Глава 1

Локална холоморфност

Нека $\mathbb{C}^n$ е множеството на наредените n-торки $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ комплексни числа $z_i \in \mathbb{C}$. За да определим понятието комплексно многообразие, трябва да разгледаме някои свойства на холоморфните функции върху околност U на началото $0^n := (0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$.

1. Определение за холоморфна функция

Да напомним, че топология върху множество X е фамилия $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ от подмножества $U_\alpha \subseteq X$, така че:
(i) празното множество $\emptyset$ и X са от $\mathcal{U}$,
(ii) произволно обединение $\cup_{\alpha \in A'} U_\alpha$, $A' \subseteq A$ на множества U_α от $\mathcal{U}$ принадлежи на $\mathcal{U}$,
(iii) крайно сечение $U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_k}$ на множества U_{α_i} от $\mathcal{U}$ е множество от $\mathcal{U}$.
Подмножествата $U_\alpha \in \mathcal{U}$ на X се наричат отворени.
Подфамилията $\mathcal{B} = \{U_\beta\}_{\beta \in B} \subseteq \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ от отворени множества е база за топологията, зададена от $\mathcal{U}$, ако всяко непразно отворено подмножество $\emptyset \neq U_\alpha \in \mathcal{U}$ на X може да се представи като обединение $U_\alpha = \cup_{\beta \in I(\alpha)} U_\beta$, $I(\alpha) \subseteq B$ на множества U_β от $\mathcal{B}$. Топологията $\mathcal{U}$ се определя еднозначно от произволна своя база $\mathcal{B}$. Под-фамилията $\mathcal{B} = \{U_\beta\}_{\beta \in B} \subset \mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ от отворени подмножества на X е база на топологията, зададена от $\mathcal{U}$ тогава и само тогава, когато за всяко отворено множество $U_\alpha \in \mathcal{U}$ и всяка точка $p \in U_\alpha$ съществува $U_{\beta(p)} \in \mathcal{B}$, така че $p \in U_{\beta(p)} \subseteq U_\alpha$.
Топологията $\mathcal{U}$ върху X е Хаусдорфова, ако за всеки две различни точки $p_1, p_2 \in X$ съществуват непресичащи се отворени подмножества $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2} \in \mathcal{U}$ на X, които ги съдържат, $p_i \in U_{\alpha_i}$.
За произволно комплексно число $\zeta = a + bi \in \mathbb{C}$ с реална част $\mathrm{Re}(\zeta) := a \in \mathbb{R}$ и имагинерна част $\mathrm{Im}(\zeta) := b \in \mathbb{R}$, означаваме с $\overline{\zeta} := a - bi \in \mathbb{C}$ комплексно спрегнатото му. За всяко естествено n, изображението

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$\langle u, v \rangle := \sum_{j=1}^{n} u_j \overline{v_j}$$

е ермитово скаларно произведение в $\mathbb{C}^n$, т.е.

$$\text{(i)} \quad \langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle} \quad \text{за} \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^n,$$

$$\text{(ii)} \quad \langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u', v \rangle \quad \text{за} \quad \forall u, u', v \in \mathbb{C},$$

$$\text{(iii)} \quad \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle \quad \text{за} \quad \forall u, v \in \mathbb{C}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C},$$

$$\text{(iv)} \quad \langle u, u \rangle \geq 0 \quad \text{за} \quad \forall u \in \mathbb{C}^n \quad \text{с равенство} \quad \langle u, u \rangle = 0 \quad \text{точно когато} \quad u = 0^n.$$

Модулът на комплексно число $\zeta = a + bi \in \mathbb{C}$ се определя като неотрицателния корен квадратен $|\zeta| := \sqrt{\zeta\overline{\zeta}} = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}^{>0}$ от $\zeta\overline{\zeta} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^{>0}$. За произволни $u, v \in \mathbb{C}$, изображението

$$d : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0},$$

$$d(u,v) := ||u-v|| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |u_j - v_j|^2}$$

е метрика или разстояние върху $\mathbb{C}^n$. По определение, това означава, че
(i) $d(u,v) = d(v,u)$ за $\forall u, v \in \mathbb{C}^n$,
(ii) $d(u,v) \geq 0$ за $\forall u, v \in \mathbb{C}^n$ с равенство $d(u,v) = 0$ точно когато $u = v$,
(iii) в сила е неравенството на триъгълника $d(u,w) \leq d(u,v) + d(v,w)$ за произволни вектори $u, v, w \in \mathbb{C}^n$.
Разглеждаме метричната топология върху $\mathbb{C}^n$, индуцирана от d. Една база за тази топология са отворените кълба

$$B(u,r) := \{v \in \mathbb{C}^n \quad | \quad d(u,v) < r\}$$

с произволни центрове $u \in \mathbb{C}^n$ и произволни положителни радиуси $r \in \mathbb{R}^{>0}$. Отворени относно метричната топология са онези подмножества $U \subseteq \mathbb{C}^n$, които заедно с всяка своя точка $u \in U$ съдържат кълбо $B(u,r)$ с център u и достатъчно малък радиус $r \in \mathbb{R}^{>0}$.
Множеството $\mathbb{C}^n$ на наредените n-торки комплексни числа $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ е линейно пространство над $\mathbb{C}$ относно покомпонентно определените събиране

$$u + v = (u_1, \ldots, u_n) + (v_1, \ldots, v_n) := (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$

и умножение с комплексно число $\zeta \in \mathbb{C}$,

$$\zeta u = \zeta(u_1, \ldots, u_n) = (\zeta u_1, \ldots, \zeta u_n).$$

Ограничавайки скаларите ζ до реални числа $\zeta \in \mathbb{R}$, можем да разглеждаме $\mathbb{C}^n$ като линейно пространство над $\mathbb{R}$. За всяко естествено $1 \leq j \leq n$ да означим с $e_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{C}^n$ наредената n-торка с единствена ненулева компонента 1 в j-та позиция. Тогава $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{C}^n$ е базис на линейното пространство $\mathbb{C}^n$ над $\mathbb{C}$. Ако $i := \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ е имагинерната единица, то $e_1, ie_1, \ldots e_n, ie_n \in \mathbb{C}^n$ е базис на $\mathbb{C}^n$ като линейно пространство над $\mathbb{R}$. Причина за това е, че всяка наредена n-торка $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n$ има еднозначно определено представяне

$$u = (u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} u_j e_j = \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{Re} u_j + i \mathrm{Im} u_j) e_j = \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{Re} u_j) e_j + (\mathrm{Im} u_j)(ie_j)$$

като линейна комбинация на векторите $e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n$ с реални коефициенти $\mathrm{Re} u_1$, $\mathrm{Im} u_1$, …, $\mathrm{Re} u_n$, $\mathrm{Im} u_n \in \mathbb{R}$.
Ще казваме, че $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ е $\mathbb{C}$-линейна (комплекснозначна) функция, ако $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}$ е $\mathbb{C}$-линейно изображение, т.е.

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(u+v) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(u) + \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(v) \quad \text{за} \quad \forall u, v \in \mathbb{C}^n \quad \text{и}$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\zeta u) = \zeta \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(u) \quad \text{за} \quad \forall \zeta \in \mathbb{C}, \ \ \forall u \in \mathbb{C}^n.$$

Аналогично, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ е $\mathbb{R}$-линейна (комплекснозначна) функция, ако $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ е $\mathbb{R}$-линейно изображение. Това означава, че

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(u+v) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(u) + \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(v) \quad \text{за} \quad \forall u, v \in \mathbb{C} \quad \text{и}$$

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\lambda u) = \lambda \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(u) \quad \text{за} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \ \forall u \in \mathbb{C}^n.$$

Всяка $\mathbb{C}$-линейна функция е $\mathbb{R}$-линейна. Произволна $\mathbb{C}$-линейна функция $\mathcal{L}_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ се определя еднозначно от образите $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(e_1)$, …, $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(e_n) \in \mathbb{C}$ на базисните вектори $e_1, \ldots, e_n$ на $\mathbb{C}^n$ над $\mathbb{C}$, съгласно

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(u) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(u_1, \ldots, u_n) = \mathcal{L}_{\mathbb{C}}\left(\sum_{j=1}^{n} u_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{n} u_j \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(e_j) \quad \text{за} \quad \forall u \in \mathbb{C}^n.$$

Произволна $\mathbb{R}$-линейна функция $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ се определя еднозначно от $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(e_1)$, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(ie_1)$, ..., $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(e_n)$, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(ie_n) \in \mathbb{C}$, защото

$$\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(u) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(u_1, \ldots, u_n) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\left(\sum_{j=1}^{n} u_j e_j\right) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}\left(\sum_{j=1}^{n} \mathrm{Re} u_j e_j + \mathrm{Im} u_j (ie_j)\right) =$$
$$\sum_{j=1}^{n} (\mathrm{Re} u_j)\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(e_j) + (\mathrm{Im} u_j)\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(ie_j)$$

за произволен вектор $u \in \mathbb{C}^n$.

