Глава 10

Мероморфни функции и диференциали върху Риманови повърхнини

1. Кратност на мероморфна функция или мероморфна диференциална форма върху Риманова повърхнина

Нека M е комплексно многообразие с размерност n, а $\mathcal{O}_M$ е снопът на холоморфните функции върху M. За произволно отворено подмножество $U \subseteq M$, пръстенът $\mathcal{O}_M(U)$ на холоморфните функции $f : U \to \mathbb{C}$ е комутативна област с единица $1 \in \mathbb{C}$. Означаваме с $\mathcal{M}(U)$ полето от частни на $\mathcal{O}_M(U)$ и казваме, че елементите на $\mathcal{M}(U)$ са мероморфни функции върху U. За произволни $g, h \in \mathcal{O}_M(U)$ съществува отворено подмножество $U_o := U \setminus Z(h)$ на U, така че ограничението $\frac{g}{h}|_{U_o} : U_o \to \mathbb{C}$ е коректно определено изображение.

За произволно отворено подмножество $U \subseteq M$ и произволно отворено покритие $U = \cup_{i \in I} U_i$ разглеждаме фамилиите $\left\{ \frac{g_i}{h_i} \right\}_{i \in I}$ от частни на локални холоморфни функции $g_i, h_i \in \mathcal{O}_M(U_i)$, изпълняващи условията за съгласуваност

$$\frac{g_i}{h_i}\Big|_{W_{i,j}} = \frac{g_j}{h_j}\Big|_{W_{i,j}}$$

върху сеченията $W_{i,j} := (U_i \cap U_j) \setminus Z(h_i h_j)$ на дефиниционните си области за $\forall i, j \in I$ с $U_i \cap U_j \neq \emptyset$. Съответствието, съпоставящо на отворено подмножество $U \subseteq M$ множеството

$$\mathcal{M}(U) := \left\{ \left\{ \frac{g_i}{h_i} \right\}_{i \in I} \ \Big| \ U = \cup_{i \in I} U_i, \quad g_i, h_i \in \mathcal{O}_M(U_i), \right.$$
$$\left. \frac{g_i}{h_i}\Big|_{(U_i \cap U_j) \setminus Z(h_i h_j)} = \frac{g_j}{h_j}\Big|_{(U_i \cap U_j) \setminus Z(h_i h_j)} \quad \text{за} \quad \forall i, j \in I \right\}$$

е снопът на мероморфните функции върху M. Тук $Z(h_i h_j) = Z(h_i) \cup Z(h_j)$ е обединението на точките на неопределеност на $\frac{g_i}{h_i}$ и $\frac{g_j}{h_j}$ върху $U_i \cap U_j$. Глобалните сечения $f \in \mathcal{M}(M)$ се наричат мероморфни функции върху M. Да отбележим, че не всички мероморфни функции $f \in \mathcal{M}(M)$ са глобално определение изображения на M.

Отсега нататък ще се концентрираме върху гладките комплексни криви C, т.е. върху 1-мерните комплексни многобразия, известни и като Риманови повърхнини. Съгласно Твърдение 2.1, за произволна холоморфна функция $g \in \mathcal{O}_C(U)$ върху отворено подмножество $U \subseteq C$ и произволна точка $p \in U$ съществува отворена околност $p \in V_p \subseteq U$, в която $g|_{V_p} = z^m u(z)$ за локална холоморфна координата z върху V_p с център p, $m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ и $u \in \mathcal{O}_C^*(V_p)$. Следователно за произволно отворено подмножество $U \subseteq C$, произволна мероморфна функция $f \in \mathcal{M}(U)$ върху U и произволна точка $p \in U$ съществува отворена околност $p \in W_p \subseteq U$, така че

$$f|_{W_p} = z^k v(z) \quad \text{за} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{и} \quad v \in \mathcal{O}_C^*(W_p).$$

Цялото число k се нарича кратност на мероморфната функция f в p и се бележи с $\nu_p(f)$. Ако $\nu_p(f) < 0$, то казваме, че p е полюс на f. Точките p с $\nu_p(f) > 0$ се наричат нули на f.

Задача 10.1. *Да се докаже, че кратността $\nu_p(f)$ на локална мероморфна функция f в околност на точка p от гладка комплексна крива C не зависи от избора на локална холоморфна координата.*

Съгласно Теорема 2, след евентуално свиване на W_p с $f|_{W_p} = z^k v(z)$, $k \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathcal{O}_C^*(W_p)$ можем да предполагаме, че Тейлъровият ред

$$v(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^i v}{\partial z^i}(0)\frac{z^i}{i!}$$

на $v(z)$ е обсолютно и равномерно сходящ към $v(z)$ върху W_p. В резултат, локалната мероморфна функция

$$f|_{W_p} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^i v}{\partial z^i}(0)\frac{z^{k+i}}{i!} = \sum_{j\geq k} \frac{\partial^{j-k} v}{\partial z^{j-k}}(0)\frac{z^j}{(j-k)!} \tag{10.1}$$

се представя със степенен ред в $W_p \setminus \{p\}$. Казваме, че (10.1) е редът на Laurent на f около p.

