \infty} s_{j_i}) = \lim_{i \to \infty} f(s_{j_i}) \in \lim_{i \to \infty} V_{j_i} = \cap_{i=1}^\infty V_{j_i} = \{f(q)\}.$$

Сега $s = q_i \in \coprod_{i=1}^n W_i$ противоречи на $s \notin \coprod_{i=1}^n W_i$ и доказва, че праобразът

$$f^{-1}(V) = \coprod_{i=1}^n U_i$$

на V се изчерпва от непресичащото се обединение на U_i след евентуално свиване на V.

(iv) Да забележим, че $f^{-1}\{f(p_1),\dots,f(p_m)\}$ е крайно подмножество на C_1, защото $f: C_1 \to C_2$ е крайно изображение съгласно (i). За произволни точки $q, q' \in C_1 \setminus f^{-1}\{f(p_1),\dots,f(p_m)\}$ съществува непрекъсната крива

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow C_1 \setminus f^{-1}\{f(p_1),\dots,f(p_m)\}$$

с $\gamma(0) = q$, $\gamma(1) = q'$. Ако слоят $f^{-1}(f(q)) = \{q_1 = q,\dots,q_n\}$ на f над $f(q)$ се състои от n точки, то множеството

$$M := \{t \in [0,1] \ \mid \ |f^{-1}(f\gamma(t))| = n\}$$

на параметрите на точките от кривата, чиито слоеве имат n елемента е непразно, защото $0 \in M$. Съгласно (iii) множеството M е отворено. От друга страна, M е затворено, защото ако редица $\{t_\nu\}_{\nu=1}^{\infty} \subset M$ е сходяща към $t = \lim\limits_{\nu\to\infty} t_\nu$, то $t \in M$. По-точно, ако слоят $f^{-1}(f\gamma(t))$ се състои от n_1 точки, то съгласно (iii) съществува околност V а $f\gamma(t)$ върху C_2, така че слоевете $f^{-1}(r)$ над $\forall r \in V$ се състоят от n_1 точки. Поради сходимостта на редицата $\{t_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ към t, съществува $\nu_0 \in \mathbb{N}$, така че $f\gamma(t_\nu) \in V$ за $\forall \nu \geq \nu_0$. По предположение, слоевете $f^{-1}(f\gamma(t_\nu))$ се състоят от n точки, откъдето $n_1 = n$ и $t \in M$. Непразното отворено и затворено подмножество M на свързаното множество $[0,1]$ съвпада с $[0,1]$ и $q' \in M$, т.е. слоят $f^{-1}(f(q'))$ се състои от n точки.

(v) Ако $f : C_1 \to C_2$ е непостоянно холоморфно изображение, то образът $f(C_1)$ е 1-мерно комплексно аналитично подмножество на C_2, а оттам и $f(C_1) = C_2$. За произволна точка $r \in C_2$ нека $f^{-1}(r) = \{s_1,\dots,s_\nu\}$. Както в доказателството на (iii), съществуват две по две непресичащи се околности $U_1,\dots,U_\nu$ на $s_1,\dots,s_\nu$ върху C_1 и околност V на r върху C_2, така че $f^{-1}(V) = \coprod\limits_{i=1}^{\nu} U_i$ е непресичащо се обединение на U_i и f има ограничения

$$f|_{U_i} = t_i^{e_f(s_i)} \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq i \leq \nu.$$

Ако $r \notin f^{-1}\{f(p_1),\dots,f(p_m)\}$, то $\nu = n$, $e_f(s_i) = 1$ за $\forall 1 \leq i \leq n$ и

$$\sum_{s\in f^{-1}(r)} e_f(s) = e_f(s_1) + \ldots + e_f(s_n) = n = \deg f.$$

За образ $r = f(p_j)$ на точка на разклонение p_j на f, след евентуално свиване на U_i и V можем да предполагаме, че всички точки $s \in U_i \setminus \{s_i\}$ се изобразяват в $f(s) \notin \{f(p_1),\dots,f(p_m)\}$. Следователно всички точки от слоя $f^{-1}(f(s))$ са неразклонени и техният брой е $\deg f$. От друга страна, за $\forall 1 \leq i \leq \nu$ сечението $U_i \cap f^{-1}(f(s))$ се състои от $e_f(s_i)$ точки, така че

$$\sum_{s\in f^{-1}(r)} e_f(r) = e_f(s_1) + \ldots + e_f(s_\nu) = \deg f,$$

Q.E.D.

2. Формула на Riemann-Hurwitz

Теорема 16. (формула на Riemann-Hurwitz) *Нека $f : X \to Y$ е непостоянно холоморфно изображение на компактни Риманови повърхнини. Тогава родът g_X на X, родът g_Y на Y, степента $\deg f$ на f и индексите на разклонение $e_f(p)$ на f в точките $p \in X$ са свързани с равенството*

$$2g_X - 2 = \deg f(2g_Y - 2) + \sum_{p\in X}(e_f(p) - 1). \tag{11.1}$$

Доказателство: Нека $R = \{p_1, \dots, p_m\}$ е множеството на точките на разклонение на f, а $S = f(R)$ е образът на R под действие на f. Избираме такава триангулация на Y, за която всички точки $f(p_1), \dots, f(p_m)$ на S са върхове. Да означим с v броят на върховете в избраната триангулация, с e - броят на ребрата, а с t - броят на триъгълниците. Тогава Ойлеровата характеристика на Y е

$$2 - 2g_Y = \chi(Y) = v - e + t.$$

Издърпваме триангулацията на Y до триангулация на X. По-точно, праобразите на върховете на триангулацията на Y под действие на f са върховете на триангулацията на X. Праобразите на отворените ребра на триангулацията на Y под действие на f са отворените ребра на триангулацията на X. Аналогично, праобразите на отворените триъгълници от триангулацията на Y под действие на f са отворените триъгълници на триангулацията на X. Отворените ребра и отворените триъгълници от триангулацията на Y се съдържат в $Y \setminus S$ и праобразите им под действие на f се състоят от неразклонени точки на f. Следователно всяко отворено ребро и всеки отворен триъгълник от триангулацията на Y се издърпват до $n = \deg f$ отворени ребра, съответно до n отворени триъгълника от триангулацията на X.
Броят на върховете в издърпаната триангулация на X е

$$v_X = \sum_q \sum_{p \in f^{-1}(q)} 1,$$

където q пробягва върховете на триангулацията на Y. Ако $f^{-1}(q) = \{q_1, \dots, q_\nu\}$, то съгласно Лема-Определение 11.3 (v) имаме

$$\deg f = n = \sum_{x \in f^{-1}(q)} e_f(x) = e_f(q_1) + \ldots + e_f(q_\nu).$$

Следователно

$$n - \nu = \sum_{p \in f^{-1}(q)} (e_f(p) - 1),$$

откъдето

$$\sum_{p \in f^{-1}(q)} 1 = \nu = n - \sum_{p \in f^{-1}(q)} (e_f(p) - 1).$$

Сумираме по всички върхове q от триангулацията на Y и получаваме

$$\sum_q \sum_{p \in f^{-1}(q)} 1 = nv - \sum_q \sum_{p \in f^{-1}(q)} (e_f(p) - 1) = nv - \sum_{p \in X} (e_f(p) - 1),$$

вземайки предвид, че всички точки на разклонение на f са върхове на триангулацията на X. Оттук, Ойлеровата характеристика на X е

$$2 - 2g_X = \chi(X) = nv - \sum_{p \in X} (e_f(p) - 1) - ne + nt = n\chi(Y) - \sum_{p \in X} (e_f(p) - 1),$$

Q.E.D.

Следствие 11.4. *Нека $f : X \to Y$ е непостоянно холоморфно изображение на компактни Риманови повърхнини. Тогава $g_X \geq g_Y$ с равенство $g_X = g_Y$ само за $g_Y \in \{0, 1\}$ или за хомеоморфизъм f.*

Доказателство: От формулата на Riemann-Hurwotz, ако $g_Y \geq 1$, то

$$2g_X - 2 = n(2g_Y - 2) + \sum_{p \in X} (e_f(p) - 1) \geq 2g_Y - 2,$$

съгласно $n \geq 1$ и $e_f(p) \geq 1$ във всяка точка $p \in X$. Това доказва, че $g_X \geq g_Y$. В случая $g_Y = 0$, неравенството $g_X \geq 0 = g_Y$ е тривиално.