С $o(u)$ означаваме тези функции върху достатъчно малки околности на 0^n върху $\mathbb{C}^n$, за които

$$\lim_{||u|| \to 0} \frac{o(u)}{||u||} = 0,$$

където

$$||u|| = d(0^n, u) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |u_j|^2}.$$

Нека $z_1, \ldots, z_n$ са комплексни координати върху $\mathbb{C}^n$. За $\forall 1 \leq j \leq n$ полагаме $x_j := \mathrm{Re} z_j$, $y_j := \mathrm{Im} z_j$ и забелязваме, че $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ са реални координати върху $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Нека $U \subseteq \mathbb{C}^n$ е отворено подмножество. Функция $f : U \to \mathbb{C}$ е $\mathbb{R}$-диференцируема в точка $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ ако за $\forall 1 \leq j \leq n$ съществуват частните производни

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + he_j) - f(a)}{h}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) := \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hie_j) - f(a)}{h},$$

където границите са по реалните числа $h \in \mathbb{R}$, клонящи към $0 \in \mathbb{R}$. Всяка $\mathbb{R}$-диференцируема в $a \in U$ функция $f : U \to \mathbb{C}$ задава $\mathbb{R}$-линейна функция

$$df(a) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$df(a)(u) := \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{Re} u_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + (\mathrm{Im} u_j) \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \quad \text{за} \quad \forall u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{C}^n,$$

която е еднозначно определена от равенствата

$$df(a)(e_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{и} \quad df(a)(ie_j) = \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Формулата на Taylor с остатъчен член във формата на Peano гласи

$$f(a + u) = f(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)(\mathrm{Re} u_j) + \frac{\partial f}{\partial y_j}(a)(\mathrm{Im} u_j) + o(u) =$$
$$f(a) + df(a)(u) + o(u). \tag{1.1}$$

Обратно, всяка функция $f : U \to \mathbb{C}$, изпълняваща формулата на Taylor (1.1) е $\mathbb{R}$-диференцируема в $a \in U$. По-точно, за всяко $1 \leq j \leq n$ и всяко $u_j = \mathrm{Re} u_j \in \mathbb{R}$, от

$$f(a + \mathrm{Re} u_j e_j) = f(a) + df(a)(\mathrm{Re} u_j e_j) + o(\mathrm{Re} u_j) = f(a) + (\mathrm{Re} u_j) df(a)(e_j) + o(\mathrm{Re} u_j)$$

следва съществуването на

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_j) := \lim_{\mathrm{Re} u_j \to 0} \frac{f(a + \mathrm{Re} u_j e_j) - f(a)}{\mathrm{Re} u_j} = df(a)(e_j).$$

Аналогично, от

$$f(a + \mathrm{Im} u_j ie_j) = f(a) + df(a)(\mathrm{Im} u_j ie_j) + o(\mathrm{Im} u_j) = f(a) + (\mathrm{Im} u_j) df(a)(ie_j) + o(\mathrm{Im} u_j)$$

получаваме съществуването на

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(a) := \lim_{\mathrm{Im} u_j \to 0} \frac{f(a + \mathrm{Im} u_j i e_j) - f(a)}{\mathrm{Im} u_j} = df(a)(ie_j)$$

и $\mathbb{R}$-диференцируемостта на $f : U \to \mathbb{C}$ в $a \in U$.

Определение 1.1. *Нека $U \subseteq \mathbb{C}^n$ е отворено подмножество, $a \in U$. Функция $f : U \to \mathbb{C}$ е $\mathbb{C}$-диференцируема в $a \in U$, ако съществуват $\mathbb{C}$-линейна функция*

$$\partial f(a) : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

и функция $o(||u||)$ върху U, така че

$$f(a + u) = f(a) + \partial f(a)(u) + o(u) \tag{1.2}$$

за $u \in \mathbb{C}^n$ с достатъчно малка дължина $||u||$.
Функция $f : U \to \mathbb{C}$ в отворено подмножесво $U \subseteq \mathbb{C}^n$ е холоморфна, ако е $\mathbb{C}$-диференцируема във всяка точка $a \in U$.

Вземайки предвид, че всяка $\mathbb{C}$-линейна функция е $\mathbb{R}$-линейна, стигаме до извода, че холоморфните функции $f : U \to \mathbb{C}$ са $\mathbb{R}$-диференцируеми във всяка точка $a \in U$. Още повече, $df(a)(u) = \partial f(a)(u)$ за $\forall u \in \mathbb{C}^n$, $\forall a \in U$. Да забележим, че $\mathbb{R}$-линейните функции $df(a) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ са $\mathbb{C}$-линейни тогава и само тогава, когато

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(a) = df(a)(ie_j) = i df(a)(e_j) = i \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq n, \quad \forall a \in U.$$

За да запишем последното условие в по-удобен вид преминаваме към реални координати

$$z_j = x_j + i y_j, \quad \overline{z_j} = x_j - i y_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

върху $\mathbb{C}^n$. Тогава

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial z_j}{\partial x_j}(a) \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) + \frac{\partial \overline{z_j}}{\partial x_j}(a) \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a) = \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(a) = \frac{\partial z_j}{\partial y_j}(a) \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) + \frac{\partial \overline{z_j}}{\partial y_j}(a) \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a) = i \left[\frac{\partial f}{\partial z_j}(a) - \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a) \right]$$

и $\mathbb{C}$-линейността на $df(a) : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ е еквивалентна на

$$i \left[\frac{\partial f}{\partial z_j}(a) - \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a) \right] = \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) = i \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = i \left[\frac{\partial f}{\partial z_j}(a) + \frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a) \right]$$

за $\forall 1 \leq j \leq n$, $\forall a \in U$. Тези условия са равносилни на

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}}(a) = 0 \quad \text{за} \quad \forall a \in U, \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

С други думи, всяка холоморфна функция $f : U \to \mathbb{C}$ изпълнява диференциалните уравнения на Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z_j}} = 0 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq n. \tag{1.3}$$

Обратно, ако $f : U \to \mathbb{C}$ е $\mathbb{R}$-диференцируема във всяка точка на u, то (1.3) е достатъчно условие за $\mathbb{C}$-линейност на $df(a)$ за $\forall a \in U$, а оттам и за холоморфност на $f : U \to \mathbb{C}$. При това, $\mathbb{C}$-линейната функция

$$\partial f(a)(u) = df(a)(u) = \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{Re} u_j) \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + (\mathrm{Im} u_j) \frac{\partial f}{\partial y_j}(a) =$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\mathrm{Re} u_j) \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) + (\mathrm{Im} u_j) \left[i \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) \right] = \sum_{j=1}^{n} (\mathrm{Re} u_j + i \mathrm{Im} u_j) \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) u_j \tag{1.4}$$

се нарича холоморфен диференциал на f в $a \in U$. С това доказахме следната

Лема 1.2. *Функция $f : U \to \mathbb{C}$ върху отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{C}^n$ е холоморфна тогава и само тогава, когато е $\mathbb{R}$ диференцируема във всяка точка $a \in U$ и изпълнява уравненията на Cauchy-Riemann (1.3).*

Задача 1.3. *Нека $U \subseteq \mathbb{C}$ е ограничено отворено множество с лице*

$$S(U) := \int_U d(\mathrm{Re} z) \wedge d(\mathrm{Im} z),$$

а $f : U \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция. Да се докаже, че лицето

$$S(f(U)) := \int_U d(\mathrm{Re} f) \wedge d(\mathrm{Im} f) = \int_U \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 d(\mathrm{Re} z) \wedge d(\mathrm{Im} z).$$

2. Еквивалентни условия за холоморфност на функция на няколко комплексни променливи в точка

Отворено подмножество U е свързано, ако не може да се представи като непресичащо се обединение на непразни отворени подмножества. Свързаните отворени подмножества $D \subseteq \mathbb{C}^n$ се наричат области.

Определение 1.4. *Нека $H_0 : [0,1] \to D$ и $H_1 : [0,1] \to D$ са непрекъснати пътища в област $D \subseteq \mathbb{C}^n$. Хомотопия от H_0 до H_1 е непрекъснато изображение*

$$H : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow D$$

с

$$H|_{[0,1]\times 0} = H_0, \quad H|_{[0,1]\times 1} = H_1.$$

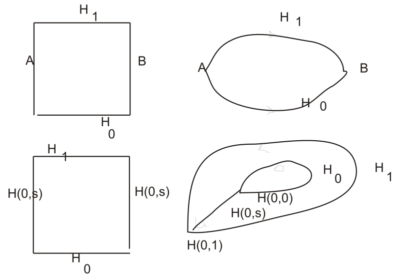
Ако H_0 и H_1 имат различно начало и край, т.е. $H_0(0) \neq H_0(1)$ и $H_1(0) \neq H_1(1)$, то в определението за хомотопия изискваме тези пътища да имат общо начало $A = H_0(0) = H_1(0)$, общ край $B = H_0(1) = H_1(1)$ и H да изпълнява условията

$$H(0 \times [0,1]) = A \quad \text{и} \quad H(1 \times [0,1]) = B.$$

Ако H_0 и H_1 са затворени пътища, то изискваме

$$H(0,s) = H(1,s) \quad \text{за} \quad \forall s \in [0,1].$$

Следващата фигура илюстрира определението за хомотопия на пътища.