Твърдение 10.2. *Глобалните мероморфни функции $f \in \mathcal{M}(C)$ върху Риманова повърхнина C са точно холоморфните изображения $f : C \to \mathbb{P}^1$ в проективната права $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ с $f(C) \neq \{\infty\}$.*

Доказателство: Произволна мероморфна функция $f \in \mathcal{M}(C)$ може да се разглежда като изображение

$$f : C \longrightarrow \mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \tag{10.2}$$

което приема стойност ∞ в полюсите на f. Холоморфността на (10.2) е локално понятие и е ясна върху допълнението на полюсите на f. Изображението (10.2) е непрекъснато в полюс p на f, защото за $z \to p$ имаме $|f(z)| \to \infty$. Холоморфността на f в полюс p е еквивалентна на холоморфността на $g \circ f$ за произволна холоморфна функция g върху околност на ∞ върху $\mathbb{P}^1$. Но g е холоморфна в околност на ∞ върху $\mathbb{P}^1$ тогава и само тогава, когато функцията

$$h(z) = \begin{cases} g\left(\frac{1}{z}\right) & \text{за } z \neq 0, \\ g(\infty) & \text{за } z = 0 \end{cases}$$

е холоморфна в околност на 0 върху $\mathbb{P}^1$. В достатъчно малка околност на p, спрямо локална холоморфна координата z с център p можем да представим $f(z) = \frac{u(z)}{z^n}$ за някакво $n \in \mathbb{N}$ и неанулираща се в околност на $z \neq 0$ холоморфна функция $u(z)$. Тогава

$$g \circ f = h\left(\frac{1}{f}\right) = h\left(\frac{z^n}{u(z)}\right)$$

е холоморфна функция в околност на 0 и изображението (10.2) е холоморфно в околност на полюса p на f.

Обратно, нека $f : C \to \mathbb{P}^1$ е холоморфно изображение. Покриваме проективната права $\mathbb{P}^1 = U_0 \cup U_1$ със стандартните афинни отворени подмножества $U_i = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1 \,|\, z_i \neq 0\}$ и отъждествяваме $U_0 \simeq \mathbb{C}$, $U_1 \setminus U_0 = \{\infty\}$. Тогава $f : f^{-1}(U_0) \to U_0 \simeq \mathbb{C}$ е холоморфна функция. Множеството $f^{-1}(\infty)$ е дискретно, защото при подходящ избор на холоморфна координата върху $\mathbb{P}^1$,

$f^{-1}(\infty)$ е множеството на нулите на f. Върху достатъчно малка околност W на $p \in f^{-1}(\infty)$ върху C с $W \cap f^{-1}(0) = \emptyset$, функцията

$$\frac{1}{f} : W \longrightarrow \mathbb{C}$$

е холоморфна. Оттук $\frac{1}{f} = z^m v(z)$ за холоморфна функция $v : W \to \mathbb{C}^*$ и $m \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$. В резултат, функцията

$$f|_W = z^{-m} v(z)^{-1}$$

е мероморфна в W, а оттам и върху C, Q.E.D.

Нека C е Риманова повърхнина. Върху произволно отворено подмножество $U \subseteq C$ избираме холоморфна координата z_U и разглеждаме снопа $\mathcal{M}^1$ на мероморфните диференциали върху C със сечения

$$\mathcal{M}^1(U) := \left\{ \left\{ \frac{g_i}{h_i} dz_{U_i} \right\}_{i\in I} \ \Big| \ U = \cup_{i\in I} U_i, \quad g_i, h_i \in \mathcal{O}_C(U_i), \right.$$
$$\left. \frac{g_i}{h_i} dz_{U_i} \Big|_{(U_i \cap U_j)\setminus Z(h_i h_j)} = \frac{g_j}{h_j} dz_{U_j} \Big|_{(U_i \cap U_j)\setminus Z(h_i h_j)} \quad \text{за} \quad \forall i, j \in I \right\}.$$

Задача 10.3. *Нека* $\omega = \left\{ \frac{\alpha_i}{\beta_i} dz_{U_i} \right\}_{i\in I} \in \mathcal{M}^1(U)$ *и* $\eta = \left\{ \frac{\gamma_j}{\delta_j} dz_{V_j} \right\}_{j\in J} \in \mathcal{M}^1(U)$ *са мероморфни диференциали върху отворено подмножество* U *на Риманова повърхнина* C. *Да се докаже, че* $\frac{\omega}{\eta} \in \mathcal{M}(U)$ *е мероморфна функция върху* U.

Нека $f = \{f_i\}_{i\in I} \in \mathcal{M}(U)$ е мероморфна функция върху $U \subseteq C$, зададена със съгласувана фамилия от мероморфни функции f_i върху елементите U_i на отворено покритие $U = \cup_{i\in I} U_i$. След евентуално свиване на U_i можем да считаме, че $p_i \in U_i$ е единствената нула или полюс на f в U_i и $p_i \neq p_j$ за всички $i \neq j$. Избираме локални холоморфни координати z_i върху U_i и разглеждаме $f_i(z_i)$ като мероморфни функции на z_i. Тогава от равенството

$$f_i \Big|_{U_i \cap U_j} = f_j \Big|_{U_i \cap U_j}$$

на локални холоморфни функции следва равенството

$$\frac{\partial f_i}{\partial z_j} \Big|_{U_i \cap U_j} = \frac{\partial f_j}{\partial z_j} \Big|_{U_i \cap U_j}$$

на техните производни относно z_j, а оттам и равенството

$$df_i \Big|_{U_i \cap U_j} = \frac{\partial f_i}{\partial z_i} dz_i \Big|_{U_i \cap U_j} = \frac{\partial f_i}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial z_j} dz_j \Big|_{U_i \cap U_j} =$$
$$\frac{\partial f_i}{\partial z_j} dz_j \Big|_{U_i \cap U_j} = \frac{\partial f_j}{\partial z_j} dz_j \Big|_{U_i \cap U_j} = df_j \Big|_{U_i \cap U_j}$$

на пълните диференциали на f_i и f_j за $\forall i, j \in I$. Да забележим, че сеченията $U_i \cap U_j$ не съдържат нули и полюси на f_i и f_j, защото $p_i \notin U_j$ и $p_j \notin U_i$ за $i \neq j$. Съгласуваната фамилия $df = \{df_i\}_{i\in I} = \left\{ \frac{\partial f_i}{\partial z_i} dz_i \right\}_{i\in I} \in \mathcal{M}(U)$ задава мероморфен диференциал върху U, който наричаме диференциал на f.