Ако $g_X = g_Y$ и $g_Y \geq 2$, то

$$0 \geq (1-n)(2g_X - 2) = \sum_{p \in X} (e_f(p) - 1) \geq 0$$

изисква $(1-n)(2g_X - 2) = \sum_{p \in X} (e_f(p) - 1) = 0$. Следователно $e_f(p) = 1$ за $\forall p \in X$ и f няма точки на разклонение. Освен това, $n = 1$ и f е хомеоморфизъм, Q.E.D.

3. Индекс на векторно поле в неизродена нула

Теоремата на Poincaré-Hopf за компактна Риманова повърхнина C гласи, че сумата

$$\sum_{p \in C} \nu_p(\omega) = -\chi(C)$$

на кратностите на мероморфна диференциална форма ω върху C е противоположна на Ойлеровата характеристика $\chi(C)$ на C. Ts се получава от Теоремата на Poincaré-Hopf за компактно ориентируемо гладко многообразие M, съгласно която сумата

$$\sum_{V(p)=0} \mathrm{Ind}_p(V) = \chi(M)$$

на индексите на гладко векторно поле $V : M \to T^{\mathbb{R}}M$ с изолирани нули е равна на Ойлеровата характеристика $\chi(M)$. Всяко векторно поле V с изолирана нула p има гладка деформация $\widehat{V}$, за която p е неизродена изолирана нула с $\mathrm{Ind}_p(\widehat{V}) = \mathrm{Ind}_p(V)$. Произволни гладки векторни полета V_1, V_2 с неизродени изолирани нули имат една и съща сума на индексите

$$\sum_{V_1(p)=0} \mathrm{Ind}_p(V_1) = \sum_{V_2(p)=0} \mathrm{Ind}_p(V_2),$$

равна на степента на изображението на Gauss. Използвайки теория на Morse, конструираме гладко векторно поле V_0 с неизродени изолирани нули и

$$\sum_{V_0(p)=0} \mathrm{Ind}_p(V_0) = \chi(M).$$

За да набележим някои от основните стъпки в доказателството на Теоремата на Poincaré-Hopf за компактно ориентируемо гладко многообразие M, ще започнем с дискутиране на свойствата на степента на Brouwer на гладко изображение в регулярна стойност.

Съгласно Теорема на Whitney, всяко гладко многообразие M с $\dim_{\mathbb{R}} M = k$ се влага в $\mathbb{R}^n$ за достатъчно голямо $n \in \mathbb{N}$. Отсега нататък ще разглеждаме само гладки многообразия M, вложени в $\mathbb{R}^n$. Подмножество $M \subset \mathbb{R}^n$ е k-мерно многообразие с граница ∂M, ако всяка точка $p \in M$ има околност U в $\mathbb{R}^n$, така че $U \cap M$ е хомеоморфно на отворено подмножество на $\mathbb{R}^k$ или на отворено подмножество на $\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{\geq 0}$. Подмножеството на M, чиито точки се изобразяват в $\mathbb{R}^{k-1} \times 0$ под действие на координатните карти се нарича граница на M и се бележи с ∂M. Ако M е k-мерно многообразие с граница, то ∂M е $(k-1)$-мерно многообразие.

Ако $M \subset \mathbb{R}^n$ е ориентируемо k-мерно многообразие с граница, то произволна ориентация върху M индуцира ориентация върху границата ∂M и винаги разглеждаме ∂M с тази ориентация. По-точно, допирателното пространство $T_p^{\mathbb{R}} \partial M$ към ∂M в произволна точка $p \in \partial M$ е подпространство на допирателното пространство $T_p^{\mathbb{R}} M$ към M с 1-мерно фактор-пространство $T_p^{\mathbb{R}} M / T_p^{\mathbb{R}} \partial M$. Произволна координатна карта $\varphi : U \cap M \to \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{\geq 0}$ в околност на $p \in \partial M$ индуцира $\mathbb{R}$-линейно изображение $(d\varphi)_p : T_p^{\mathbb{R}} M \to T_{\varphi(p)}^{\mathbb{R}} \mathbb{R}^k \simeq \mathbb{R}^k$. Допирателен вектор $v \in T_p^{\mathbb{R}} M \setminus T_p^{\mathbb{R}} \partial M$ сочи навън (навътре), ако $(d\varphi)_p(v) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{>0}$ (съответно, $(d\varphi)_p(v) \in \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{<0}$). Нека $e_1, \ldots, e_{k-1}, e_k$ е такъв положително ориентиран базис на $T_p^{\mathbb{R}} M$, че $e_1, \ldots, e_{k-1}$ е базис на $T_p^{\mathbb{R}} \partial M$, а $e_k \in T_p^{\mathbb{R}} M \setminus T_p^{\mathbb{R}} \partial M$ сочи навън. Тогава ориентацията на $T_p^{\mathbb{R}} \partial M$, зададена от наредения базис $e_1, \ldots, e_{k-1}$ се нарича индуцирана от ориентацията на M.

Нека $f : M \to N$ е гладко изображение на компактни ориентируеми многообразия с една и съща размерност $\dim_{\mathbb{R}} M = \dim_{\mathbb{R}} N = n$. Във всяка точка $p \in M$ диференциалът

$$(df)_p : T_p^{\mathbb{R}} M \longrightarrow T_{f(p)}^{\mathbb{R}} N$$

е $\mathbb{R}$-линейно изображение на съответните допирателни пространства. Казваме, че $p \in M$ е регулярна точка на f, ако $(df)_p$ е $\mathbb{R}$-линеен изоморфизъм. Точката $q \in f(M) \subseteq N$ е регулярна стойност на f, ако всички праобрази $p \in f^{-1}(q)$ на q са регулярни точки. Ако фиксираме ориентация върху M и ориентация върху N, то знакът $\operatorname{sign}\det(df)_p$ на детерминантата $\det(df)_p$ на матрицата на диференциала $(df)_p : T_p^{\mathbb{R}} M \to T_{f(p)}^{\mathbb{R}} N$ спрямо положително определени базиси на $T_p^{\mathbb{R}} M$ и $T_{f(p)}^{\mathbb{R}} N$ не зависи от тези базиси.

Ако рангът $\operatorname{rk}_{\mathbb{R}}(df)_p < n$, то p е критична точка на f. Точката $q \in f(M)$ е критична стойност на f, ако поне един праобраз $p \in f^{-1}(q)$ на q е критична точка на f. Нека $C \subset M$ е множеството на критичните точки на f. Съгласно Теорема на Sard, множеството $f(C)$ на критичните стойности на f има лебегова мярка 0 и допълнението $N \setminus f(C)$ е навсякъде гъсто.

Нека M е ориентирано $(k+1)$-мерно многообразие с граница, а $f : \partial M \to N$ е гладко изображение в k-мерно многообразие N, което се продължава до гладко изображение $F : M \to N$. Може да се докаже, че за всяка точка $q \in N$, която е регулярна стойност както на f, така и на F, праобразът $F^{-1}(q)$ е гладко 1-мерно многообразие, т.е. обединение на затворени интервали и окръжности, а $f^{-1}(y)$ се състои от краищата на споменатите интервали.

Определение 11.5. *Нека $f : M \to N$ е гладко изображение на компактни ориентируеми многообразия с една и съща размерност. Степента на Brouwer на f в регулярна стойност $q \in f(M)$ се определя като сумата*

$$\operatorname{Deg}_q(f) := \sum_{p \in f^{-1}(q)} \operatorname{sign}\det(df)_p$$

на знаците на детерминантите на диференциалите на f във всички праобрази p на q.

В околност на регулярна точка p, гладкото изображение f е локално обратимо, така че множеството $f^{-1}(q)$ на праобразите на регулярна стойност q на f е дискретно. Поради компактността на M, множеството $f^{-1}(q)$ е крайно и степента на Brouwer $\operatorname{Deg}_q(f)$ е коректно определено цяло число.

Степента на Brouwer $\operatorname{Deg}_q(f)$ е локално постоянна в регулярна стойност q. Грубо казано, ако $f^{-1}(q) = \{p_1, \ldots, p_n\}$, то съществуват две по две непресичащи се отворени околност U_i на p_i, върху които f се ограничава до дифеоморфизъм $f : U_i \to V$ с една и съща фиксирана околност V на q върху N. За произволна точка $q' \in V_0 := V \setminus f(\cap_{i=1}^n (M \setminus U_i))$, знакът на детерминантата на $(df)_{p'}$ във всяка точка $p' \in f^{-1}(q')$ е положителен и $f^{-1}(q')$ се състои от n точки.