Фигура 1. Определение за хомотопия на отворени и затворени пътища

Теорема 1. (Cauchy) *Нека $f : D \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция в област $D \subseteq \mathbb{C}$, а $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to D$ са хомотопни отворени или затворени непрекъснати пътища в D. Тогава*

$$\int_{\gamma_0} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma_1} f(\zeta) d\zeta.$$

Ще напомним само идеята на доказателството. Нека $D_o := \gamma([0,1]\times[0,1]) \subset \overline{D_o} \subset D$ е образът на квадрата $[0,1]\times[0,1]$ под действие на хомотопията γ. Триангулираме D_o, т.е. разбиваме D_o в обединение на триъгълници, пресичащи се само по границите си. Ако γ_0 и γ_1 са отворени пътища, избираме такава триангулация, в която началото $a = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ и краят $b = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ на тези пътища да са върхове, а $\gamma([0,1]\times 0) = \gamma_0([0,1])$ и $\gamma([0,1]\times 1) = \gamma_1([0,1])$ да се приближават с начупени линии. В случая на затворени пътища γ_0 и γ_1, приближаваме образите на тези пътища с начупени линии, както и кривата $\gamma(0\times[0,1]) = \gamma(1\times[0,1])$. По-точно, избираме триангулация на $\gamma([0,\varepsilon]\times[0,1])$ за достатъчно малко $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$. Пренасяме индуцираното разбиване на $\gamma(0\times[0,1])$ на отсечки върху кривата $\gamma(1\times[0,1])$ и продължаваме до триангулация на $\gamma([1-\varepsilon,1]\times[0,1])$. Допълваме до триангулация на $\gamma([\varepsilon,1-\varepsilon]\times[0,1])$, чието ограничение врху $\gamma(\varepsilon\times[0,1])$ и $\gamma((1-\varepsilon)\times[0,1])$ съвпада с вече получените разбивания на тези криви в обединение на отсечки.
Достатъчно е да се докаже, че за произволен триъгълник $\Delta \subset D_o$ е в сила

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = 0, \tag{1.5}$$

относно положителната ориентация на границата $\partial\Delta$ на триъгълника Δ, спрямо която вътрешността на Δ е отляво на границата. Причина за това е, че интегралите по вътрешните ръбове на триангулацията се унищожават взаимно, а кривите γ_0 и γ_1 се обхождат в противоположни посоки, така че се получава

$$\int_{\gamma_0} f(\zeta)d\zeta - \int_{\gamma_1} f(\zeta)d\zeta = 0.$$

Допускаме, че

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta \neq 0$$

и означаваме с

$$M := \Big| \int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta \Big| > 0$$

модулът на това комплексно число. Прекарваме средните отсечки в Δ и разделяме триъгълника Δ на четири триъгълника $\Delta_1^{(j)}$, $1 \leq j \leq 4$ с

$$\int_{\partial\Delta} f(\zeta)d\zeta = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^{(j)}} f(\zeta)d\zeta.$$

Съгласно

$$M = \Big| \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\Delta_1^{(j)}} f(\zeta)d\zeta \Big| \leq \sum_{j=1}^{4} \Big| \int_{\partial\Delta_a^{(j)}} f(\zeta)d\zeta \Big|$$

съществува $1 \leq j_1 \leq 4$ с

$$\Big| \int_{\partial\Delta_1^{(j_1)}} f(\zeta)d\zeta \Big| \geq \frac{M}{4}.$$

Продължаваме по същия начин и получаваме безкрайна редица

$$\Delta \supset \Delta_1^{(j_1)} \supset \ldots \supset \Delta_m^{(j_m)} \supset \ldots$$

от триъгълници $\Delta_m^{(j_m)}$ с

$$\Big| \int_{\partial\Delta_m^{(j_m)}} f(\zeta)d\zeta \Big| \geq \frac{M}{4^m}.$$

Затвореният триъгълник $\overline{\Delta}$ е компактен и затворените обвивки на произволен краен брой триъгълници от редицата имат непразно сечение. Следователно сечението $\cap_{m=1}^{\infty}\overline{\Delta_m^{(j_m)}} \neq \emptyset$ е непразно и съществува точка $a \in \cap_{m=1}^{\infty}\overline{\Delta_m^{(j_m)}}$. Съгласно $\overline{\Delta_m^{(j_m)}} \subset \overline{\Delta} \subset D$ за $\forall m \in \mathbb{N}$, функцията f е холоморфна в a и се представя във вида

$$f(\zeta) = f(a) + \partial f(a)(\zeta - a) + o(\zeta - a).$$

Интегрирането на дясната страна върху $\partial\Delta_m^{(j_m)}$ за достатъчно голямо $m \in \mathbb{N}$ дава

$$\int_{\partial\Delta_m^{(j_m)}} f(\zeta)d\zeta = \int_{\partial\Delta_m^{(j_m)}} o(\zeta - a)d\zeta.$$

Оттук, за произволно $\varepsilon \in \mathbb{R}^{>0}$ с $\frac{|o(\zeta-a)|}{||\zeta-a||} < \varepsilon$ е в сила

$$\frac{M}{4^m} \leq \Big| \int_{\partial\Delta_m^{(j_m)}} f(\zeta)d\zeta \Big| = \Big| \int_{\partial\Delta_m^{(j_m)}} o(\zeta - a)d\zeta \Big| \leq \varepsilon |\partial\Delta_m^{(j_m)}|^2 = \frac{\varepsilon|\partial\Delta|^2}{4^m},$$

където $|\partial\Delta|$, $|\partial\Delta_m^{(j_m)}| = \frac{|\partial\Delta|}{2^m}$, са периметрите на триъгълниците Δ, $\Delta_m^{(j_m)}$ и разстоянието $||\zeta - a|| \leq |\partial\Delta_m^{(j_m)}|$. Изборът на $\varepsilon < \frac{M}{|\partial\Delta|^2}$ води до противоречие в това неравенство и доказва (1.5), както и Теорема 1 на Cauchy.

За произволни $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$ и $r = (r_1, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}^{>0})^n$ да означим с

$$\Delta_n(a, r) := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ \ | \ \ |z_j - a_j| < r_j, \ \ 1 \leq j \leq n\} = \Delta(a_1, r_1) \times \dots \times \Delta(a_n, r_n)$$

директното произведение на дисковете

$$\Delta(a_j, r_j) := \{z_j \in \mathbb{C} \ \ | \ \ |z_j - a_j| < r_j\}, \ \ 1 \leq j \leq n.$$

Ще казваме, че $\Delta_n(a, r)$ е полидиск с център a и поли-радиус r. Затворената обвивка

$$\overline{\Delta_n(a, r)} := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \ \ | \ \ |z_j - a_j| \leq r_j, \ \ 1 \leq j \leq n\} = \overline{\Delta(a_1, r_1)} \times \dots \times \overline{\Delta(a_n, r_n)}$$

на полидиска $\Delta_n(a, r)$ е директно произведение на затворените обвивки

$$\overline{\Delta(a_j, r_j)} := \{z_j \in \mathbb{C} \ \ | \ \ |z_j - a_j| \leq r_j\}$$

на дисковете $\Delta(a_j, r_j)$. Границата

$$\partial\Delta(a_j, r_j) := \overline{\Delta(a_j, r_j)} \setminus \Delta(a_j, r_j) = \{z_j \in \mathbb{C} \ \ | \ \ |z_j - a_j| = r_j\}$$

на диска $\Delta(a_j, r_j)$ е окръжността в комплексната равнина $\mathbb{C}$ с център $a_j \in \mathbb{C}$ и радиус $r_j \in \mathbb{R}^{>0}$. Следователно границата на полидиска $\Delta_n(a, r)$ е обединение

$$\partial\Delta_n(a, r) = \cup_{j=1}^{n} \overline{\Delta(a_1, r_1)} \times \dots \times \overline{\Delta(a_{j-1}, r_{j-1})} \times \partial\Delta(a_j, r_j) \times \overline{\Delta(a_{j+1}, r_{j+1})} \times \dots \times \overline{\Delta(a_n, r_n)}$$

на директни произведения на $(n-1)$ затворени полидискове и една окръжност.

Директното произведение

$$T_n(a, r) := \partial\Delta(a_1, r_1) \times \dots \times \partial\Delta(a_n, r_n) \simeq S^1 \times \dots \times S^1$$

на граничните окръжности $\partial\Delta(a_j, r_j)$ на дисковете $\Delta(a_j, r_j)$ се нарича n-мерен реален тор с център $a \in \mathbb{C}^n$ и поли-радиус $r \in (\mathbb{R}^{>0})^n$.