Нека $\omega = \{f_i dz_i\}_{i\in I} \in \mathcal{M}^1(U)$ е мероморфна диференциална форма, зададена със съгласувани мероморфни диференциали $f_i(z_i) dz_i \in \mathcal{M}^1(U_i)$ върху елементите U_i на отворено покритие $U = \cup_{i\in I} U_i$ с локални холоморфни координати $z_i : U_i \to \mathbb{C}$. Без ограничение на общността можем да считаме, че извън центровете p_i на U_i с $z_i(p_i) = 0$, функциите $f_i : U_i \setminus \{p_i\} \to \mathbb{C}^*$ са холоморфни и неанулиращи се. Определяме кратността на ω в $p \in U$ като кратността

$\nu_p(\omega) := \nu_p(f_i)$ на произволна представяща функция f_i на $\omega|_{U_i} = f_i(z_i)dz_i$ върху отворено множество U_i, съдържащо p. Ако $\nu_p(\omega) > 0$, ще казваме, че p е нула на ω. Точките p с $\nu_p(\omega) < 0$ се наричат полюси на ω.

ЗАДАЧА 10.4. *Да се докаже коректността на определението за кратност $\nu_p(\omega)$ на мероморфна диференциална форма ω в точка, т.е. независимостта $\nu_p(f) = \nu_p(g)$ на $\nu_p(\omega)$ от представянето $f(z)dz|_U = \omega|_U = g(y)dy|_U$ на ω в достатъчно малка отворена околност U на p.*

2. Резидуум на мероморфна диференциална форма върху Риманова повърхнина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.5. *Нека $\omega \in \mathcal{M}^1(U)$ е мероморфен диференциал върху отворено подмножество U на Риманова повърхнина C, $p \in U$, z е холоморфна координата върху U с център p и $\Delta(0,\varepsilon) = \{z \in U \mid |z| < \varepsilon\}$ е диск върху U с център p и достатъчно малък радиус $\varepsilon > 0$, така че $\omega|_{\Delta(0,\varepsilon)\setminus\{0\}}$ е холоморфна никъде неанулираща се диференциална $(1,0)$-форма. Тогава интегралът*

$$\mathrm{Res}_p(\omega) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(0,\varepsilon)} \omega$$

по граничната окръжност на $\Delta(0,\varepsilon)$ се нарича резидуум на ω в $p \in U$.

Резидуумът $\mathrm{Res}_p(\omega)$ не зависи от избора на радиус $\varepsilon > 0$, за който $\omega|_{\Delta(0,\varepsilon)}$ няма нули и полюси извън центъра 0. Наистина, ако $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ са такива, че $\nu_q(\omega) = 0$ за $\forall q \in \Delta(0,\varepsilon_1) \setminus \{0\}$, то $\omega|_{\Delta(0,\varepsilon_1)\setminus\Delta(0,\varepsilon_2)} = f(z)dz|_{\Delta(0,\varepsilon_1)\setminus\Delta(0,\varepsilon_2)}$ е холоморфен неанулиращ се диференциал, така че $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\Big|_{\Delta(0,\varepsilon_1)\setminus\Delta(0,\varepsilon_2)} \equiv 0$ и

$$d\omega\Big|_{\Delta(0,\varepsilon_1)\setminus\Delta(0,\varepsilon_2)} = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} d\overline{z} \wedge dz\Big|_{\Delta(0,\varepsilon_1)\setminus\Delta(0,\varepsilon_2)} \equiv 0,$$

съгласно $dz \wedge dz \equiv 0$ върху 1-мерното комплексно многообразие $\Delta(0,\varepsilon)\setminus\Delta(0,\varepsilon_2)$. По Теоремата на Stokes, оттук следва, че

$$\int_{\partial\Delta(0,\varepsilon_1)} \omega - \int_{\partial\Delta(0,\varepsilon_2)} \omega = \int_{\partial(\Delta(0,\varepsilon_1)\setminus\Delta(0,\varepsilon_2))} \omega = \int_{\Delta(0,\varepsilon_1)\setminus\Delta(0,\varepsilon_2)} d\omega = 0$$

и

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(0,\varepsilon_1)} \omega = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(0,\varepsilon_2)} \omega.$$

За достатъчно малко $\varepsilon > 0$ съществува такава отворена околност V на p върху U, съдържаща затворения диск $\overline{\Delta(0,\varepsilon)} = \{z \in U \;\; |z| \leq \varepsilon\}$, че

$$\omega\Big|_V = \left(\sum_{n \geq \nu_p(\omega)} a_n z^n\right) dz\Big|_V$$

и

$$\mathrm{Res}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(0,\varepsilon)} \omega =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Delta(0,\varepsilon)} \left(\sum_{n \geq \nu_p(\omega)} a_n z^n\right) dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n \geq \nu_p(\omega)} a_n \int_{\partial\Delta(0,\varepsilon)} z^n dz.$$

В полярни координати $z = re^{i\theta}$, за произволно цяло число $n \neq -1$ имаме

$$\int_{\partial\Delta(0,\varepsilon)} z^n dz = \int_0^{2\pi} i\varepsilon^{n+1} e^{i(n+1)\theta} d\theta = \frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)\theta} d[i(n+1)\theta] = \frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} \left[e^{i(n+1)\theta} \Big|_0^{2\pi} \right] = 0,$$

съгласно 2π-периодичността

$$e^{2\pi i(n+1)} = \cos(2\pi(n+1)) + i\sin(2\pi(n+1)) = \cos(0) + i\sin(0) = e^0$$

на функциите синус и косинус. За $n = -1$ е изпълнено

$$\int_{\partial\Delta(0,\varepsilon)} z^{-1} dz = \int_0^{2\pi} i d\theta = 2\pi i.$$

Следователно, резидуумът на $\omega|_V = f(z)dz|_V$ е коефициентът

$$\mathrm{Res}_p(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \geq \nu_p(\omega)} a_n \int_{\partial\Delta(0,\varepsilon)} z^n dz = \frac{1}{2\pi i} a_{-1} \int_{\partial\Delta(0,\varepsilon)} z^{-1} dz = a_{-1}$$

на z^{-1} в разлагането $f(z) = \sum\limits_{n \geq \nu_p(\omega)} a_n z^n$ на $f(z)$ в Лоранов ред около $p = 0$.