Лема 11.6. *Нека M е ориентируемо k-мерно многообразие с граница, а $f : \partial M \to N$ е гладко изображение в $(k-1)$-мерно многообразие N, което има гладко продължение $F : M \to N$. Ако $q \in N$ е регулярна стойност на f и на F, то степента на Brouwer*

$$\operatorname{Deg}_q(f) = 0.$$

За целта е достатъчно да се провери, че за произволен интервал $[a, b] \subset F^{-1}(q)$ е в сила $\mathrm{sign}(df)_a + \mathrm{sign}(df)_b = 0$. Произволен допирателен вектор v_1 към $F^{-1}(q)$ в $p \in F^{-1}(q) \setminus f^{-1}(q)$ има непрекъснато продължение във всяко $p' \in f^{-1}(q)$. В един от краищата $a, b \in f^{-1}(q)$ на отсечката $[a, b] \subseteq F^{-1}(q)$ векторът v_1 сочи навън, а в другия - навътре, така че $\mathrm{sign}(df)_a + \mathrm{sign}(df)_b = 0$. Оттук получаваме следната

Лема 11.7. *Ако $f : M \to N$ и $g : M \to N$ са хомотопни помежду си гладки изображения на компактни ориентируеми многообразия с една и съща размерност, а $q \in N$ е обща регулярна стойност на f и g, то степените на Brouwer $\mathrm{Deg}_q(f) = \mathrm{Deg}_q(g)$ на f и g съвпадат.*

Доказателство: Разглеждаме $M \times [0, 1]$ като многообразие с граница, а хомотопията $F : M \times [0, 1] \to N$ като гладко изображение. Границата на $M \times [0, 1]$ е

$$\partial(M \times [0, 1]) = (M \times 0) \coprod (M \times 1)$$

и ориентацията на $M \times 0$, наследена от ориентацията на $M \times [0, 1]$ е противоположна на ориентацията на $M \times 1$. Вземайки предвид $F|_{M \times 0} = f$, $F|_{M \times 1} = g$ получаваме

$$0 = \mathrm{Deg}_q(F|_{\partial(M \times [0,1])}) = \mathrm{Deg}_q(g) - \mathrm{Deg}_q(f),$$

откъдето $\mathrm{Deg}_q(f) = \mathrm{Deg}_q(g)$, Q.E.D.

Следствие 11.8. *Степента на Brouwer $\mathrm{Deg}_q(f)$ на гладко изображение $f : M \to N$ на компактни ориентируеми многообразия с една и съща размерност не зависи от регулярната стойност q на f.*

Доказателство: Нека q и r са регулярни стойности на f. Да напомним, че гладка изотопия на дифеоморфизми α и β е непрекъснат път от дифеоморфизми, свързващ α с β. Произволен дифеоморфизъм $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, запазващ ориентацията е изотопен на $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^k}$. Може да се докаже, че за произволни точки q и r на гладкото многообразие N съществува дифеоморфизъм $h : N \to N$ с $h(q) = r$, който е гладко изотопен на идентитета Id_N. Гладката хомотопия от h до Id_N задава гладка хомотопия от $f \circ h$ до f. Съгласно Лема 11.7, степените на Brouwer $\mathrm{Deg}_r(f \circ h) = \mathrm{Deg}_r(f)$ съвпадат. По-нататък,

$$\mathrm{Deg}_{h(q)}(f \circ h) = \mathrm{Deg}_q(f \circ h) = \mathrm{Deg}_q(f),$$

защото h е биективно изображение, запазващо ориентацията. Вземайки предвид $h(q) = r$ получаваме

$$\mathrm{Deg}_r(f) = \mathrm{Deg}_q(f),$$

Q.E.D.

Благодарение на Следствие 11.8 можем да определим степента на Brouwer на $f : M \to N$ като $\mathrm{Deg}(f) := \mathrm{Deg}_q(f)$ за произволна регулярна стойност $q \in N$. От Лема 11.7 получаваме, че ако гладките изображения $f : M \to N$ и $g : M \to N$ са хомотопни, те имат една и съща степен на Brouwer $\mathrm{Deg}(f) = \mathrm{Deg}(g)$.

Определение 11.9. *Нека $U \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено подмножество, а $V : U \to T^{\mathbb{R}}U$ е гладко векторно поле с изолирана нула p. Разглеждаме кълбо*

$$B(p, \varepsilon) := \left\{ u \in U \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} (u_j - p_j)^2 < \varepsilon^2 \right\}$$

с достатъчно малък радиус $\varepsilon > 0$, в което единствената нула на V е p. Фиксираме ориентация върху $B(p, \varepsilon)$ и индуцираната от нея ориентация върху *граничната сфера* $\partial B(p,\varepsilon) = \left\{ u \in U \ \middle| \ \sum_{j=1}^{n} (u_j - p_j)^2 = \varepsilon^2 \right\}$. *Тогава*

$$\frac{V}{||V||} : \partial B(p,\varepsilon) \longrightarrow \partial B(0^n, 1)$$

е гладко изображение на компактни ориентируеми многообразия, чиято степен на Brouwer

$$\mathrm{Deg}\left(\frac{V}{||V||}\Big|_{\partial B(0^n,1)} \right)$$

се нарича индекс на V *в* p *и се бележи с* $\mathrm{Ind}_p(V)$.

Индексът $\mathrm{Ind}_p(V)$ не зависи от избора на радиус $\varepsilon > 0$ на кълбото $B(p,\varepsilon)$. Поточно, ако p е единствената нула на гладкото векторно поле V в $B(p,\varepsilon_1)$ и в $B(p,\varepsilon_2)$, то изображенията

$$\frac{V}{||V||} : \partial B(p,\varepsilon_1) \longrightarrow \partial B(0^n, 1) \quad \text{и} \quad \frac{V}{||V||} : \partial B(p,\varepsilon_2) \longrightarrow \partial B(0^n, 1)$$

са хомотопни и имат една и съща степен на Brouwer.

Определение 11.10. *Нулата* $p \in U$ *на гладкото векторно поле* $V : U \to T^{\mathbb{R}}U$ *е неизродена, ако* $0_{T_p^{\mathbb{R}}U} \in T_p^{\mathbb{R}}U$ *е регулярна стойност на* V.

Нека $V : U \to T^{\mathbb{R}}U$ е гладко векторно поле с изолирана нула $p \in U$, а $f : U \to W$ е дифеоморфизъм. Диференциалът $df : T^{\mathbb{R}}U \to T^{\mathbb{R}}W$ е гладко изображение на съответните допирателни разслоения. Композицията

$$V' := df \circ V \circ f^{-1} : W \longrightarrow T^{\mathbb{R}}W$$

е гладко векторно поле върху W. Доказва се, че индексите $\mathrm{Ind}_{f(p)}(V') = \mathrm{Ind}_p(V)$ съвпадат. На този факт се основава следващото

Определение 11.11. *Нека* $M \subset \mathbb{R}^n$ *е* k*-мерно компактно ориентируемо многообразие,* $V : M \to T^{\mathbb{R}}M$ *е гладко векторно поле с изолирана нула* $p \in M$ *и* $f : U \cap M \to \mathbb{R}^k$ *или* $f : U \cap M \to \mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}^{\geq 0}$ *е координатна карта върху* M*, чиято дефиниционна област* $U \cap M$ *съдържа* p*. Индексът* $\mathrm{Ind}_p(V) := \mathrm{Ind}_{f(p)}(V')$ *на* V *в* p *се определя като индекса на гладкото векторно поле* $V' := df \circ V \circ f^{-1}$ *в изолираната нула* $f(p)$.

Допирателното разслоение към отвореното подмножество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ е тривиално, т.е. глобално дифеоморфно на директно произведение $T^{\mathbb{R}}U \simeq U \times \mathbb{R}^n$. Затова гладките векторни полета

$$V : U \to T^{\mathbb{R}}U \simeq U \times \mathbb{R}^n,$$

$$V(x) = (x, V_1(x)) \quad \text{за} \quad \forall x \in U$$

са във взаимно еднозначно съответствие с гладките изображения $V_1 : U \to \mathbb{R}^n$. Ако V има неизродена изолирана нула в $p \in U$ и U е достатъчно малка отворена околност на p върху $\mathbb{R}^n$, то V_1 или запазва ориентацията, или я обръща. Ако V_1 запазва ориентацията, то V_1 е гладко изотопно на тъждественото изображение и $\mathrm{Ind}_p(V) = 1$. Дифеоморфизмите V_1, обръщащи ориентацията са гладко изотопни на отражение и имат индекс $\mathrm{Ind}_p(V) = -1$. С това установихме, че индексът на гладко векторно поле V в неизродена изолирана нула p е $\mathrm{Ind}_p(V) = \pm 1$.