Ще казваме, че функцията $f : \Delta_n(a, r) \to \mathbb{C}$ е холоморфна относно j-тата си променлива z_j, ако за произволни точки $b' \in \Delta(a_1, r_1) \times \dots \times \Delta(a_{j-1}, r_{j-1})$ и $b'' \in \Delta(a_{j+1}, r_{j+1}) \times \dots \times \Delta(a_n, r_n)$ ограничението $f : b' \times \Delta(a_j, r_j) \times b'' \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция на една комплексна променлива.

Следващата теорема характеризира холоморфните функции в полидиск $\Delta_n(a, r)$.

Теорема 2. *Нека $f : \overline{\Delta_n(a,r)} \to \mathbb{C}$ е непрекъсната функция в затворената обвивка $\overline{\Delta_n(a,r)}$ на полидиск $\Delta_n(a,r) = \Delta(a_1,r_1) \times \ldots \times \Delta(a_n,r_n)$ с център $a = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{C}^n$ и поли-радиус $r = (r_1,\ldots,r_n) \in (\mathbb{R}^{>0})^n$. Тогава следните условия са еквивалентни:*
(i) $f : \Delta_n(a,r) \to \mathbb{C}$ е холоморфна относно всяка от променливите си $z_1,\ldots,z_n$;
(ii) f изпълнява формулата на Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T_n(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T_n(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\ldots(\zeta_n - z_n)}d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n \tag{1.6}$$

във всяка точка $z \in \Delta_n(a,r)$;
(iii) $f : \Delta_n(a,r) \to \mathbb{C}$ е комплексно аналитична, т.е. $f : \Delta_n(a,r) \to \mathbb{C}$ е безкрайно $\mathbb{C}$-диференцируема във всяка точка $z \in \Delta_n(a,r)$ и Тейлъровият ред

$$\sum_k \frac{\partial^{|k|}f}{\partial z^k}(a)\frac{(z-a)^k}{k!} = \sum_{k=(k_1,\ldots,k_n)\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n}f}{\partial z_1^{k_1}\ldots\partial z_n^{k_n}}(a)\frac{(z_1-a_1)^{k_1}\ldots(z_n-a_n)^{k_n}}{k_1!\ldots k_n!} \tag{1.7}$$

с център $a \in \mathbb{C}^n$ е абсолютно и равномерно сходящ към $f(z)$ във всеки компакт $K \subset \Delta_n(a,r)$, съдържащ z;
(iv) $f : \Delta_n(a,r) \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция.
(v) $f : \Delta_n(a,r) \to \mathbb{C}$ е $\mathbb{R}$-диференцируема във всяка точка $a \in U$ и изпълнява уравненията на Cauchy-Riemann (1.3).

Импликацията (i) $\Rightarrow$ (ii) ще бъде доказана в следващата Теорема 3. Следствие 1.6 от Теорема 3 дава интегрални формули за производните на непрекъснатата функция $f : \overline{\Delta_n(a,r)} \to \mathbb{C}$, която е холоморфна относно всяка от променливите си $z_1,\ldots,z_n$ в $\Delta_n(a,r)$. Теорема 4 установява, че от (ii) следва (iii). Еквивалентността на (iv) с (v) е доказана от Лема 1.2. Импликациите (iii) $\Rightarrow$ (iv) и (v) $\Rightarrow$ (i) са ясни.
Да отбележим, че твърдението (i) $\Rightarrow$ (iii) е известно като Лема на Osgood. Теорема на Hartogs установява, че предположението за непрекъснатост на функцията $f : \overline{\Delta_n(a,r)} \to \mathbb{C}$ в Лемата на Osgood е излишно, т.е. ако функция $f : \Delta_n(a,r) \to \mathbb{C}$ е холоморфна относно всяка от променливите си $z_1,\ldots,z_n$, то f е холоморфна като функция на n комплексни променливи върху отвореното подмножество $\Delta_n(a,r) \subset \mathbb{C}^n$. По определение, последното означава $\mathbb{C}$-диференцируемост на f във всяка точка $z \in \Delta_n(a,r)$. Доказателството на Теоремата на Hartogs установява, че холоморфността на $f : \Delta_n(a,r) \to \mathbb{C}$ относно всяка от променливите $z_1,\ldots,z_n$ е достатъчна за ограничеността на f върху $\Delta_n(a,r)$. Оттук следва интегруемостта на f върху $T_n(a,r)$ и формулата на Cauchy за f за всяка точка $z \in \Delta_n(a,r)$.
За разлика от комплексната аналитичност на функция $f : U \to \mathbb{C}$ върху отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{C}^n$, която следва от $\mathbb{C}$-диференцируемостта на f върху U, съществуват $\mathbb{R}$-диференцируеми функции, които не са реално аналитични. Още повече, съществуват функции с непрекъснати частни производни от произволен ред, които не са аналитични. Пример за такава функция е

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$
$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{за } x > 0, \\ 0 & \text{за } x \leq 0, \end{cases}$$

чиито производни $f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$ са непрекъснати в околност на 0 върху $\mathbb{R}$, а оттам и върху цялата реална права $\mathbb{R}$. Съгласно $f^{(n)}(0) = 0$ за $\forall n \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$, Тейлъровият ред на $f(x)$ се анулира тъждествено и не клони към функцията $f(x) \not\equiv 0$.

Теорема 3. (Формула на Коши)*Нека $f : \overline{\Delta_n(a,r)} \to \mathbb{C}$ е непрекъсната функцията, чието ограничение $f : \Delta_n(a,r) \to \mathbb{C}$ е холоморфно относно всяка от променливите $z_1, \dots, z_n$. Тогава във всяка точка $z \in \Delta_n(a,r)$ функцията f изпълнява формулата на Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_n(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta =$$
$$\frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_n(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\dots(\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \wedge \dots\dots \wedge d\zeta_n.$$

Доказателство: С индукция по n, за произволна точка $z_1 \in \Delta(a_1, r_1)$ съществува достатъчно малко $\delta \in \mathbb{R}^{>0}$, така че затвореният диск $\overline{\Delta(z_1, \delta)}$ с център z_1 и радиус δ се съдържа в отворения диск $\Delta(a_1, r_1)$. Съгласно предположението за холоморфност на $f : \Delta(a_1, r_1) \to \mathbb{C}$, функцията $\frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1}$ е холоморфна във венеца $\mathcal{A} := \Delta(a_1, r_1) \setminus \overline{\Delta(z_1, \delta)}$ и изпълнява Теоремата на Cauchy

$$0 = \int_{\mathcal{A}} \frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 = \int_{\partial\Delta(a_1, r_1)} \frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 - \int_{\partial\Delta(z_1, \delta)} \frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1.$$

Трябва да докажем, че стойността на интеграла

$$I_1(z_1) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(z_1, \delta)} \frac{f(\zeta_1)}{\zeta - z_1} d\zeta_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(a_1, r_1)} \frac{f(\zeta_1)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1$$

съвпада със стойността $f(z_1)$ на f в $z_1 \in \Delta(a_1, r_1)$. Забелязваме, че $I_1(z_1)$ не зависи от $\delta > 0$ и полагаме $\zeta_1 := z_1 + \delta e^{i\theta}$ с $\theta \in [-\pi, \pi]$. Изразяваме

$$I_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(z_1 + \delta e^{i\theta})}{\delta e^{i\theta}} \delta i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_1 + \delta e^{i\theta}) d\theta.$$

Съгласно непрекъснатостта на $f : \overline{\Delta(z_1, \delta)} \to \mathbb{C}$, можем да извършим граничен преход под интеграла

$$I_1(z_1) = \lim_{\delta \to 0} I_1(z_1) = \lim_{\delta \to 0} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_1 + \delta e^{i\theta}) d\theta \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\lim_{\delta \to 0} f(z_1 + \delta e^{i\theta}) \right] d\theta =$$
$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z_1) d\theta = \frac{f(z_1)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta = f(z_1).$$

За произволно $n \in \mathbb{N}$, полагаме $z' := (z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$, $a' := (a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$, $r' := (r_2, \dots, r_n) \in (\mathbb{R}^{>0})^{n-1}$ и прилагаме индукционното предположение

$$f(z_1, z') = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{T_n(a', r')} \frac{f(z_1, \zeta')}{\zeta' - z'} d\zeta' =$$
$$\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{T_{n-1}(a', r')} \frac{f(z_1, \zeta')}{(\zeta_2 - z_2)\dots(\zeta_n - z_n)} d\zeta_2 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$$

за произволно фиксирано $z_1 \in \Delta(a_1, r_1)$. За всяко фиксирано $\zeta' \in T_{n-1}(a', r')$ функцията $f(\ , \zeta') : \overline{\Delta(a_1, r_1)} \to \mathbb{C}$ е непрекъсната и има холоморфно ограничение $f(\ , \zeta') : \Delta(a_1, r_1) \to \mathbb{C}$ върху отворения диск $\Delta(a_1, r_1)$. Следователно $f(\ , \zeta')$ изпълнява формулата на Cauchy

$$f(z_1, \zeta') = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(a_1, r_1)} \frac{f(\zeta_1, \zeta')}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1$$

за холоморфна функция на една комплексна променлива и

$$f(z) = f(z_1, z') = \frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{T_{n-1}(a',r')} \frac{f(z_1,\zeta')}{\zeta' - z'} d\zeta' =$$

$$\frac{1}{(2\pi i)^{n-1}} \int_{T_{n-1}(a',r')} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Delta(a_1,r_1)} \frac{f(\zeta_1,\zeta')}{\zeta - z_1} d\zeta_1 \right] \frac{d\zeta'}{\zeta' - z'} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_n(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

по Теоремата на Fubini за размяна на реда на интегриране, Q.E.D.