Резидуумът $\mathrm{Res}_p(\omega)$ не зависи от избора на локална холоморфна координата в околност на p върху U. По-точно, нека y и z са локални холоморфни координати върху околност V на p с $y(p) = z(p) = 0$ и $f(z)dz = \omega|_V = g(y)dy$. За достатъчно малко $\varepsilon > 0$ можем да считаме, че $\{y \in V \ \mid \ |y| \leq \varepsilon\} \subseteq V$ и $\{z \in V \ \mid \ |z| \leq \varepsilon\} \subseteq V$. Твърдим, че

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|y|=\varepsilon} g(y)dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varepsilon} f(z)dz.$$

Достатъчно е да докажем равенството

$$\int_{|y|=\varepsilon} g(y)dy = \int_{|z|=\varepsilon} f(z)dz, \tag{10.3}$$

за да получим независимостта на $\mathrm{Res}_p(\omega)$ от избора на локална холоморфна координата. Съгласно Теорема 1 на Cauchy, интегралите на холоморфната функция f върху хомотопни пътища са равни. За да докажем хомотопността на затворените пътища $|y| = \varepsilon$ и $|z| = \varepsilon$, представяме $z(y) = y^m u(y)$ и $y(z) = z^k v(z)$ за неотрицателни цели m, k и никъде неанулиращи се холоморфни функции $u, v : V \to \mathbb{C}^*$, след евентуално свиване на V. Замествайки едно в друго получаваме

$$z(y) = y^m u(y) = z^{km} v(y^m u(y))^m u(y)$$

с неанулираща се холоморфна функция $v(y^m u(y))^m u(y) : V \to \mathbb{C}^*$. Оттук $km = 1$ и $k = m = 1$. За $\forall t \in [0,1]$ множеството от точки

$$\gamma_t := \{y \in V \ \mid \ |y|[t|u(y)| + (1-t)] = \varepsilon\}$$

е затворен път във V, зависещ непрекъснато от t. Следователно $\{\gamma_t\}_{t\in[0,1]}$ е хомотопия между $\gamma_0 = \{y \in V \ \mid \ |y| = \varepsilon\}$ и $\gamma_1 = \{y \in V \ \mid \ |y||u(y)| = |z| = \varepsilon\}$.

3. Теорема за резидуумите. Равенство на броя на нулите и броя на полюсите на мероморфна функция

Теорема 14. (за резидуумите) *Нека C е компактна Риманова повърхнина, а $\omega \in \mathcal{M}^1(C)$ е глобална мероморфна форма върху C. Тогава сумата*

$$\sum_{p\in C} \mathrm{Res}_p(\omega) = 0$$

на резидуумите на ω в точките от C е нулева.

Доказателство: Всяка точка $p \in C$ има отворена околност $p \in U_p \subseteq C$ с локална холоморфна координата z, $z(p) = 0$, така че $\omega|_{U_p} = z^{\nu_p(\omega)}u(z)dz$ за неанулираща се холоморфна функция $u : U_p \to \mathbb{C}^*$. Покриваме C с такива отворени околности U_p и избираме крайно подпокритие $C = U_{p_1} \cup \ldots \cup U_{p_k}$, благодарение на компактността на C. Понеже $\omega|_{U_{p_i}}$ има най-много нула или полюс в p_i, $\mathrm{Res}_p(\omega) = 0$ за $\forall p \in C \setminus \{p_1, \ldots, p_k\}$. За да докажем анулирането на

$$\sum_{p \in C} \mathrm{Res}_p(\omega) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{p_j}(\omega)$$

избираме достатъчно малки $\varepsilon_j \in \mathbb{R}^{>0}$, така че затворените дискове $\overline{\Delta(p_j, \varepsilon_j)}$ не се пресичат два по два. Затвореното подмножество $\Omega := C \setminus (\cup_{j=1}^{k} \Delta(p_j, \varepsilon_j))$ на C е ориентируемо гладко 2-мерно реално многообразие с граница $\partial\Omega = -\cup_{j=1}^{k} \partial\Delta(p_j, \varepsilon_j)$. Диференциалната форма ω е холоморфна върху Ω, така че $d\omega|_{\Omega} = \partial\omega|_{\Omega} \equiv 0$, съгласно $\dim_{\mathbb{C}} \Omega = 1$. По Теоремата на Stokes,

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \int_{\Omega} d\omega = 0.$$

Комбинирайки с

$$\int_{\partial\Omega} \omega = -\sum_{j=1}^{k} \int_{\partial\Delta(p_j, \varepsilon_j)} \omega = -\sum_{j=1}^{k} 2\pi i \mathrm{Res}_{p_j}(\omega),$$

получаваме, че

$$\sum_{p \in C} \mathrm{Res}_p(\omega) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}_{p_j}(\omega) = 0,$$

Q.E.D.

Непосредствено следствие от Теорема 14 за резидуумите на мероморфен диференциал върху компактна Риманова повърхнина C получаваме равенството на броя на нулите и броя на полюсите на мероморфна функция f върху C, броени с техните кратности.

Следствие 10.6. *Ако $f \in \mathcal{M}(C)$ е непостоянна мероморфна функция върху компактна Риманова повърхнина C, то сумата*

$$\sum_{p \in C} \nu_p(f) = 0$$

на кратностите на f във всички точки на C е нулева.
Ако разглеждаме f като холоморфно изображение $f : C \to \mathbb{P}^1$, то за всяка точка $[a] = [a_0 : a_1] \in \mathbb{P}^1$ броят на праобразите на $[a]$ под действие на f е равен на броя

$$-\sum_{p \in C, \nu_p(f) < 0} \nu_p(f)$$

на полюсите на f, пресметнат с техните кратности. В частност, всяко непостоянно холоморфно изображение $C \to \mathbb{P}^1$ на компактна Риманова повърхнина C е сюрективно.