Определение 11.12. *Нека* $M \subset \mathbb{R}^n$ *е* n*-мерно многообразие с граница, което се съдържа в* $\mathbb{R}^n$*. Съответствието*

$$g : \partial M \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} = \partial B(0^n, 1),$$

съпоставящо на гранична точка $p \in \partial M$ единичния външен нормален вектор към ∂M в p се нарича изображение на Gauss.

Подпространството $T_p^{\mathbb{R}} \partial M \subset T^{\mathbb{R}} M$ е с $\dim_{\mathbb{R}} T_p^{\mathbb{R}} \partial M = n-1$, така че ортогоналното му допълнение относно евклидовата метрика в $\mathbb{R}^n$ е права $(T_p^{\mathbb{R}} \partial M)^{\perp} \simeq \mathbb{R}$. Ненулевите вектори от $(T_p^{\mathbb{R}} \partial M)^{\perp}$ се наричат нормални вектори към ∂M и се делят на външни и вътрешни.

Твърдение 11.13. *Нека M е компактно ориентируемо многообразие с граница, $g : \partial M \to \partial B(0^n, 1)$ е изображението на Gauss на M, а $V : M \to T^{\mathbb{R}} M$ е гладко векторно поле с неизродени изолирани нули, чиито стойности върху границата ∂M сочат навън. Тогава сумата*

$$\sum_{V(p)=0} \mathrm{Ind}_p(V) = \mathrm{Deg}(g)$$

на индексите на V в неизродените изолирани нули е равна на степента на Brouwer на изображението на Gauss.

Идея за доказателство: Около всяка неизродена изолирана нула p на V избираме кълбо $B(p, \varepsilon)$ с достатъчно малък радиус $\varepsilon > 0$, така че p е единствената нула на V в $B(p, \varepsilon)$. Допълнението

$$N := M \setminus (\cup_{V(p)=0} B(p, \varepsilon))$$

на тези кълба се разглежда като многообразие с граница. Векторното поле V не се анулира върху N и

$$\frac{V}{||V||} : N \longrightarrow \partial B(0^n, 1) = \mathbb{S}^{n-1}$$

е гладко изображение на n-мерното компактно ориентируемо мноогобразие N в $(n-1)$-мерното компактно ориентируемо многообразие $\mathbb{S}^{n-1}$. Съгласно Лема 11.6, ограничението $\frac{V}{||V||} : \partial N \to \mathbb{S}^{n-1}$ върху границата на N има нулева степен на Brouwer, $\mathrm{Deg}\left(\frac{V}{||V||} \Big| \mathbb{S}^{n-1} \right) = 0$. Върху границата на M векторното поле $\frac{V}{||V||}$ е хомотопно на изображението на Gauss и има същата степен на Brouwer. Сумата на индексите $\sum\limits_{V(p)=0} \mathrm{Ind}_p(V)$ е противоположна на степента на Brouwer на $\frac{V}{||V||}$ върху онези гранични компоненти на N, които не са от границата на M. Причина за това е, че спрямо ориентацията на ∂N, нормалните вектори към сферите $\partial B(p, \varepsilon)$ са вътрешни, а степента на Brouwer се пресмята спрямо външни нормални вектори. Степента на Brouwer на $\frac{V}{||V||}$ върху ∂N е сума на степените на Brouwer на това векторно поле върху отделните компоненти на ∂N, така че $\mathrm{Deg}(g) - \sum\limits_{V(p)=0} \mathrm{Ind}_p(V) = 0$, Q.E.D.

Твърдение 11.14. *Нека $M \subset \mathbb{R}^n$ е k-мерно компактно ориентируемо многообразие без граница,*

$$N_{\varepsilon} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \quad \Big| \quad \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \varepsilon^2 \quad \text{за някое} \quad y \in M \right\}$$

е "уплътнение"на M до компактно n-мерно многообразие с граница в $\mathbb{R}^n$, а $g : \partial N_{\varepsilon} \to \mathbb{S}^{n-1} = \partial B(0^n, 1)$ е изображението на Gauss на N_{ε}. Тогава сумата на индексите

$$\sum_{V(p)=0} \mathrm{Ind}_p(V) = \mathrm{Deg}(g)$$

на произволно гладко векторно поле $V : M \to T^{\mathbb{R}}M$ с неизродени изолирани нули е равна на степента на Brouwer на изображението на Gauss.
В частност, сумата на индексите $\sum\limits_{V(p)=0} \mathrm{Ind}_p(V)$ на гладко векторно поле $V : M \to T^{\mathbb{R}}M$ с неизродени изолирани нули не зависи от V и е една и съща за всички гладки векторни полета върху M с неизродени изолирани нули.

Идея за доказателство: Нека $r : N_\varepsilon \to M$ е съответствието, съпоставящо на точка $x \in N_\varepsilon$ най-близката точка $r(x) = y \in M$ относно евклидовата метрика върху $\mathbb{R}^n$. Изображението r е коректно определено за достатъчно малки $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ и се ограничава до тъждественото изображение $r|_M = \mathrm{Id}_M$ на M. С помощта на r ще продължим $V : M \to T^{\mathbb{R}}M$ до гладко векторно поле $W : N_\varepsilon \to T^{\mathbb{R}}N_\varepsilon$, което има същите нули и индекси като V и чиито стойности върху границата ∂N_ε са ненулеви вектори, сочещи навън.
За целта разглеждаме гладката функция

$$f : N_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$f(x) = ||x - r(x)||^2 = \sum_{j=1}^{n} (x_j - r(x)_j)^2,$$

чийто градиент

$$\mathrm{grad}(f) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) = 2(x - r(x))$$

е външен нормален вектор във всички точки $x \in \partial N_\varepsilon$ от границата на N_ε.
Забелязваме, че

$$f^{-1}(\varepsilon^2) := \{x \in N_\varepsilon \mid f(x) = ||x - r(x)||^2 = \varepsilon^2\} = \{x \in N_\varepsilon \mid ||x - r(x)|| = \varepsilon\} = \partial N_\varepsilon,$$

така че изображението на Gauss на N_ε е

$$g : \partial N_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} = \partial B(0^n, 1),$$

$$g(x) = \frac{1}{||\mathrm{grad}(f)(x)||} \mathrm{grad}(f)(x) = \frac{1}{||x - r(x)||}(x - r(x)) = \frac{1}{\varepsilon}(x - r(x)) \quad \text{за} \quad \forall x \in \partial N_\varepsilon.$$

Да напомним, че векторното поле

$$V : M \longrightarrow T^{\mathbb{R}}M \subset T^{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

$$V(x) = (x, V_1(x)) \quad \text{за} \quad \forall x \in M$$

е във взаимно еднозначно съответствие с гладкото изображение $V_1 : M \to \mathbb{R}^n$.
Разглеждаме гладкото изображение

$$W_1 : N_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

$$W_1(x) := V_1(r(x)) + x - r(x) \quad \text{за} \quad \forall x \in N_\varepsilon$$

и асоциираното му гладко векторно поле

$$W : N_\varepsilon \longrightarrow T^{\mathbb{R}}N_\varepsilon \subset T^{\mathbb{R}}\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n,$$

$$W(x) := (x, W_1(x)) \quad \text{за} \quad \forall x \in N_\varepsilon.$$

Във всяка точка $x \in M$ е в сила $r(x) = x$, откъдето $W_1(x) = V_1(x)$ и $W(x) = V(x)$, така че W е продължение на $V : M \to T^{\mathbb{R}}M$. Да означим с

$$\langle \ , \ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \quad \text{за} \quad \forall a.b \in \mathbb{R}^n$$

скаларното произведение в $\mathbb{R}^n$ относно ортонормиран базис и да забележим, че

$$\langle W_1(x), g(x)\rangle = \frac{||x-r(x)||^2}{\varepsilon} + \frac{\langle V_1(r(x)), x-r(x)\rangle}{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{\langle V_1(r(x)), x-r(x)\rangle}{\varepsilon}.$$