Задача 1.5. *Да се докаже, че:*

$$\int_{\partial\Delta(0,3)} \frac{\zeta^2}{\zeta - 2i} d\zeta = -8\pi i, \quad \int_{\partial\Delta(-2i,2)} \frac{1}{\zeta^2 + 9} d\zeta = -\frac{\pi}{3},$$

$$\int_{\partial\Delta(1,1)} \frac{\sin\frac{\pi\zeta}{4}}{\zeta^2 - 1} d\zeta = \frac{\sqrt{2}\pi i}{2}.$$

Следствие 1.6. (Интегрални формули за производните на холоморфна функция) *Нека $f : \overline{\Delta_n(a,r)} \to \mathbb{C}$ е непрекъсната функция, чието ограничение $f : \Delta_n(a,r) \to \mathbb{C}$ е холоморфно относно всяка от променливите $z_1, \ldots, z_n$. Тогава $f : \Delta_n(a,r) \to \mathbb{C}$ е безкрайно $\mathbb{C}$-диференцируема и за всяко $k = (k_1, \ldots, k_n) \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ е в сила*

$$\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(z) = \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots \partial z_n^{k_n}}(z) = \frac{k!}{(2\pi i)^n} \int_{T_n(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k(\zeta - z)} d\zeta =$$

$$\frac{k_1! \ldots k_n!}{(2\pi i)^n} \int_{T_n(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)^{k_1+1} \ldots (\zeta_n - z_n)^{k_n+1}} d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n.$$

Доказателство : Съгласно Теорема 3, $f : \Delta_n(a,r) \to \mathbb{C}$ изпълнява формулата на Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_n(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \text{за} \quad \forall z \in \Delta_n(a,r).$$

Подинтегралната функция $\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ е безкрайно $\mathbb{R}$-диференцируема , така че $f(z)$ е безкрайно $\mathbb{R}$-диференцируема относно $z_j, \overline{z_j}$ и

$$\frac{\partial^{|k|+|l|} f}{\partial z^k \partial \overline{z}^l} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_n(a,r)} \frac{\partial^{|k|+|l|}}{\partial z^k \partial \overline{z}^l} \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right) d\zeta$$

за произволни $k = (k_1, \ldots, k_n), l = (l_1, \ldots, l_n) \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$. В частност,

$$\frac{\partial^{|k|+|l|} f}{\partial z^k \partial \overline{z}^l} \equiv 0 \quad \text{за} \quad \forall l \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n \quad \text{с} \quad |l| = l_1 + \ldots + l_n \geq 1 \quad \text{и} \quad \forall k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n.$$

Това доказва, че всички частни производни $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}$ са холоморфни функции в $\Delta_n(a,r)$. Вземайки предвид

$$\frac{\partial^{k_j}}{\partial z_j^{k_j}} (\zeta_j - z_j)^{-1} = k_j! (\zeta_j - z_j)^{-(k_j+1)} \quad \text{за} \quad \forall k_j \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$$

получаваме

$$\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_n(a,r)} \left[\prod_{j=1}^n \frac{k_j!}{(\zeta_j - z_j)^{k_j+1}} \right] f(\zeta) d\zeta = \frac{k!}{(2\pi i)^n} \int_{T_n(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k(\zeta - z)} d\zeta,$$

Q.E.D.

Задача 1.7. *Нека L е крива в комплексната равнина $\mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$ е едносвързана област, не съдържаща L, а φ е непрекъсната функция в околност на L. Да се докаже, че функцията*

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

е холоморфна в областта D и производните и са равни на

$$\frac{\partial^n f}{\partial z^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta.$$

Теорема 4. *Нека $f : \overline{\Delta_n(a,r)} \to \mathbb{C}$ е непрекъсната функция върху затворен полидиск $\overline{\Delta_n(a,r)}$, удовлетворяваща формулата на Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_n(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_n(a,r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta_1 - z_1)\dots(\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \wedge \dots \wedge d\zeta_n$$

във всяка точка $z \in \Delta_n(a,r)$. Тогава $f : \Delta_n(a,r) \to \mathbb{C}$ е безкрайно $\mathbb{C}$-диференцируема във всяка точка $z \in \Delta_n(a,r)$ и Тейлъровият ред

$$\sum_k \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^k}{k!} = \sum_{k=(k_1,\dots,k_n)\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}(a) \frac{(z_1 - a_1)^{k_1} \dots (z_n - a_n)^{k_n}}{k_1! \dots k_n!}$$

с център $a \in \mathbb{C}^n$ е абсолютно и равномерно сходящ към $f(z)$ върху всеки компакт $K \subset \Delta_n(a,r)$.

Доказателство: За произволен компакт $K \subset \Delta_n(a,r)$ съществува реално число $0 < \varepsilon < 1$, така че $K \subseteq \overline{\Delta_n(a,\varepsilon r)}$ се съдържа в затворения полидиск с център $a \in \mathbb{C}^n$ и поли-радиус $\varepsilon r = (\varepsilon r_1, \dots, \varepsilon r_n) \in (\mathbb{R}^{>0})^n$. Тогава за $\forall z \in K$, $\forall \zeta \in T_n(a,r)$ и $\forall 1 \leq j \leq n$ е в сила

$$\left| \frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j} \right| \leq \varepsilon < 1$$

и степенният ред

$$\sum_{k_j=0}^{\infty} \left(\frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j} \right)^{k_j} = \frac{1}{1 - \frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j}} = \frac{\zeta_j - a_j}{\zeta_j - z_j}$$

е абсолютно и равномерно сходящ върху $K \times T_n(a,r) \ni (z,\zeta)$. Произведението

$$\prod_{j=1}^n \left[\sum_{k_j=0}^{\infty} \left(\frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j} \right)^{k_j} \right] = \sum_{k\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^k$$

е абсолютно и равномерно сходящ ред върху $K \times T_n(a,r) \ni (z,\zeta)$. Представяме

$$\frac{1}{\zeta_j - z_j} = \frac{1}{(\zeta_j - a_j) - (z_j - a_j)} = \frac{1}{(\zeta_j - a_j)\left(1 - \frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j}\right)} = \frac{1}{\zeta_j - a_j} \left[\sum_{k_j=0}^{\infty} \left(\frac{z_j - a_j}{\zeta_j - a_j} \right)^{k_j} \right]$$

като абсолютно и равномерно сходящ ред на $(z,\zeta) \in K \times T_n(a,r)$ и умножаваме за $\forall 1 \leq j \leq n$, за да получим

$$\frac{1}{\zeta - z} = \prod_{j=1}^n \frac{1}{\zeta_j - z_j} = \frac{1}{\zeta - a} \sum_{k\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \left(\frac{z-a}{\zeta-a} \right)^k.$$

Заместването във формулата на Cauchy дава

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{T_n(a,r)} \sum_{k\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} \frac{f(\zeta)(z-a)^k}{(\zeta-a)(\zeta-a)^k} d\zeta.$$

За всяко фиксирано $k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ функцията

$$g_k(z,\zeta) := \frac{f(\zeta)(z-a)^k}{(\zeta-a)(\zeta-a)^k}$$

е интегруема относно $\zeta \in T_n(a,r)$. Редът $\sum\limits_{k\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} g_k(z,\zeta)$ е абсолютно и равномерно сходящ върху $K \times T_n(a,r) \ni (z,\zeta)$. Следователно

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T_n(a,r)}\left[\sum_{k\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} g_k(z,\zeta)d\zeta\right] = \sum_{k\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n}\left[\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T_n(a,r)} g_k(z,\zeta)d\zeta\right]$$

е абсолютно и равномерно сходящ върху $K \ni z$. В доказателството на Следствие 1.6 установихме, че ако непрекъсната функция $f : \overline{\Delta_n(a,r)} \to \mathbb{C}$ изпълнява формулата на Cauchy (1.6) във всяка точка $z \in \Delta_n(a,r)$, то $f : \Delta_n(a,r) \to \mathbb{C}$ е безкрайно $\mathbb{C}$-диференцируема. Същото следствие дава

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T_n(a,r)} g_k(z,\zeta)d\zeta = \left[\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{T_n(a,r)}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)(\zeta-a)^k}d\zeta\right](z-a)^k =$$
$$\frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|}f}{\partial z^k}(a)(z-a)^k,$$

така че абсолютно и равномерно сходящият към $f(z)$ степенен ред

$$f(z) = \sum_{k\in(\mathbb{Z}^{\geq 0})^n}\frac{\partial^{|k|}f}{\partial z^k}(a)\frac{(z-a)^k}{k!}$$

е точно редът на Taylor на f с център $a \in \mathbb{C}^n$, Q.E.D.