Доказателство: Всяка точка $p \in C$ има отворена околност $p \in U_p \subseteq C$ с локална холоморфна координата z, така че $z(p) = 0$ и $f(z) = z^{\nu_p(f)}u(z)$ за холоморфна функция $u : U_p \to \mathbb{C}^*$. Съгласно компактността на C, отвореното покритие $C = \cup_{p\in C} U_p$ има крайно подпокритие $C = U_{p_1} \cup \ldots \cup U_{p_k}$. Ограниченията $f|_{U_{p_i}\setminus\{p_i\}} : U_p \setminus \{p_i\} \to \mathbb{C}^*$ са неанулиращи се холоморфни функции, така че нулите и полюсите на f се съдържат в $\{p_1, \ldots, p_k\}$ и сумата на кратностите

$$\sum_{p\in C} \nu_p(f) = \sum_{i=1}^{k} \nu_{p_i}(f) \tag{10.4}$$

е крайна. Полюсите на мероморфната диференциална форма $\omega := d\log f$ с ограничения

$$\omega|_{U_p} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}(z)}{f(z)} dz$$

се съдържат в обединението на нулите и полюсите на f, а оттам и в $\{p_1, \ldots, p_k\}$, защото функциите $\frac{\partial f}{\partial z} : U_p \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ са холоморфни. Прилагаме Теорема 14 за резидуумите към ω и получаваме, че

$$0 = \sum_{p\in C} \mathrm{Res}_p(\omega) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_{p_i}(\omega). \tag{10.5}$$

За $\forall 1 \leq i \leq k$ означаваме с z_i локалната холоморфна координата върху U_{p_i} с център p_i. Ако $u_i(z_i)$ са неанулиращите се холоморфни функции върху U_{p_i}, изпълняващи равенствата $f|_{U_{p_i}} = z_i^{\nu_{p_i}(f)} u_i(z_i)$, то

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}\Big|_{U_{p_i}} = z_i^{\nu_{p_i}(f)-1} \left[\nu_{p_i}(f) u_i(z_i) + z_i \frac{\partial u_i}{\partial z_i}(z_i) \right],$$

откъдето

$$\omega\Big|_{U_{p_i}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial z_i}}{z_i^{\nu_{p_i}(f)} u_i(z_i)} dz_i = \frac{\nu_{p_i}(f)}{z_i} dz_i + \frac{\frac{\partial u_i}{\partial z_i}(z_i)}{u_i(z_i)} dz_i.$$

Диференциалните форми

$$\eta_i := \frac{\frac{\partial u_i}{\partial z_i}(z_i)}{u_i(z_i)} dz_i$$

са холоморфни в U_{p_i} и

$$\mathrm{Res}_{p_i}(\omega) = \mathrm{Res}_{p_i}\left(\frac{\nu_{p_i}(f)}{z_i} dz_i \right) = \nu_{p_i}(f).$$

Комбинирайки горното равенство с (10.4) и (10.5), получаваме, че

$$\sum_{p\in C} \nu_p(f) = \sum_{i=1}^{k} \nu_{p_i}(f) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Res}_{p_i}(\omega) = \sum_{p\in C} \mathrm{Res}_p(\omega) = 0,$$

Q.E.D.

4. Класификация на ориентируемите компактни реални повърхнини с точност до хомеоморфизъм

Римановите повърхнини или 1-мерните комплексни многообразия са ориентируеми реални повърхнини. Преди да опишем Римановите повърхнини с точност до хомеомерфизъм, да разгледаме някои примери.
Комплексната проективна права $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ е хомеоморфна на 2-мерната сфера

$$\mathbb{S}^2 = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \mid t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 = 1\}.$$

За да обясним това да забележим, че $\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ се получава от $\mathbb{C} \simeq U_0 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{P}^1 \mid z_0 \neq 0\}$ чрез присъединяване на безкрайната точка $\infty = [0 : 1]$. От друга страна да разгледаме стереографската проекция

$$\Pi_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

през северния полюс $N = (0, 0, 1) \in \mathbb{S}^2$, която съпоставя на точка $p \in \mathbb{S}^2$ пресечната точка $\Pi_N(p) \in \mathbb{C} = \{t_1 + it_2 \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R}\}$ на реалната права в $\mathbb{R}^3$ през $p \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ и N с екваториалната равнина $\mathbb{C} = \{t \in \mathbb{R}^3 \mid t_3 = 0\}$. Правата през p и N има параметрично уравнение

$$\left| \begin{array}{lcc} t_1 = & p_1 s & \\ t_2 = & p_2 s & \\ t_3 = & (p_3 - 1)s & +1 \end{array} \right.$$

и пресечната и точка $\Pi_N(p)$ с екваториалната равнина има параметър $s_o = \frac{1}{1-p_3}$. Следователно

$$\Pi_N(p) = \frac{p_1}{1-p_3} + \frac{p_2}{1-p_3} i.$$

През произволна точка $q = q_1 + q_2 i \in \mathbb{C}$ и N съществува единствена реална права с параметрично уравнение

$$\left| \begin{array}{lc} t_1 = & q_1 s \\ t_2 = & q_2 s \\ t_3 = & 1 - s \end{array} \right. ,$$