Във всяка точка $x \in N_\varepsilon$ векторът $(r(x), V_1(r(x))) = (x, V_1(x)) \in T^{\mathbb{R}}_{r(x)}M$ се допира до M, а оттам и до N_ε, защото транслацията с $x - r(x) \in \mathbb{R}^n$ изобразява многообразието $M \subset \mathbb{R}^n$ в $M + (x - r(x)) \subset N_\varepsilon$. Още повече, $x - r(x)$ е перпендикулярен на $V_1(r(x))$ и $\langle V_1(r(x)), x - r(x)\rangle = 0$ във всяка точка $x \in N_\varepsilon$. В частност, за $x \in \partial N_\varepsilon$ имаме $\langle W_1(x), g(x)\rangle = \varepsilon > 0$ и стойностите на W върху границата ∂N_ε са ненулеви нормални вектори, сочещи навън.
Съгласно перпендикулярността на векторите $V_1(r(x))$ и $x - r(x)$ във всички точки $x \in N_\varepsilon$, равенството $0^n = W_1(x) = V_1(r(x)) + x - r(x)$ е изпълнено само когато $V_1(r(x)) = 0^n$ и $x = r(x)$. С други думи, всички нули на $W : N_\varepsilon \to T^{\mathbb{R}}N_\varepsilon$ се намират върху M и съвпадат с нулите на $V : M \to T^{\mathbb{R}}M$. Съвпадението на индексите $\mathrm{Ind}_p(W) = \mathrm{Ind}_p(V)$ във всяка неизродена изолирана нула $p \in M$ на V следва от съвпадението на векторните полета $W|_{U_p \cap M} = V|_{U_p\cap M}$ за достатъчно малка отворена околност $U_p \subseteq \mathbb{R}^n$ на p. По-точно,

$$W|_{U_p\cap M} = V|_{U_p\cap M}$$

е достатъчно за съвпадението на диференциалите

$$dW|_{\partial B(p,\varepsilon)\cap M} = dV|_{\partial B(p,\varepsilon)\cap M}$$

върху сфера $\partial B(p, \varepsilon) \subset U_p$ с център p и достатъчно малък радиус $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$. Оттук,

$$\det(dW)_q = \det(dV)_q \quad \text{и} \quad \mathrm{sign}(dW)_q = \mathrm{sign}(dV)_q$$

в произволна точка $q \in \partial B(p, \varepsilon) \cap M$, Q.E.D.

4. Теория на Morse

В настоящия параграф ще установим съществуването на гладко векторно поле $V : M \to T^{\mathbb{R}}M$ с неизродени изолирани нули върху многообразие M, чиято сума на индексите съвпада с Ойлеровата характеристика на M. За целта ще използваме теория на Morse.
Нека $f : M \to \mathbb{R}$ е двукратно диференцируема функция. Точката $p \in M$ е критична за f, ако диференциалът $(df)_p = \mathbb{O} : T^{\mathbb{R}}_p M \to T^{\mathbb{R}}_{f(p)}\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$ на f в p е нулевият $\mathbb{R}$-линеен функционал на допирателното пространство $T^{\mathbb{R}}_p M$. Критичната точка $p \in M$ е неизродена, ако стойността $\mathrm{Hess}(f)(p)$ на Хесиана

$$\mathrm{Hess}(f) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

в p е неособена матрица. Във всяка точка q от M Хесианът $\mathrm{Hess}(f)(q)$ е симетрична, а оттам и диагонализуема $n \times n$-матрица с реални собствени стойности. Критична точка $p \in M$ на f е неизродена тогава и само тогава, когато всички собствени стойности на $\mathrm{Hess}(f)(p)$ са ненулеви.

Определение 11.15. *Двукратно диференцируемата функция $f : M \to \mathbb{R}$ върху гладко многообразие M се нарича функция на Morse, ако всички критични точки на f са неизродени.*
Индексът i_p на критична точка $p \in M$ на функция на Morse $f : M \to \mathbb{R}$ е броят на отрицателните собствени стойности на Хесиана $\mathrm{Hess}(f)(p)$ в p.

Може да се докаже, че всяко гладко многообразие M има функция на Morse $f : M \to \mathbb{R}$ е и в сила следната

Лема 11.16. *Нека $f : M \to \mathbb{R}$ е двукратно диференцируема функция върху k-мерно гладко многообразие M с неизродена критична точка p. Тогава съществуват локални координати $x = (x_1, \dots, x_k)$ с център p върху околност $p \in U \subseteq M$, в които*

$$f(x)|_U = f(p) - x_1^2 - \dots - x_{i_p}^2 + x_{i_p+1}^2 + \dots + x_k^2$$

е полином от степен 2.

Да напомним, че топологичните пространства X и Y имат един и същи хомотопичен тип, ако съществуват такива непрекъснати изображения $f : X \to Y$ и $g : Y \to X$, че композицията $g \circ f : X \to X$ е хомотопна на Id_X, а композицията $f \circ g : Y \to Y$ е хомотопна на Id_Y. Например, $\mathbb{R}^2$ има един и същи хомотопичен тип с точка p. По-точно, ако $f : p \to \mathbb{R}^2$ изобразява p в началото $f(p) = 0^2 \in \mathbb{R}^2$, а $g : \mathbb{R}^2 \to p$ е постоянното изображение, трансформиращо всички точки от $\mathbb{R}^2$ в p, то $g \circ f = \mathrm{Id}_p$, а непрекъснатото изображение

$$h : \mathbb{R}^2 \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$h((x_1, x_2), t) := t(x_1, x_2) = (tx_1, tx_2)$$

е хомотопия от $h|_{t=0} = f \circ g$ до $h|_{t=1} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2}$.

Теорема 17. *Нека $f : M \to \mathbb{R}$ е гладка функция върху гладко многообразие M, $a < b$ са такива реални числа, че праобразът $f^{-1}[a,b]$ на затворения интервал $[a,b] \subset \mathbb{R}$ не съдържа критични точки на f. Тогава затворените подмножества $f^{-1}(-\infty, a]$ и $f^{-1}(-\infty, b]$ на M са дифеоморфни помежду си и имат един и същи хомотопичен тип.*

Идея за доказателство: Трябва да се построи непрекъсната деформация на $f^{-1}(-\infty, b]$ в $f^{-1}(-\infty, a]$ по протежение на нормалния вектор на хиперповърхнина $f^{-1}(c) \subset M$, $c \in (a,b)$. Точка $p \in M$ е критична за f точно когато градиентът $\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ се анулира в p.
Нека $\rho : M \to \mathbb{R}$ е гладка функция, зададена с формулата

$$\rho(p) = \frac{1}{||\mathrm{grad}(f)(p)||^2} \quad \text{за} \quad \forall p \in f^{-1}[a,b]$$

и анулираща се извън компактна околност K на $f^{-1}[a,b]$ в M. Тогава

$$X : M \longrightarrow T^{\mathbb{R}}M,$$

$$X(p) = \rho(p).\mathrm{grad}(f)(p)$$

е гладко векторно поле, анулиращо се извън K.
Да напомним, че 1-параметрична група от дифеоморфизми на многообразие M е гладко изображение $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$, така че за $\forall t \in \mathbb{R}$ ограничението $\varphi(t, \ ) : M \to M$ е дифеоморфизъм и $\varphi(t+s, x) = \varphi(t, \varphi(s,x))$ за $\forall t, s \in \mathbb{R}$. Може да се докаже, че за произволно гладко векторно поле $X : M \to T^{\mathbb{R}}M$, анулиращо се извън компактно подмножество $K \subset M$ съществува единствена 1-параметрична група от дифеоморфизми $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ с

$$\frac{\partial \varphi(t,q)}{\partial t} = X(\varphi(t,q)).$$

В случая, ако $\varphi(t,q) \in f^{-1}[a,b]$, то

$$\frac{\partial f \circ \varphi(t,q)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t}(t,q) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t,q)) = \sum_{i=1}^{n} X_i(\varphi(t,q)) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t,q)) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{||\mathrm{grad}(f \circ \varphi(t,q))||^2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\varphi(t,q)) = 1.$$

Следователно $t \mapsto f \circ \varphi(t,q)$ е линейна функция с производна 1 за $\varphi(t,q) \in f^{-1}[a,b]$. Оттук, $\varphi(b-a,\ ) : M \to M$ е дифеоморфизъм, изобразяващ $f^{-1}(-\infty,a]$ в $f^{-1}(-\infty,b]$.
Още повече,

$$r_t : f^{-1}(-\infty,b] \longrightarrow f^{-1}(-\infty,b],$$

$$r_t(p) = \begin{cases} p & \text{за } f(p) \leq a, \\ \varphi(t(a-f(p)),p) & \text{за } a \leq f(p) \leq b, \end{cases}$$

е 1-параметрична фамилия от гладки изображения, чрез която установяваме, че $f^{-1}(-\infty,a]$ и $f^{-1}(-\infty,b]$ имат един и същи хомотопичен тип.
За да опишем промяната на хомотопичния тип на затвореното подмножество $f^{-1}(-\infty,a]$ при преминаване през критична точка $p \in f^{-1}(-\infty,b] \setminus f^{-1}(-\infty,a]$ да напомним, че непрекъснатите образи на затворени кълба в $\mathbb{R}^n$ се наричат затворени клетки. Отворени клетки са непрекъснатите образи на вътрешностите на такива кълба. Клетъчен комплекс X е Хаусдорфово топологично пространство, което е разбито в непресичащо се обединение $X = \coprod_{s\in S} C_s$ на отворени клетки C_s. За произволна отворена n-мерна клетка C_n на X съществува непрекъснато изображение

$$f : \overline{B(0^n,1)} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ \Big| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\} \longrightarrow X,$$

което се ограничава до хомеоморфизъм

$$f : B(0^n,1) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ \Big| \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1 \right\} \longrightarrow C_n.$$

Образът $f(\partial B(0^n,1))$ на сферата $\partial B(0^n,1) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ \Big| \ \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$ се съдържа в обединението на краен брой отворени клетки на X с размерност $< n$. Клетъчните комплекси X се наричат closure-finite complexes with weak topology или накратко, CW-комплекси, защото всяка затворена клетка на X се покрива с краен брой отворени клетки.