Задача 1.8. *Да се намерят първите четири коефициента от развитието на холоморфните функции $f_j(z)$ в Тейлъров ред около $0 \in \mathbb{C}$, ако*

$$f_1(z) = e^{\frac{1}{1-z}}, \quad f_2(z) = \sin\frac{1}{1-z}, \quad f_3 = \log(1+e^z).$$

Нека $U \subseteq \mathbb{C}^n$ и $V \subseteq \mathbb{C}^m$ са отворени подмножества. Казваме, че изображение

$$f = (f_1,\dots,f_m) : U \longrightarrow V \subseteq \mathbb{C}^m$$

е холоморфно, ако координатните му функции $f_j : U \to \mathbb{C}$ са холоморфни за всички $1 \leq j \leq m$.
За произволно отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{C}^n$ означаваме с $\mathcal{O}(U)$ множеството на холоморфните функции $f : U \to \mathbb{C}$. Въвеждаме поточково събиране

$$f + g : U \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$(f+g)(a) := f(a) + g(a) \quad \text{за} \quad \forall a \in U$$

и умножение

$$fg : U \longrightarrow \mathbb{C},$$

$$(fg)(a) = f(a)g(a) \quad \text{за} \quad \forall a \in U$$

на функции $f, g \in \mathcal{O}(U)$. Непосредствено се проверява, че $\mathcal{O}(U)$ е комутативен пръстен с единица $1 \in \mathbb{C}$ относно така въведените операции.

Лема 1.9. *Изображение $f : U \to V$ на отворено подмножество $U \subseteq \mathbb{C}^n$ в отворено подмножество $V \subseteq \mathbb{C}^m$ е холоморфно тогава и само тогава, когато всяка холоморфна функция $g \in \mathcal{O}(V)$ върху V се издърпва до холоморфна функция $f^*g = g \circ f \in \mathcal{O}(U)$ върху U.*

Доказателство: Нека $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{C}^m$ са холоморфни координати върху $\mathbb{C}^m$. Ако $f = (f_1, \ldots, f_m) : U \to V \subseteq \mathbb{C}^m$ е холоморфно изображение, то всяка холоморфна функция $g : V \to \mathbb{C}$ се издърпва до холоморфна функция $f^*g = g \circ f : U \to \mathbb{C}$, защото $g \circ f$ изпълнява уравненията на Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \overline{z_j}} = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_s}{\partial \overline{z_j}} \frac{\partial g}{\partial y_s}(f_1, \ldots, f_m) + \frac{\partial \overline{f_s}}{\partial \overline{z_j}} \frac{\partial g}{\partial \overline{y_s}}(f_1, \ldots, f_m) =$$

$$\sum_{s=1}^{m} 0 \frac{\partial g}{\partial y_s}(f_1, \ldots, f_m) + \frac{\partial \overline{f_s}}{\partial \overline{z_j}} 0 = 0 \quad \text{за} \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

Обратно, нека всяка холоморфна функция $g : V \to \mathbb{C}$ се издърпва до холоморфна функция $f^*g = g \circ f : U \to \mathbb{C}$. Координатните функции $g := y_s$ се издърпват до $f^*y_s = y_s \circ f = f_s : U \to \mathbb{C}$ за $\forall 1 \leq s \leq m$, така че $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(U)$ и $f : U \to V$ е холоморфно изображение, Q.E.D.

3. Зародиш на холоморфна функция в точка от $\mathbb{C}^n$

За определяне на понятието зародиш на холоморфна в 0^n функция ни трябва следното

ТВЪРДЕНИЕ 1.10. *Нека $U \subseteq \mathbb{C}^n$ е свързано отворено подмножество (област), а $f : U \to \mathbb{C}$ е холоморфна функция върху U, която се анулира върху непразно отворено подмножество $W \subseteq U$. Тогава $f|_U \equiv 0$ и частните производни $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}|_U \equiv 0$ се анулират тъждествено върху U за всички $k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$.*

Доказателство: За произволно $k = (k_1, \ldots, k_n) \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ разглеждаме множеството

$$M_k(f) := \left\{ u \in U \;\middle|\; \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(u) = \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} f}{\partial z_1^{k_1} \ldots z_n^{k_n}}(u) = 0 \right\}$$

на точките от U, в които се анулира частната производна $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}$. От определението е ясно, че $M_k(f)$ са затворени подмножества на U, така че сечението им $M(f) := \cap_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} M_k(f)$ е също затворено подмножество на U. Достатъчно е да докажем, че $M(f)$ е непразно отворено подмножество на U, защото тогава U се представя като обединение $U = M(f) \cup [U \setminus M(f)]$ на непресичащи се отворени подмножества $M(f)$, $U \setminus M(f)$ и $U \setminus M(f) = \emptyset$ трябва да е празното множество, съгласно свързаността на U. С други думи, $M(f) = U$ и всяка точка $u \in U = M(f) = \cap_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} M_k(f)$ принадлежи на $M_k(f)$ за $\forall k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$. По определение, това означава $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(u) = 0$ за $\forall u \in U$, $\forall k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ и доказва твърдението.

Избираме точка $a \in W$ и полидиск $\Delta_n(a, r) \subseteq W$, в който

$$f(z) = \sum_{k} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) \frac{(z-a)^k}{k!}$$

се развива в абсолютно и равномерно сходящ Тейлъров ред. Съгласно предположението $f|_{\Delta_n(a,r)} \equiv 0$ имаме $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(a) = 0$ за $\forall k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n$ и $\forall a \in M(f)$. Това доказва, че $M(f) \neq \emptyset$ е непразно множество. В произволна точка $b \in \Delta_n(a, r)$ пресмятаме $\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(b) = 0$, използвайки тъждественото анулиране $f|_{\Delta_n(a,r)} \equiv 0$ на f върху $\Delta_n(a, r)$. Следователно $b \in \cap_{k \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n} M_k(f) = M(f)$ и $\Delta_n(a, r) \subseteq M(f)$. Това доказва, че $M(f)$ е непразно, отворено и затворено подмножество на U, така че $M(f) = U$, Q.E.D.

Нека U и V са отворени подмножества на $\mathbb{C}^n$, съдържащи началото $0^n \in \mathbb{C}^n$. Казваме, че холоморфните функции $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(V)$ са еквивалентни и записваме $f \sim g$, ако съществува отворено подмножество $W \subseteq U \cap V$ на $\mathbb{C}^n$, съдържащо 0^n, така че $f|_W = g|_W$. Съгласно Твърдение 1.10, $f \sim g$ точно когато f и g съвпадат върху поне една свързана компонента на сечението $U \cap V$. От същото твърдение следва, че ако $f \sim g$, то

$$\frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(0^n) = \frac{\partial^{|k|} g}{\partial z^k}(0^n) \quad \text{за} \quad \forall k = (k_1, \ldots, k_n) \in (\mathbb{Z}^{\geq 0})^n.$$

Проверяваме, че $f \sim g$ е релация на еквивалентност, т.е.
(i) $f \sim f$ за $\forall f \in \mathcal{O}(U)$,
(ii) ако $f \sim g$, то $g \sim f$,
(iii) ако $f \sim g$ и $g \sim h$, то $f \sim h$.
Класовете на еквивалентност $[f]$ на холоморфните функции в отворена околност на 0^n върху $\mathbb{C}^n$ се наричат зародиши. Означаваме с $\mathcal{O}_n$ множеството на зародишите на холоморфните функции в 0^n. Определяме събиране $[f] + [g] := [f + g]$ и умножение $[f][g] := [fg]$ чрез произволни представители $f \in \mathcal{O}(U)$, $g \in \mathcal{O}(V)$ и проверяваме коректността на тези определения, т.е. независимостта от избора на представители f и g на фиксираните класове на еквивалентност. Относно така въведените операции $\mathcal{O}_n$ е комутативен пръстен с единица $1 \in \mathbb{C}$. Можем да определим пръстена $\mathcal{O}_n$ на зародишите на холоморфните функции в $0^n \in \mathbb{C}^n$ като проективна граница на $\mathcal{O}(U)$ относно отворените подмножества $U \subseteq \mathbb{C}^n$, съдържащи 0^n. По-точно, фамилията $\mathcal{U}_{0^n} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ на отворените подмножества на $\mathbb{C}^n$ съдържащи 0^n е частично наредена относно теоретико-множественото включване. По определение, това означава, че
(i) $U \subseteq U$ за $\forall U \in \mathcal{U}_{0^n}$,
(ii) ако $U \subseteq V$ и $V \subseteq U$ за $U, V \in \mathcal{U}_{0^n}$, то $U = V$,
(iii) ако $U \subseteq V$ и $V \subseteq W$, то $U \subseteq W$ за $\forall U, V, W \in \mathcal{U}_{0^n}$.
Още повече, $\mathcal{U}_{0^n}$ е насочена система, т.е. за произволни $U, V \in \mathcal{U}_{0^n}$ съществува $U \cup V \in \mathcal{U}_{0^n}$, съдържащо U и V. Фамилията $\{\mathcal{O}(U)\}_{U \in \mathcal{U}_{0^n}}$ от пръстените на холоморфните функции върху подмножества от $\mathcal{U}_{0^n}$ образува проективна система, индексирана с $\mathcal{U}_{0^n}$. По-точно, за произволни $U \subseteq V$ от $\mathcal{U}_{0^n}$ ограничението

$$\rho_U^V : \mathcal{O}(V) \longrightarrow \mathcal{O}(U),$$

$$\rho_U^V(f) := f|_U$$

е хомоморфизъм на пръстени. При това, $\rho_U^U = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}(U)}$ и за произволни отворени подмножества $U \subseteq V \subseteq W$ от $\mathcal{U}_{0^n}$ е в сила $\rho_U^W = \rho_U^V \rho_V^W$. Проективната граница

$$\mathcal{O}_n := \lim_{0^n \in U} \mathcal{O}(U) := \left\{ (f_U)_{U \in \mathcal{U}_{0^n}} \in \prod_{U \in \mathcal{U}_{0^n}} \mathcal{O}(U) \ \middle| \ \rho_U^V(f_V) = f_U \quad \text{за} \quad \forall U \subseteq V \right\}$$