която пресича $\mathbb{S}^2$ в единствена точка

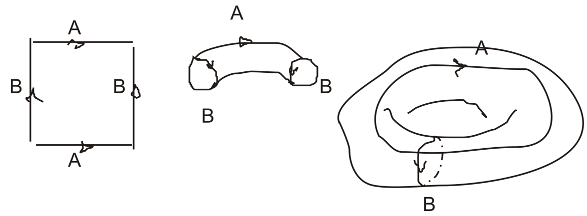
$$p = \left(\frac{2q_1}{q_1^2 + q_2^2 + 1}, \ \ \frac{2q_2}{q_1^2 + q_2^2 + 1}, \ \ \frac{q_1^2 + q_2^2 - 1}{q_1^2 + q_2^2 + 1} \right),$$

различна от N. Следователно $\Pi_N : \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}$ е хомеоморфизъм (взаимно еднозначно изображение, което е непрекъснато заедно със своето обратно) и се продължава до хомеоморфизъм $\mathbb{S}^2 \to \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

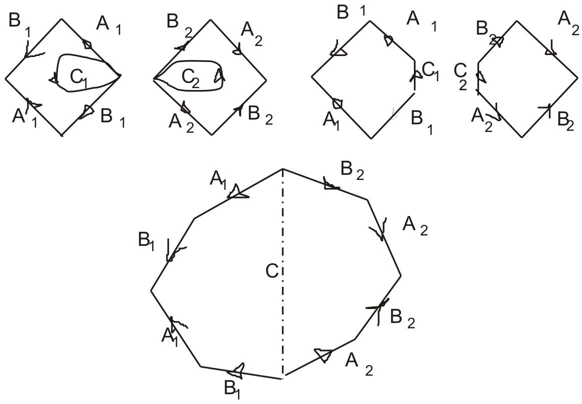
Друг пример за компактна Риманова повърхнина е 1-мерният комплексен тор. Определяме го като фактор-групата $\mathbb{T} = (\mathbb{C}, +)/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i, +)$ на адитивната група $(\mathbb{C}, +)$ на полето на комплексните числа по адитивната група $(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i, +)$ на пръстена $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ на целите Гаусови числа. За произволно комплексно число $r + si \in \mathbb{C}$ означаваме с $[r], [s]$ целите части на $r, s \in \mathbb{R}$, т.е. най-големите цели числа, ненадминаващи r, съответно, s. Тогава $[r] + [s]i \in (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i, +)$ и $\rho := r - [r]$, $\sigma := s - [s] \in [0, 1)$ са реални числа от интервала $[0, 1)$. По този начин, произволен съседен клас $r + si + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i = \rho + \sigma i + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ има представител $\rho + \sigma i \in [0, 1) + i[0, 1)$ от квадрата $[0, 1] \times [0, 1] \simeq [0, 1] \times i[0, 1] \subset \mathbb{C}$.

Сега ще обясним как $\mathbb{T}$ може да се получи от $[0, 1] \times [0, 1]$ чрез "слепване"на граничните отсечки. Вътрешните точки $\rho + \sigma i \in (0, 1) + i(0, 1)$ представят две по две различни съседни класове по модул $(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}i, +)$. По-точно, за произволни $\rho_j, \sigma_j \in (0, 1)$, $1 \leq j \leq 2$ имаме $\rho_1 - \rho_2, \sigma_1 - \sigma_2 \in (-1, 1)$ и предположението $\rho_1 - \rho_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)i \in \mathbb{Z}+\mathbb{Z}i$ е изпълнено само за $\rho_1 = \rho_2$ и $\sigma_1 = \sigma_2$. За $\forall \rho \in [0, 1]$ е в сила $\rho + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i = \rho + i + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$, така че във Фигура 1, хоризонталните страни на квадрата, означени с насочените отсечки A трябва да се отъждествят помежду си. Аналогично, $\sigma i + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i = 1 + \sigma i + \mathbb{Z} + \mathbb{Z}i$ за $\forall \sigma \in [0, l]$ изисква отъждествяване по протежение на контурите, означени с B, които след първото залепване са се трансформирали в окръжности. В резултат получаваме модела на тора $\mathbb{T}$ в $\mathbb{R}^3$, който изглежда като "кух геврек"и е скициран във Фигура 1.

Нека S_1 и S_2 са непресичащи се реални повърхнини. Отстраняваме малки дискове D_j от S_j и отъждествяваме окръжностите ∂D_1 и ∂D_2. Получената повърхнина се означава с $S_1 \sharp S_2$ и се нарича свързана сума на S_1 и S_2. Ще скицираме доказателството на факта, че всяка ориентируема компактна реална повърхнина е хомеоморфна на свързана сума на торове.



Фигура 1. Получаване на комплексен 1-мерен тор чрез отъждестяване на страните на квадрат

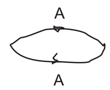


Фигура 2. Получаване на свързана сума на два тора чрез залепване на страните на фундаменталния осмоъгълник

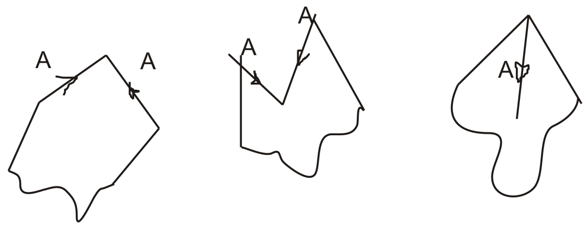
Фигура 3. Свързана сума на два тора

След като обяснихме получаването на 1-мерен комплексен тор $\mathbb{T}$ от квадрат, чрез отъждествяване на двойките противоположни страни, ще разгледаме получаването на свързана сума $\mathbb{T}_1 \sharp \mathbb{T}_2$ на два тора от осмоъгълник, чрез отъждествяване на двойки противоположни страни. (Виж Фигура 2.) Започваме с фундаменталните квадрати $A_j B_j A_j^{-1} B_j^{-1}$ на торовете $\mathbb{T}_j$, чиито върхове се събират в единствена точка от $\mathbb{T}_j$. От всеки такъв квадрат отстраняваме вътрешността на областта, заградена от примката C_j и "отваряме"тези примки в отсечки. След залепване на C_1 и C_2 означаваме с C получената отсечка и получаваме осмоъгълник. Страните на този осмоъгълник се разделят на четири двойки. Отъждествяването на съответните отсечки от тези четири двойки дава свързаната сума $\mathbb{T}_1 \sharp \mathbb{T}_2$ на Фигура 3.
Да отбележим също, че сферата $\mathbb{S}^2$ се получава от "двуъгълник"чрез еднопосочно отъждествяване на страните му, както е показано на Фигура 4.