Теорема 18. *Нека $f : M \to \mathbb{R}$ е гладка функция върху многообразие M, $p \in M$ е неизродена критична точка на f с индекс i, а $f^{-1}([f(p)-\varepsilon, f(p)+\varepsilon])$ е компактно подмножество на M, върху което f има единствена критична точка p. Тогава за достатъчно малко реално число $\varepsilon > 0$, залепването на i-мерна клетка към $f^{-1}(-\infty, f(p)-\varepsilon]$ дава клетъчен комплекс, който има същия хомотопичен тип като $f^{-1}(-\infty, f(p)+\varepsilon]$.*

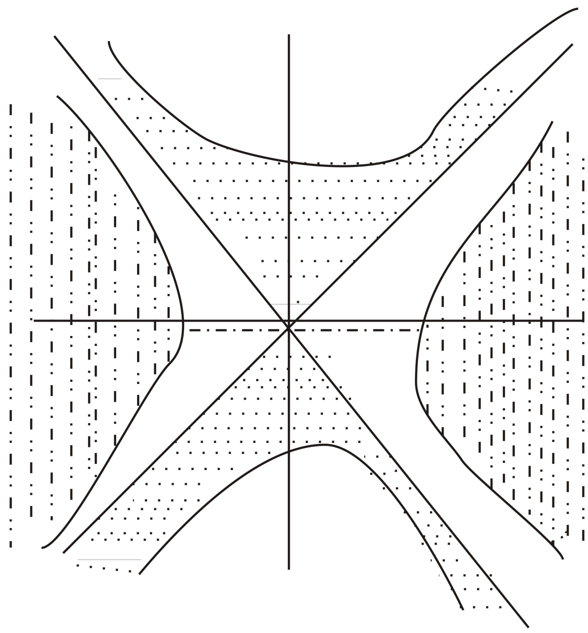
Идея за доказателство: Съгласно Лема 11.16 на Morse, съществуват локални координати $x = (x_1,\ldots,x_k)$ с център p върху околност U на p върху M, в които

$$f(x)|_U = f(p) - x_1^2 - \ldots - x_i^2 + x_{i+1}^2 + \ldots + x_k^2.$$

Избираме достатъчно малко реално $\varepsilon > 0$, така че образът на координатното изображение $x = (x_1,\ldots,x_k) : U \to \mathbb{R}^k$ да съдържа затвореното кълбо $\overline{B(0^k,\sqrt{2\varepsilon})} = \left\{ x \in \mathbb{R}^k \ \Big| \ \sum_{j=1}^{k} x_j^2 \leq 2\varepsilon \right\}$. Тогава сечението

$$C_i := \overline{B(0^k,\sqrt{\varepsilon})} \cap \{x \in \mathbb{R}^k \ \mid \ x_{i+1} = \ldots = x_k = 0\} =$$

$$\left\{ (x_1,\ldots,x_i,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^k \ \Big| \ \sum_{j=1} x_j^2 \leq \varepsilon \right\}$$



Фигура 1. Залепване на клетка при преминаване през критична точка на функция на Morse

е затворена i-мерна клетка. На Фигура 1, хоризонталната ос отговаря на подпространството $\mathbb{R}^i \times 0^{k-i}$ на $\mathbb{R}^k$, а вертикалната - на $0^i \times \mathbb{R}^{k-i}$. Окръжността представя сферата $\partial B(0^k, \sqrt{2\varepsilon})$. Хиперболите с ос $\mathbb{R}^i \times 0^{k-i}$ образуват хиперповърхнината $f^{-1}(f(p) - \varepsilon)$, наклонените прави през началото - хиперповърхнината $f^{-1}(f(p))$, а хиперболите с ос $0^i \times \mathbb{R}^{k-i}$ съответстват на $f^{-1}(f(p) + \varepsilon)$. Хоризонталната отсечка, свързваща пресечните точки на $f^{-1}(f(p) - \varepsilon)$ с $\mathbb{R}^i \times 0^{k-i}$ отговаря на клетката C_i. Подмножеството $f^{-1}(-\infty, f(p) - \varepsilon)$ се състои от точките, които са наляво и надясно от хиперболите с ос $\mathbb{R}^i \times 0^{k-i}$. Точките между наклонените прави и хиперболите с ос $\mathbb{R}^i \times 0^{k-i}$ образуват $f^{-1}[f(p) - \varepsilon, f(p)]$. Аналогично, точките между наклонените прави и хиперболите с ос $0^i \times \mathbb{R}^{k-i}$ представят областта $f^{-1}[f(p), f(p) + \varepsilon]$, а областта, намираща се над и под хиперболите с ос $0^i \times \mathbb{R}^{k-i}$ представя множеството $f^{-1}[f(p) + \varepsilon, +\infty)$.
Да забележим, че сечението $C_i \cap f^{-1}(-\infty, f(p) - \varepsilon] = \partial C_i$ е точно границата на C_i, която е "залепена"за $f^{-1}(f(p) - \varepsilon)$. Трябва да докажем, че обединението $f^{-1}(-\infty, f(p) - \varepsilon] \cup_{\partial C_i} C_i$, в което ∂C_i е отъждествено с $f^{-1}(f(p) - \varepsilon)$ има същия хомотопичен тип като $f^{-1}(-\infty, f(p) + \varepsilon]$.
За целта избираме гладка функция $\mu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с $\mu(r) = 0$ за $\forall r \in [2\varepsilon, 0]$, $\mu(0) > \varepsilon$ и $-1 < \mu'(r) \leq 0$ за $\forall r \in \mathbb{R}$. С нейна помощ построяваме гладката функция

$$F : M \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{с}$$

$$F|_{M \setminus U} := f|_{M \setminus U} \quad \text{и}$$

$$F|_U = f - \mu(x_1^2 + \ldots + x_i^2 + 2x_{i+1}^2 + \ldots + 2x_k^2).$$

Полагаме $\xi(x) := x_1^2 + \ldots + x_i^2$ и $\eta(x) := x_{i+1}^2 + \ldots + x_k^2$ за $\forall x \in U$ и изразяваме $f|_U = f(p) - \xi + \eta$. Тогава

$$F(q) = f(p) - \xi(q) + \eta(q) - \mu[\xi(q) + 2\eta(q)] \quad \text{за} \quad \forall q \in U.$$

Проверява се, че $F^{-1}(-\infty, f(p) + \varepsilon] = f^{-1}(-\infty, f(p) + \varepsilon]$, F няма критични точки в U и $F^{-1}(-\infty, f(p) - \varepsilon]$ има един и същи хомотопичен тип с $f^{-1}(-\infty, f(p) + \varepsilon]$. Затворената обвивка H на $F^{-1}(-\infty, f(p) - \varepsilon] \setminus f^{-1}(-\infty, f(p) - \varepsilon]$ наричаме "дръжка"и представяме $F^{-1}(-\infty, f(p)-\varepsilon] = f^{-1}(-\infty, f(p)-\varepsilon] \cup H$. Клетката $C_i = \{x \in \mathbb{R}^i \times 0^{k-i} \ \mid \ \xi(x) \leq \varepsilon, \ \ \eta(x) = 0\}$ се съдържа в H. Достатъчно е да се провери, че $f^{-1}(-\infty, f(p)-\varepsilon) \cup C_i$ и $f^{-1}(-\infty, f(p)-\varepsilon) \cup H$ имат един и същи хомотопичен тип, за да се докаже Теорема 18.