на $\{\mathcal{O}(U)\}_{U \in \mathcal{U}_{0^n}}$ е подпръстенът на директното произведение $\prod\limits_{U \in \mathcal{U}_{0^n}} \mathcal{O}(U)$, съставен от съгласуваните елементи. Условието за съгласуваност $\rho_U^V(f_V) = f_U$ за $\forall U, V \in \mathcal{U}_{0^n}$, $U \subseteq V$ е равносилно на еквивалентността $f_U \sim f_V$ на $f_U \in \mathcal{O}(U)$ и $f_V \in \mathcal{O}(V)$.
Да напомним, че комутативен пръстен с единица R е област, ако няма делители на нулата, т.е. от $ab = 0$ за $a, b \in R$ следва $a = 0$ или $b = 0$. Идеал $\mathfrak{M}$ в комутативен пръстен с единица R е максимален, ако единственият идеал $I \supsetneq \mathfrak{M}$, съдържащ строго $\mathfrak{M}$ е целият пръстен $I = R$. Комутативен пръстен с единица R е локален, ако има единствен максимален идеал $\mathfrak{M}$. Отсега нататък, ако изрично не е казано противното, означаваме с една и съща буква зародишите на холоморфните в 0^n функции и техните представители.

Твърдение 1.11. *Пръстенът $\mathcal{O}_n$ на зародишите на холоморфните в $0^n \in \mathbb{C}^n$ функции е локална област с максимален идеал*

$$\mathfrak{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_n \quad | \quad f(0^n) = 0\},$$

чийто фактор $\mathfrak{M}_n/\mathfrak{M}_n^2$ е $\mathbb{C}$-линейно пространство с базис $z_1+\mathfrak{M}_n^2, \ldots, z_n+\mathfrak{M}_n^2$.

Доказателство: Вече обяснихме, че всички представители на $f \in \mathcal{O}_n$ имат една и съща стойност в $0^n \in \mathbb{C}^n$, която се нарича стойност на f в 0^n. Зародишът $f \in \mathcal{O}_n$ е обратим тогава и само тогава, когато $f(0^n) \neq 0$. Тогава произволен представител f_0 на f не се анулира в достатъчно малка околност на 0^n върху $\mathbb{C}^n$ и f^{-1} е класът на $\frac{1}{f_0}$. Следователно допълнението

$$\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{O}_n^* = \{f \in \mathcal{O}_n \quad | \quad f(0^n) = 0\}$$

на мултипликативната група на $\mathcal{O}_n$ се състои от зародишите, анулиращи се в 0^n. Съгласно Лема 1.14 от Приложението, достатъчно е да проверим, че $\mathcal{O}_n \setminus \mathcal{O}_n^*$ е идеал, за да твърдим, че пръстенът $\mathcal{O}_n$ е локален. Наистина, за произволни $f, g \in \mathcal{O}_n \setminus \mathcal{O}_n^*$ и $h \in \mathcal{O}_n$ е в сила $f - g, fh \in \mathcal{O}_n \setminus \mathcal{O}_n^*$, съгласно

$$(f-g)(0^n) = f(0^n) - g(0^n) = 0 - 0 = 0 \quad \text{и} \quad (fh)(0^n) = f(0^n)h(0^n) = 0.h(0^n) = 0.$$

При това, единственият максимален идеал на $\mathcal{O}_n$ е

$$\mathfrak{M}_n := \mathcal{O}_n \setminus \mathcal{O}_n^* = \{f \in \mathcal{O}_n \quad | \quad f(0^n) = 0\}.$$

За да докажем, че $\mathcal{O}_n$ е област да допуснем, че $fg = 0$ за $f, g \in \mathcal{O}_n$. Тогава съществува полидиск $\Delta_n(0^n, r)$ и представители $f_0, g_0 \in \mathcal{O}(\Delta_n(0^n, r))$ на f, g, така че $f_0 g_0|_{\Delta_n(0^n,r)} \equiv 0$. Допускането $g \neq 0 \in \mathcal{O}_n$ означава, че всяка отворена околност $0^n \in U_0 \subseteq \mathbb{C}^n$ на началото съдържа точка $a \in U_0$ с $g_0(a) \neq 0$. Поради непрекъснатостта на холоморфната функция $g_0 : \Delta_n(0^n, r) \to \mathbb{C}$ съществува $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n) \in (\mathbb{R}^{>0})^n$ с достатъчно малки компоненти $\rho_i \in \mathbb{R}^{>0}$, така че g_0 не се анулира в нито една точка от полидиска $\Delta_n(a, \rho)$ и $\Delta_n(a, \rho) \subseteq \Delta_n(0^n, r)$. Тогава от $f_0 g_0|_{\Delta_n(a,\rho)} \equiv 0$ следва $f_0|_{\Delta_n(a,\rho)} \equiv 0$. Съгласно свързаността на полидиска $\Delta_n(0^n, r)$, можем да приложим Твърдение 1.10 и да получим, че $f|_{\Delta_n(0^n,r)} \equiv 0$. По определение, това означава, че $f = 0 \in \mathcal{O}_n$ и доказва липсата на делители на нулата в $\mathcal{O}_n$.

Да забележим, че пръстенът $\mathcal{O}_n$ е линейно пространство над полето $\mathbb{C}$ на комплексните числа, което се влага в $\mathcal{O}_n$ като подпръстена на зародишите на постоянните функции. Идеалите $\mathfrak{M}_n$ и $\mathfrak{M}_n^2$ са $\mathbb{C}$-линейни подпространства на $\mathcal{O}_n$. За произволно линейно пространство V над поле F и произволно подпространство U на V, фактор-групата $(V/U, +) := (V, +)/(U, +)$ на адитивната група на V по адитивната група на U има коректно зададено умножение

$$F \times (V/U) \longrightarrow (V/U),$$

$$(\lambda, v + U) \mapsto \lambda v + U$$

със скалари $\lambda \in F$ и е линейно пространство над F. В случая, $\mathfrak{M}_n/\mathfrak{M}_n^2$ се разглежда като фактор-пространство на $\mathbb{C}$-линейното пространство $\mathfrak{M}_n$ по неговото подпространство $\mathfrak{M}_n^2$. (Да отбележим, че идеалът $\mathfrak{M}_n^2$ на $\mathcal{O}_n$ се съдържа в идеала $\mathfrak{M}_n$ на $\mathcal{O}_n$ и фактор-групата $(\mathfrak{M}_n/\mathfrak{M}_n^2, +) := (\mathfrak{M}_n, +)/(\mathfrak{M}_n^2, +)$ е идеал във фактор-пръстена $\mathcal{O}_n/\mathfrak{M}_n^2$.)