Определение 10.7. *Триангулация на компактна повърхнина S е разбиване $S = T_1 \cup \ldots \cup T_n$ на S в обединение на затворени подмножества $T_i \subset S$. За произволни $1 \leq i < j \leq n$, сечението $T_i \cap T_j$ е празно, общ връх или обща страна.*



Фигура 4. Получаване на 2-мерна сфера чрез залепване на страните на 2-ъгълник



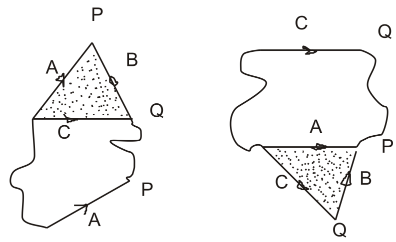
Фигура 5. Унищожаване на съседни страни от фундаменталния многоъгълник

Освен това, съществуват затворени триъгълници $T_i' \subset \mathbb{R}^2$ и хомеоморфизми $h_i : T_i' \to T_i$.

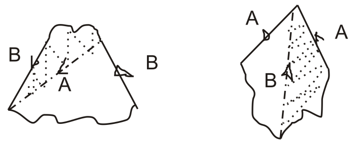
С известна неточност, T_i също се наричат триъгълници. Може да се докаже, че всяка компактна реална повърхнина S има крайна триангулация $S = T_1 \cup \ldots \cup T_n$. Всяка отсечка от триангулацията е обща за точно два триъгълника. Триъгълниците с общ връх v образуват цикъл $T_1, \ldots, T_{m-1}, T_m = T_1$, така че T_i и T_j имат обща страна.

Теорема 15. *Всяка ориентируема компактна реална повърхнина е хомеоморфна на сферата $\mathbb{S}^2$ или на свързана сума $\mathbb{T}_1 \sharp \mathbb{T}_2 \sharp \ldots \sharp \mathbb{T}_m$ на m комплексни 1-мерни торове $\mathbb{T}_j$.*

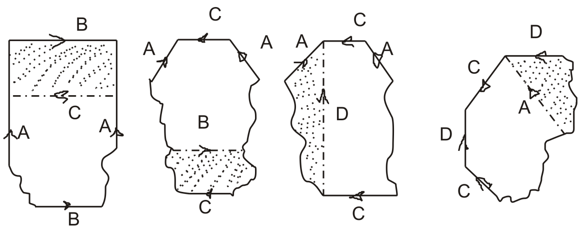
Идея за доказателството: Фиксираме такава триангулация $S = T_1 \cup \ldots \cup T_n$, в която всеки триъгълник T_i, $2 \leq i \leq n$ има обща страна e_i с поне един от триъгълниците $T_1, \ldots, T_{i-1}$. Избираме непресичащи се триъгълници $T_i' \subset \mathbb{R}^2$ и ги "залепваме"по ребрата $e_2, \ldots, e_n$. Оказва се, че полученото затворено подмножество $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ е хомеоморфно на затворен диск. Компактната повърхнина S се получава от Δ чрез отъждествяване на двойки страни.
Границата на Δ е съставена от краен брой ребра. При пълна обиколка в положителна посока (т.е. в посока, обратна на часовникова стрелка) получаваме редица с дължина $2n$, в която участват n насочени отсечки, всяка от които се появява по два пъти в права или обратна посока. Ако в такава редица с дължина $2n \geq 4$ има последователни множители AA^{-1}, то тези страни могат да се премахнат по правилото, обяснено чрез Фигура 5.
Трансформираме многоъгълника Δ по такъв начин, че всичките му върхове да се изобразяват в единствена точка от S. Ако съседни върхове P и Q на Δ се изобразяват в различни точки от S, то някъде върху границата на Δ има насочена отсечка A, чийто край се отъждествява с P. Изрязваме триъгълника $BA^{-1}C$ по страната C и го залепваме по протежение на отсечката A при второто и появяване, както е показано на Фигура 6. С това намаляваме с една точките, които се отъждествяват с P и увеличаваме с една точките, които се отъждествяват с Q. Продължавайки по същия начин, след краен брой стъпки получаваме многоъгълник с отъждествяващи се в S върхове.
Ако в границата на Δ има несъседни еднопосочни ребра B, то съединяваме краищата им с насочено ребро A. Изрязваме по A и залепваме по B, както е показано на фигура 7 и получаваме съседни еднопосочни ребра A.



Фигура 6. Увеличаване на броя на върховете, отъждествяващи се с Q за сметка на броя на върховете, отъждествяващи се с P



Фигура 7. Постигане на съседство на еднопосочните ребра



Фигура 8. Отделяне на тор

Доказва се, че ако няма двойка разнопосочни ребра в границата на Δ, то компактната реална повърхнина S е неориентируема. Ако в границата на Δ има двойка противоположни ребра A, A^{-1}, може да се провери, че съществува още една двойка противоположни ребра B, B^{-1}, които разделят A, A^{-1}. С други думи, границата на Δ е от вида $\ldots A \ldots B \ldots A^{-1} \ldots B^{-1} \ldots$. Съединяваме краищата на ребрата A чрез насочено ребро C. Изрязваме по C и слепваме по B. След това свързваме край на C с край на A чрез насочено ребро D. Изрязваме по D и залепваме по A. Както е показано на Фигура 8, по този начин заменяме поредицата от ребра A, B, A^{-1}, B^{-1}, които не са обезателно съседни с поредица от съседни ребра $CDC^{-1}D^{-1}$, отговаряща на комплексен 1-мерен тор $\mathbb{T}_i$. Продължвайки по същия начин представяме границата на многоъгълника във вида

$$A_1 B_1 A_1^{-1} B_1^{-1} A_2 B_2 A_2^{-1} B_2^{-1} \ldots A_n B_n A_n^{-1} B_n^{-1},$$

отговарящ на свързана сума $\mathbb{T}_1 \sharp \ldots \sharp \mathbb{T}_n$ на n комплексни 1-мерни торове.