Известно е, че многообразията с един и същи хомотопичен тип имат равни Ойлерови характеристики. Този факт дава възможност за пресмятане на Ойлеровата характеристика на компактно многообразие M чрез индексите на неизродените критични точки на функция на Morse $f : M \to \mathbb{R}$. По-точно, ако $\dim_{\mathbb{R}} M = k$ и за $\forall 0 \leq j \leq k$ функцията на Morse f има i_j неизродени критични точки с индекс j, то Ойлеровата характеристика на M е

$$\chi(M) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j i_j.$$

В доказателството на Теоремата на Poincqré-Hopf ще използваме следната

Лема 11.17. *Градиентът* $\mathrm{grad}(f) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_k}\right)$ *на функция на Morse* $f : M \to \mathbb{R}$ *върху k-мерно многообразие M е гладко векторно поле с неизродени изолирани нули, чиято сума на индексите*

$$\sum_{\mathrm{grad}(f)(p)=0} \mathrm{Ind}_p(\mathrm{grad}(f)) = \chi(M)$$

равна на Ойлеровата характеристика на M.

Доказателство: Вече споменахме, че нулите на градиента $\mathrm{grad}(f)$ на f са точно критичните точки на f. Хесианът $\mathrm{Hess}(f)$ на f съвпада с диференциала на градиентното векторно поле $\mathrm{grad}(f)$, така че $p \in M$ е неизродена критична точка на f тогава и само тогава, когато p е неизродена нула на $\mathrm{grad}(f)$. Ако $p_1, \ldots, p_m$ са неизродените критични точки на f, достатъчно е да докажем, че

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Ind}_{p_i}(\mathrm{grad}(f)) = \chi(M).$$

По Лема 11.16 на Morse, за $\forall 1 \leq i \leq m$ съществуват отворена околност U_i а p_i върху M и локални координати $(x_{i,1}, \ldots, x_{i,k})$ с център p_i, така че

$$f|_{U_i} = f(p_i) - x_{i,1}^2 - \ldots - x_{i,\sigma_i}^2 + x_{i,\sigma_i+1}^2 + \ldots + x_{i,k}^2 \tag{11.2}$$

за индекса σ_i на p_i. Да напомним, че индексът

$$\mathrm{Ind}_{p_i}(\mathrm{grad}(f)) = \mathrm{Deg}\left(\frac{\mathrm{grad}(f)}{||\mathrm{grad}(f)||}\right)\Big|_{\partial B(0^n,1)}$$

на $\mathrm{grad}(f)$ в p_i е равен на степента на Brouwer на единичното векторно поле $\frac{\mathrm{grad}(f)}{||\mathrm{grad}(f)||}$ върху граничната окръжност $\partial B(p_i, \varepsilon)$ на кълбо $B(p_i, \varepsilon) \subset U_i$ с център p_i и достатъчно малък радиус $\varepsilon > 0$. От своя страна,

$$\mathrm{Deg}\left(\frac{\mathrm{grad}(f)}{||\mathrm{grad}(f)||}\right)\Big|_{\partial B(0^n,1)} = \mathrm{sign}\det\mathrm{Hess}(f)\Big|_{\partial B(p_i,\varepsilon)} = (-1)^{\sigma_i},$$

съгласно (11.2). Следователно

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Ind}_{p_i}(\mathrm{grad}(f)) = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{\sigma_i}.$$

За всяко $0 \leq j \leq k$ да означим с i_j броят на неизродените критични точки f с индекс j. Тогава $i_0 + \ldots + i_k = m$ и

$$\sum_{i=1}^{m} (-1)^{\sigma_i} = i_0(-1)^0 + i_1(-1)^1 + \ldots + i_k(-1)^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j i_j = \chi(M),$$

Q.E.D.

5. Теорема на Poincaré-Hopf върху гладко многообразие и върху Риманова повърхнина

Лема 11.18. *За произволно гладко векторно поле $V : U \to T^{\mathbb{R}}U \simeq U \times \mathbb{R}^k$ с изолирани нули върху отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{R}^k$ и изродена нула $q \in U$ съществува гладко векторно поле $W : U \to T^{\mathbb{R}}U$ с неизродени изолирани нули и същата сума на индексите*

$$\sum_{W(p)=0} \mathrm{Ind}_p(W) = \sum_{V(p)=0} \mathrm{Ind}_p(V). \tag{11.3}$$

Доказателство: Избираме достатъчно малко $\varepsilon > 0$, така че кълбото $B(q, 2\varepsilon)$ с център q и радиус 2ε се съдържа изцяло в U и q е единствената нула на V в $B(q, 2\varepsilon)$. Нека $f : U \to [0,1]$ е гладка функция с $f|_{B(q,\varepsilon)} \equiv 1$ и $f|_{U \setminus B(q,2\varepsilon)} \equiv 0$. По Теоремата на Sard, съществува регулярна стойност $V(r) \in T_r^{\mathbb{R}}U$ на V. Полагаме

$$W : U \longrightarrow T^{\mathbb{R}}U \simeq U \times \mathbb{R}^k,$$

$$W(x) := V(x) - f(x)V(r) \quad \text{за} \quad \forall x \in U.$$

Поради изолираността на нулата q на V в $B(q, 2\varepsilon)$ съществува реално $\delta > 0$, така че $||V(x)|| > \delta$ за $\forall x \in B(q, 2\varepsilon) \setminus B(q, \varepsilon)$. Избираме $r \in U$ по такъв начин, че $||V(r)|| < \delta$ и всички нули на $W(x)$ са в $B(q, \varepsilon)$. Съгласно $f|_{B(q,\varepsilon)} \equiv 1$, във всяка нула $s \in U$ на W имаме $dW(s) = dV(s) \neq 0$, защото $V(s) = V(r)$ и $V(r)$ е регулярна стойност на V. Следователно всички нули на $W : U \to T^{\mathbb{R}}U$ са неизродени.

Понеже q е единствената нула на V в $B(q, 2\varepsilon)$, равенството (11.3) се свежда към

$$\sum_{W(p)=0} \mathrm{Ind}_p(W) = \mathrm{Ind}_q(V).$$

Доказателството е аналогично на това за Твърдение 11.14. По-точно, избираме достатъчно малко $\varepsilon' > 0$, така че за всяка нула p на W кълбото $B(p, \varepsilon')$ не съдържа други нули на W освен p. Прелахваме тези кълба и пресмятаме

$$\mathrm{Ind}_p(W) = \mathrm{Deg}\left(\frac{W}{||W||}\right)\Big|_{\partial B(0^n,1)}$$

като степените на Brouwer а единичното векторно поле $\frac{W}{||W||}$ върху сферата $\partial B(p, \varepsilon')$. Върху външната граница на допълнението

$$U_o := U \setminus \left(\coprod_{W(p)=0} B(p, \varepsilon') \right),$$

векторните полета V и W съвпадат. Оттук, степените на Brouwer на $\frac{W}{||W||}$ и на $\frac{V}{||V||}$ съвпадат върху външната граница на U_o. Лемата следва от анулирането на степента на Brouwer на $\frac{W}{||W||}$ върху образа на границата на U_o, Q.E.D.

Теорема 19. (на Poincaré-Hopf върху гладко многообразие) *Нека M е компактно ориентируемо многообразие без граница, а $V : M \to T^{\mathbb{R}}M$ е гладко векторно поле с изолирани нули. Тогава сумата на индексите*

$$\sum_{V(p)=0} \mathrm{Ind}_p(V) = \chi(M)$$

на V е равна на Ойлеровата характеристика на M.

Доказателство: Съгласно Лема 11.18, можем да предполагаме, че всички нули на V са неизродени. Прилагаме Твърдение 11.14 и получаваме, че сумата на индексите $\sum\limits_{V(p)=0} \mathrm{Ind}_p(V)$ е една и съща за всички гладки векторни полета $V : M \to T^{\mathbb{R}}M$ с неизродени изолирани нули. По Лема 11.17, произволна функция на Morse $f : M \to \mathbb{R}$ осигурява гладко векторно поле $V_o = \mathrm{grad}(f) : M \to T^{\mathbb{R}}M$ с неизродени изолирани нули и

$$\sum_{V_o(p)=0} \mathrm{Ind}_p(V_o) = \chi(M),$$

Q.E.D.
Като следствие от Теорема 19 на Poincaré-Hopf върху гладко многообразие M получаваме следващата

Теорема 20. (на Poincaré-Hopf върху Риманова повърхнина) *Ако C е компактна Риманова повърхнина, а $\omega \in \mathcal{M}^1(C) \setminus \{0\}$ е ненулева мероморфна диференциална форма върху C, то сумата*

$$\sum_{p \in C} \nu_p(\omega) = -\chi(C)$$

на кратностите на ω е противоположна на Ойлеровата характеристика на C.