За да проверим, че $z_1 + \mathfrak{M}_n^2, \ldots, z_n + \mathfrak{M}_n^2$ е базис на линейното пространство $\mathfrak{M}_n/\mathfrak{M}_n^2$ над $\mathbb{C}$ да забележим, че $\mathfrak{M}_n \triangleleft \mathcal{O}_n$ се поражда от $z_1, \ldots, z_n \in \mathfrak{M}_n$ като идеал в $\mathcal{O}_n$. Причина за това е, че всички събираеми на Тейлъровия ред

$$f_0(z) = \sum_k \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(0^n) \frac{z^k}{k!}$$

на представител $f_0 \in \mathcal{O}(U)$ на зародиш $f \in \mathfrak{M}_n$ в околност $0^n \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ са от обща степен $|k| = k_1 + \ldots + k_n \geq 1$ и са кратни на z_i за някое $1 \leq i \leq n$. От

$$\mathfrak{M}_n = \langle z_1, \ldots, z_n \rangle \triangleleft \mathcal{O}_n$$

следва, че

$$\mathfrak{M}_n^2 = \langle z_i z_j \ \ | \ \ 1 \leq i \leq j \leq n \rangle$$

се поражда от зародишите $z_i z_j$ на $z_i z_j$ с $1 \leq i \leq j \leq n$ като идеал на $\mathcal{O}_n$.
Ако $f \in \mathfrak{M}_n$ има представител $f_0 \in \mathcal{O}(U)$, то

$$f_0(z) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(0^n) z_j + \sum_{k, |k| \geq 2} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(0^n) \frac{z^k}{k!}$$

в околност $0^n \in U \subseteq \mathbb{C}^n$ и

$$f + \mathfrak{M}_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(0^n) z_j + \mathfrak{M}_n^2,$$

съгласно $\sum\limits_{k, |k| \geq 2} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}(0^n) \frac{z^k}{k!} \in \mathfrak{M}_n^2$. Това доказва, че $\mathbb{C}$-линейната обвивка на $z_1 + \mathfrak{M}_n^2, \ldots, z_n + \mathfrak{M}_n^2$ покрива цялото фактор-пространство $\mathfrak{M}_n / \mathfrak{M}_n^2$. За линейната независимост на $z_1 + \mathfrak{M}_n^2, \ldots, z_n + \mathfrak{M}_n^2$ над $\mathbb{C}$ да допуснем, че $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j z_j \in \mathfrak{M}_n^2$. Тогава съществува $g \in \mathfrak{M}_n^2$, така че $g - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j z_j = 0 \in \mathcal{O}_n$. Произволен представител $g_0 \in \mathcal{O}(U)$ на g има абсолютно и равномерно сходящ ред на Taylor $\sum\limits_{k, |k| \geq 2} \frac{\partial^{|k|} g_0}{\partial z^k}(0^n) \frac{z^k}{k!}$ в достатъчно малка околност на 0^n върху $\mathbb{C}^n$. Следователно

$$0 = \frac{\partial^{|k|}(g_0 - \sum\limits_{j=1}^{n} a_j z_j)}{\partial z^k}(0^n) = \begin{cases} 0 & \text{за } k = 0^n, \\ -a_j & \text{за } k_j = 1, \ k_s = 0, \ \forall s \neq j, \\ \frac{\partial^{|k|} g_0}{\partial z^k}(0^n) & \text{за } |k| = k_1 + \ldots + k_n \geq 2. \end{cases}$$

В частност, $a_1 = \ldots = a_n = 0$ и $z_1 + \mathfrak{M}_n^2, \ldots, z_n + \mathfrak{M}_n^2 \in \mathfrak{M}_n / \mathfrak{M}_n^2$ са линейно независими над $\mathbb{C}$, Q.E.D.

Задача 1.12. *Нека $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_2$ са зародиши на холоморфни в $0^2 \in \mathbb{C}^2$ функции,*

$$J(f_1, f_2)(0^2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1}(0^2) & \frac{\partial f_1}{\partial z_2}(0^2) \\ & \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_1}(0^2) & \frac{\partial f_2}{\partial z_2}(0^2) \end{pmatrix}$$

е тяхната Якобиева матрица в $0^2 \in \mathbb{C}^2$. Да се докаже, че съседните класове $(f_1 - f_1(0^2)) + \mathfrak{M}_2^2, (f_2 - f_2(0^2)) + \mathfrak{M}_2^2$ образуват базис на линейното пространство $\mathfrak{M}_2 / \mathfrak{M}_2^2$ над $\mathbb{C}$ тогава и само тогава, когато детерминантата

$$\det J(f_1, f_2)(0^2) \neq 0.$$

В следващия въпрос ще докажем, че $\mathcal{O}_n$ е ньотерова област с еднозначно разлагане в произведение на неразложими множители.

Приложение

Настоящото приложение доказва критерия за локалност на комутативен пръстен с единица R - Лема 1.14, използван в доказателството на Твърдение 1.11. От своя страна, доказателството на Лема 1.14 използва следното

Твърдение 1.13. *Всеки собствен идеал $I \subsetneq R$ в комутативен пръстен с единица R се съдържа в някой максимален идеал $\mathfrak{M}$ на R.*

Доказателство: Ще приложим Лемата на Zorn към множеството

$$\Sigma := \{J \triangleleft R \ \mid \ I \subseteq J \subsetneq R\}$$

на собствените идеали на R, съдържащи I. Това множество е непразно, съгласно $I \in \Sigma$. Произволно линейно наредено подмножество $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \Sigma$ има точна горна граница $J := \cup_{\alpha \in A} J_\alpha$ от Σ. Преди всичко, J е идеал в R, защото за произволни $a, b \in J$ съществуват $\alpha, \beta \in A$, така че $a \in J_\alpha$, $b \in J_\beta$. Съгласно линейната нареденост на $\{J_\alpha\}_{\alpha \in A}$ имаме $J_\alpha \subseteq J_\beta$ или $J_\beta \subseteq J_\alpha$. И в двата случая, обединението $J_\alpha \cup J_\beta = J_\beta$ или J_α е идеал в R, съдържащ се в множеството J, така че $a - b \in J_\alpha \cup J_\beta \subseteq J$. За произволни $a \in J$ и $r \in R$ с $a \in J_\alpha$ имаме $ar \in J_\alpha \subseteq J$. Това доказва, че J е идеал в R. От $I \subseteq J_\alpha$ за $\forall \alpha \in A$ следва, че $I \subseteq J$. Допускането $J = R$ води до $1 \in J$, откъдето $1 \in J_\alpha$ за някое $\alpha \in A$, противно на избора на $J_\alpha \in \Sigma$ за $\forall \alpha \in A$. Следователно J е собствен идеал на R, съдържащ I, така че $J \in \Sigma$.
Съгласно Лемата на Zorn. това е достатъчно за съществуването на максимален елемент $\mathfrak{M} \in \Sigma$. По определението на Σ, $\mathfrak{M}$ е собствен идеал на R, съдържащ I. Остава да проверим, че идеалът $\mathfrak{M}$ е максимален. За целта да разгледаме идеал $\mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{N} \triangleleft R$, съдържащ строго $\mathfrak{M}$. Съгласно максималността на $\mathfrak{M} \in \Sigma$ идеалът $\mathfrak{N} \notin \Sigma$ не принадлежи на Σ. Но $I \subseteq \mathfrak{M} \subsetneq \mathfrak{N}$, така че единствената причина за $\mathfrak{N} \notin \Sigma$ е $\mathfrak{N} = R$. Това доказва максималността на $\mathfrak{M}$, Q.E.D.
Да напомним, че мултипликативната група R^* на комутативен пръстен с единица R се състои от елементите, които са обратими относно умножението, т.е.

$$R^* = \{r \in R \ \mid \ \exists s \in R \quad \text{с} \quad rs = 1\}.$$

Лема 1.14. *Комутативен пръстен с единица R е локален тогава и само тогава, когато допълнението $R \setminus R^*$ на мултипликативната група R^* е идеал в R. В такъв случай, единственият максимален идеал на R е $\mathfrak{M} = R \setminus R^*$.*

Доказателство: Ако идеал $I \triangleleft R$ пресича мултипликативната група R^*, то $I = R$ съвпада с целия пръстен. По-точно, наличието на елемент $\rho \in I \cap R^*$ с $\rho^{-1} = \sigma \in R$ води до $1 = \rho\sigma \in I \triangleleft R$, откъдето $r = r.1 \in I \triangleleft R$ за $\forall r \in R$ и $I = R$. Следователно всеки собствен идеал $I \subsetneq R$ се съдържа в множеството $R \setminus R^*$ на необратимите относно умножението елементи на R.
Ако пръстенът R е локален, то единственият му максимален идеал $\mathfrak{M}$ е собствен и $\mathfrak{M} \subseteq R \setminus R^*$. За $\forall \rho \in R \setminus R^*$ главният идеал $\rho R \subsetneq R$ е собствен. В противен случай съществува $\sigma \in R$ с $\rho\sigma = 1 \in R = \rho R$ и $\rho \in R^*$, противно на избора на $\rho \in R \setminus R^*$. Съгласно Твърдение 1.13, собственият идеал ρR се съдържа в някой максимален идеал на R. По предположение, R има единствен максимален идеал $\mathfrak{M}$, така че $\rho R \subseteq \mathfrak{M}$. Оттук, $\rho = \rho.1 \in \mathfrak{M}$ и $R \setminus R^* \subseteq \mathfrak{M}$. По този начин доказахме, че ако R е локален пръстен, то единственият му максимален идеал $\mathfrak{M} = R \setminus R^*$ съвпада с множеството на необратимите относно умножението елементи на R. В частност, $R \setminus R^*$ е идеал в R.
Обратно, да предположим, че $R \setminus R^*$ е идеал в R. Всеки максимален идеал $\mathfrak{M} \triangleleft R$ е собствен, така че $\mathfrak{M} \subseteq R \setminus R^*$. Идеалът $R \setminus R^*$ е собствен (защото $1 \notin R \setminus R^*$). Следователно $\mathfrak{M} = R \setminus R^*$, по определението за максимален идеал. Това доказва, че R има единствен максимален идеал $\mathfrak{M} = R \setminus R^*$ и е локален пръстен, Q.E.D.