Определение 10.8. *Ако компактна Риманова повърхнина C е хомеоморфна на свързана сума $\mathbb{T}_1 \sharp \mathbb{T}_2 \sharp \ldots \sharp \mathbb{T}_g$ на g комплексни 1-мерни торове $\mathbb{T}_i$, казваме че C е от род g.*

Може да се докаже, че родът g на C е равен на размерността $\dim_{\mathbb{C}} H^0(C, \Omega_C)$ на пространството $H^0(C, \Omega_C)$ на глобалните холоморфни $(1,0)$-форми върху C. Възоснова на $H^0(\mathbb{P}^1, \Omega_{\mathbb{P}^1}) = 0$ считаме, че проективната права $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^2$ е от род 0.

5. Ойлерова характеристика на Риманова повърхнина

Определение 10.9. *Нека $S = T_1 \cup \ldots \cup T_t$ е триангулирана компактна реална повърхнина. Ако в тази тринагулация участват t триъгълника, e ребра и v върхове, то алтернираната сума*

$$\chi(S) := v - e + t$$

се нарича Ойлерова характеристика на S.

Може да се докаже, че Ойлеровата характеристика не зависи от избора на триангулация.

Лема 10.10. *Нека S_1, S_2 са компактни повърхнини с Ойлерова характеристика $\chi(S_1)$, $\chi(S_2)$. Тогава свързаната им сума $S_1 \sharp S_2$ има Ойлерова характеристика*

$$\chi(S_1 \sharp S_2) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2.$$

Доказателство: Да напомним, че $S_1 \sharp S_2$ се получава чрез отстраняване на вътрешностите D_j^o на малки отворени дискове $D_j \subset S_j$ и залепване на S_1 и S_2 по границите $\partial D_1 \equiv \partial D_2$. Отворените дискове D_j^o са хомеоморфни на триъгълник и имат Ойлерова характеристика $\chi(D_j^o) = 1$. Граничните окръжности ∂D_j имат Ойлерова характеристика $\chi(\partial D_j) = 0$. Един от начините за обяснение на това е разделянето на ∂D_j в обединение на две отворени отсечки и две точки. Сега $\chi(S_j \setminus D_j^o) = \chi(S_j) - \chi(D_j^o) = \chi(S_j) - 1$ за $1 \leq j \leq 2$. При залепването на ∂D_1 с ∂D_2 трябва да извадим $\chi(\partial D_2) = 0$ или $\chi(\partial D_1) = 0$ от $\chi(S_1 \setminus D_1^o) + \chi(S_2 \setminus D_2^o) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2$, за да получим

$$\chi(S_1 \sharp S_2) = \chi(S_1 \setminus D_1^o) + \chi(S_2 \setminus D_2^o) - \chi(\partial D_2) =$$
$$\chi(S_1 \setminus D_1^o) + \chi(S_2 \setminus D_2^o) - \chi(\partial D_1) = \chi(S_1) + \chi(S_2) - 2,$$

Q.E.D.

Следствие 10.11. *Всяка компактна Риманова повърхнина C от род g има Ойлерова характеристика $\chi(C) = 2 - 2g$.*

Доказателство: Проективната права $\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^2$ има Ойлерова характеристика $\chi(\mathbb{P}^1) = 2$, защото екваториалната окръжност S^1 разделя $\mathbb{S}^2$ а две отворени полукълба $\mathbb{HS}^{\pm}$, които са хомеоморфни на отворени триъгълници. Вземайки предвид $\chi(S^1) = 0$ и $\chi(\mathbb{HS}^+) = \chi(\mathbb{HS}^-) = 1$, получаваме, че

$$\chi(\mathbb{P}^1) = \chi\left(\mathbb{HS}^+ \coprod S^1 \coprod \mathbb{HS}^-\right) = \chi(\mathbb{HS}^+) + \chi(S^1) + \chi(\mathbb{HS}^-) = 2.$$

Ойлеровата характеристика на комплексен 1-мерен тор $\mathbb{T}$ е $\chi(\mathbb{T}) = 0$. По-точно, $\mathbb{T}$ се получава от квадрат чрез залепване на страните му по начина, показан на Фигура 1. Вътрешността на квадрата е хомеоморфна на вътрешността на триъгълник. Границата на квадрата се състои от четири отворени отсечки, които се слепват две по две, а четирите върха на квадрата се отъждествяват в една точка от $\mathbb{T}$. Следователно $\chi(\mathbb{T}) = 1 - 2 + 1 = 0$, защото индуцираната триангулация на $\mathbb{T}$ е състои от един триъгълник, две отворени отсечки и една точка.

С индукция по $g \in \mathbb{N}$, да допуснем, че компактните Риманови повърхнини C' от род $g - 1$ имат Ойлерова характеристика $\chi(C') = 2 - 2(g - 1)$. Произволна Риманова повърхнина C от род g е хомеомерфна на $C' \sharp \mathbb{T}$ за комплексен 1-мерен тор $\mathbb{T}$. Прилагайки Лема 10.10, получаваме

$$\chi(C) = \chi(C') + \chi(\mathbb{T}) - 2 = 2 - 2(g - 1) - 2 = 2 - 2g,$$

Q.E.D.