Доказателство: Теоремата на Poincaré-Hopf се обобщава за векторни полета V с краен брой нули и полюси $p_1, \ldots, p_m$ върху C чрез равенството

$$\sum_{i=1}^{m} \mathrm{Deg}\left(\frac{V}{||V||}\right)\Big|_{\frac{V}{||V||}(p_i)} = \chi(C). \tag{11.4}$$

По-точно, казваме, че $p \in C$ е неизродена нула или полюс на векторното поле

$$a(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + b(x,y)\frac{\partial}{\partial y} : U_p \longrightarrow T^{\mathbb{R}}C|_{U_p} \simeq U_p \times \mathbb{C},$$

ако изображението

$$a(x,y) + ib(x,y) : U_p \longrightarrow \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

има регулярна стойност

$$a(0,0) + ib(0,0) \in \{0 = [1:0], \infty = [0:1]\} \subset \mathbb{P}^1.$$

Обобщавайки доказателството на Лема 11.18 можем да установим, че за всяко $1 \leq i \leq m$ съществува векторно поле $W_i : U_i \to T^{\mathbb{R}}C|_{U_i}$ с неизродени нули и полюси, така че

$$\mathrm{Deg}\left(\frac{V}{||V||}\right)\Big|_{\frac{V}{||V||}(p_i)} = \sum_{W_i(q) \in \{0,\infty\}} \mathrm{Deg}\left(\frac{W_i}{||W_i||}\right)\Big|_{\frac{W_i}{||W_i||}(q)}.$$

Да означим с W полученото векторно поле върху C с краен брой неизродени нули и полюси. Да предположим, че Римановата повърхнина C е вложена в $\mathbb{R}^n$. За произволно $\varepsilon > 0$ разглеждаме "уплътнението"

$$N_\varepsilon := \left\{ u \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \exists v \in C \subset \mathbb{R}^n \quad \text{с} \quad \sum_{i=1}^{n}(u_i - v_i)^2 \leq \varepsilon^2 \right\}$$

на компактното ориентируемо многообразие C без граница до n-мерно многообразие с гарница в $\mathbb{R}^n$ и изображението на Gauss

$$g : \partial N_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1} = \partial B(0^n, 1) \subset \mathbb{R}^n$$

на N_ε. Модификация на разглежданията от доказателството на Твърдение 11.14 дава

$$\sum_{W(p_i)\in\{0,\infty\}} \mathrm{Deg}\left(\frac{W}{||W||}\right)\Big|_{\frac{W}{||W||}(p_i)} = \mathrm{Deg}(g)\Big|_{\partial B(0^n,1)}$$

за произволно векторно поле W върху C с краен брой неизродени нули и полюси. В резултат,

$$\sum_{W(p_i)\in\{0,\infty\}} \mathrm{Deg}\left(\frac{W}{||W||}\right)\Big|_{\frac{W}{||W||}(p_i)} = \sum_{V_o(q)=0} \mathrm{Deg}\left(\frac{V_o}{||V_o||}\right)\Big|_{\frac{V_o}{||V_o||}(q)}$$

за всяко гладко векторно поле $V_o : C \to T^{\mathbb{R}}C$ с краен брой неизродени нули и полюси. Лема 11.17 установява, че за произволна функция на Morse $f : C \to \mathbb{R}$ градиентът $\mathrm{grad}(f) : C \to T^{\mathbb{R}}C$ е гладко векторно поле с краен брой неизродени изолирани нули и

$$\sum_{\mathrm{grad}(f)(p)=0} \mathrm{Ind}_p(\mathrm{grad}(f)) = \chi(C).$$

Това доказва (11.4) за векторно поле V върху C с краен брой нули и полюси. Реалната част

$$\mathrm{Re}\omega := \frac{1}{2}(\omega + \overline{\omega})$$

на ω е диференциална 1-форма с краен брой изолирани полюси $p_1, \ldots, p_m$ върху C. Тя отговаря на гладко векторно поле $V : C \setminus \{p_1, \ldots, p_m\} \to T^{\mathbb{R}}C$ върху допълнението на полюсите. Всяка точка $p \in C$ има достатъчно малка околност U върху C, така че ω няма нули и полюси в $U \setminus \{p\}$. Спрямо подходяща холоморфна координата z върху U с център p, формата ω се представя във вида $\omega|_U = z^\nu dz$ с $\nu = \nu_p(\omega) \in \mathbb{Z}$. Въвеждаме полярни координати $re^{i\theta} = z = x + iy$ и пресмятаме, че реалната част на ω е

$$\mathrm{Re}\omega|_U = \frac{1}{2}(\omega|_U + \overline{\omega}|_U) = \frac{1}{2}(z^\nu + \overline{z}^\nu)dx + \frac{i}{2}(z^\nu - z^{-\nu})dy =$$
$$r^\nu \cos(\nu\theta)dx - r^\nu \sin(\nu\theta)dy = r^\nu[\cos(\nu\theta)dx - \sin(\nu\theta)dy].$$

Векторното поле $V : C \to T^{\mathbb{R}}C$ с

$$V|_U := r^\nu \left[\cos(\nu\theta)\frac{\partial}{\partial x} - \sin(\nu\theta)\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

за избраните по-горе околности U на p върху C има краен брой полюси $p_1, \ldots, p_m$. Избираме достатъчно малко $\varepsilon > 0$, така че околностите U_i на p_i с $\omega|_{U_i} = z^{\nu_i}dz$ за $\nu_i := \nu_{p_i}(\omega)$ да съдържат дисковете $\Delta(p_i, \varepsilon)$ с център p_i и радиус $\varepsilon > 0$ за $\forall 1 \leq i \leq m$. Съгласно 11.4, достатъчно е да проверим, че степените на Brouwer

$$\mathrm{Deg}\left(\frac{V}{||V||}\right)\Big|_{\frac{V}{||V||}(p_i)} = -\mu_i = -\nu_{p_i}(\omega)$$

на единичните векторни полета $\frac{V}{||V||}$ върху граничните окръжности $\partial\Delta(p_i, \varepsilon)$ съвпадат с кратностите на ω в p_i.
Нека

$$V\Big|_U = r^\nu \left[\cos(\nu\theta)\frac{\partial}{\partial x} - \sin(\nu\theta)\frac{\partial}{\partial y}\right]$$

за някакво цяло число ν. Непосредствено се пресмята, че $||V|| = r^\nu$ и

$$V_1 := \frac{V}{||V||}\Big|_U = \cos(\nu\theta)\frac{\partial}{\partial x} - \sin(\nu\theta)\frac{\partial}{\partial y} = \cos(-\nu\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(-\nu\theta)\frac{\partial}{\partial y}.$$

Разглеждаме

$$V_1 : \partial\Delta(p, \varepsilon) \longrightarrow \partial\Delta(0, 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

като гладко изображение на окръжности. Относно ъглова координата θ върху

$$\partial\Delta(p,\varepsilon) = \{\varepsilon e^{i\theta} = \varepsilon(\cos\theta + i\sin\theta) \ \mid \ \theta \in [0,2\pi)\}$$

и ъглова координата ψ върху

$$\partial\Delta(0,1) = \{e^{i\psi} = \cos\psi + i\sin\psi \ \mid \ \psi \in [0,2\pi)\}$$

изображението V_1 има вида

$$V_1(\theta) = -\nu\theta.$$

Диференциалът на V_1 в произволна точка $\theta \in [0,2\pi)$ е

$$(dV_1)_\theta = -\nu$$

и всички стойности $\psi \in [0,2\pi) = V_1([0,2\pi))$ са регулярни.
Произволно фиксирано $\psi \in [0,2\pi)$ има $|\nu| \in \mathbb{N}$ праобраза

$$V_1^{-1}(\psi) = \{\theta \in [0,2\pi] \ \mid \ V_1(\theta) = -\nu\theta = \psi\} = \left\{ \frac{-\psi + 2j\pi}{\nu} \ \middle| \ 0 \leq j \leq |\nu| - 1 \right\}.$$

По определение, степента на Brouwer

$$\mathrm{Deg}_\psi(V_1) := \sum_{\theta \in V_1^{-1}(\psi)} \mathrm{sign}(dV_1)_\theta = |\nu|\mathrm{sign}(-\nu) = -|\nu|\mathrm{sign}(\nu) = -\nu,$$

Q.E.D.