НИКОЛА ПЕТРОВ

ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

част II

УНИВЕРСИТЕТСКО ИЗДАТЕЛСТВО
"ЕПИСКОП КОНСТАНТИН ПРЕСЛАВСКИ"

НИКОЛА ПЕТРОВ

ЛИНЕЙНА АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧНА ГЕОМЕТРИЯ

част II

ШУМЕН
2004

ISBN 954-577-224-7

Шумен, 2004

С ъ д ъ р ж а н и е

Предговор

Книгата е продължение на “Линейна алгебра и аналитична геометрия – част I “ с автори Никола Петров и Никола Зяпков (Университетско издателство “Епископ Константин Преславски”, Шумен, 2000 г.) и едва ли се нуждае от самостоятелен предговор. Адресирана е преди всичко към студентите от съответните специалности на Шуменския университет “Епископ Константин Преславски”.

Съдържанието надхвърля обема на стандартен едносеместриален курс лекции. Целта не беше да се възпроизведат лекциите, а да се подпомогне самостоятелната работа и на онези студенти, които проявяват по-задълбочен интерес. Допълнителна цел на книгата е да служи частично като справочник към някои специализирани курсове, които се нуждаят от по-задълбочени знания по линейна алгебра.

Някои определения могат да бъдат по-кратки, ако се използват вече въведени понятия. В редица случаи (особено в гл. 2) краткостта съзнателно е пожертвана, за да бъдат възможни различни “траектории” на четене.

Препратките към първата част на учебника навсякъде използват съкращение от типа Ч. I, гл. x,§ y, т. z.

Приятно задължение ми е да изкажа искрената си благодарност на рецензентите проф. д.м.н. Грозьо Станилов и доц. д.м. Недялко Ненов за полезните им препоръки. Изказвам сърдечна благодарност и на редактора доц. д.м. Керопе Чакърян, който прегледа внимателно и неформално целия текст и направи многобройни уместни препоръки.

Авторът

Допълнителна литература

1. Александров, П. С. Лекции по аналитической геометрии. М., Наука, 1968.
2. Гаврилов, М., Гр. Станилов. Линейна алгебра и аналитична геометрия. С., НИ, 1991.
3. Кострикин, А. И. Въведение в алгебрата. С., НИ, 1981.
4. Кострикин, А. И., Ю. И. Манин. Линейна алгебра и геометрия. С., НИ, 1990.

5. Тышкевич, Р. И., А. С. Феденко. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Минск, Вышэйшая школа, 1976.

#

Глава 1

Билинейни и квадратични форми

§ 1. Билинейни и почти билинейни форми

1.Определение. Нека L и M са линейни пространства над едно и също поле N #Ще казваме, че изображението $g : L \times M \to$ #N #е билинейна форма, ако са изпълнени следните условия:

а) за всеки три вектора $l_1, l_2 \in L$ и $m \in M$

$$g(l_1 + l_2, m) = g(l_1, m) + g(l_2, m)$$

и за всеки три вектора $l \in L$ и $m_1, m_2 \in M$

$$g(l, m_1 + m_2) = g(l, m_1) + g(l, m_2)\ ;$$

б) за всеки два вектора $l \in L$ и $m \in M$ и за всеки скалар $\lambda \in$ #N

$$g(\lambda l, m) = \lambda g(l, m) = g(l, \lambda m)\ .$$ ##

Ако L=M, ще казваме, че g е билинейна форма, *дефинирана в пространството* L.

Ако фиксираме вектора m и меним вектора l, ще получим изображение (функция) $g_m : L \to N$, за което $g_m(l) = g(l, m)$. Според определението на билинейна форма тази функция е линейна. Аналогично, ако фиксираме вектора L и меним вектора M, ще получим функция $g_l : M \to N$ #, $g_l(m) = g(l, m)$, която също е линейна. Тази бележка донякъде обяснява употребата на прилагателното *билинейна* за функцията $g(l, m)$ на два векторни аргумента: тя е линейна като функция на всеки от двата аргумента, разглеждани поотделно.

За всяка билинейна форма g е в сила $g(0, m) = g(l, 0) = 0$, където символът 0 означава последователно нулевия вектор в пространството L, нулевия вектор в пространството M и нулата в полето N. Наистина $g(0, m) = g(0 + 0, m) = g(0, m) + g(0, m)$, откъдето следва $g(0, m) = 0$. Аналогично се доказва и другото равенство.#

П р и м е р и. а) Ако L и M са линейни пространства над поле N /#нека дефинираме g с равенството $g(l,m)=0$ за произволни вектори $l \in L$ и $m \in M$. Така дефинираното изображение $L \times M \to N$ #очевидно е билинейна форма. Тя се нарича *нулева* форма.

б) Нека $L=N^{\,r}$ /##$M=N^{\,s}$ са координатни линейни пространства, а G е матрица от тип $r \times s$ с елементи от полето N ##Ако $l=(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ и $m=(y_1, y_2, \ldots, y_s)$ са вектори съответно от пространствата L и M, образуваме матриците-стълбове

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix}, \qquad Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_s \end{pmatrix}$$

и дефинираме

(1) $$g(l,m)=X^t G Y \,.$$

В дясната страна на равенството (1) стои матрица от тип 1   1 и считаме, че нейният единствен елемент е $g(l,m)$ от лявата страна на равенството. Като се използва, че при транспониране на матрици $(X_1+X_2)^t = X_1^t + X_2^t$, с помощта на познатите свойства на операциите с матрици непосредствено се проверява, че g е билинейна форма. Ако елементите на матрицата G са g_{ij}, $i=1, 2, \ldots, r$, $j=1, 2, \ldots, s$, леко упражнение е да се провери, че равенството (1) може да се запише във вида

(2) $$g(l,m)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} g_{ij} x_i y_j \,.$$

Често ще използваме следното

2.Твърдение. *Нека* $G=(g_{ij})$ *и* $H=(h_{ij})$ *са две матрици от тип* $r \times s$ *с елементи от полето* N #*и нека равенството* $X^t G Y = X^t H Y$ *е изпълнено за всеки две матрици* X *и* Y *съответно от тип* $r \times 1$ *и* $s \times 1$ *с елементи от полето* N . *Тогава* $G=H$.

Наистина, ако в матрицата X поставим единица на i-то място , а на останалите места – нули, аналогично, в Y поставим единица на j-то място и нули на останалите, то $X^t GY = g_{ij} = X^t HY = h_{ij}$ за произволни допустими стойности на индексите. Следователно $G = H$.

3. Определение. Нека L и M са линейни пространства над полето **C** на комплексните числа. Ще казваме, че изображението $g : L \times M \to \mathbf{C}$ е *почти билинейна форма*, ако са изпълнени следните условия:

а) за всеки три вектора $l_1, l_2 \in L$ и $m \in M$

$$g(l_1 + l_2, m) = g(l_1, m) + g(l_2, m)$$

и за всеки три вектора $l \in L$ и $m_1, m_2 \in M$

$$g(l, m_1 + m_2) = g(l, m_1) + g(l, m_2);$$

б) за всеки два вектора $l \in L$ и $m \in M$ и за всеки скалар $\lambda \in \mathbf{C}$

$$g(\lambda l, m) = \lambda g(l, m), \quad g(l, \lambda m) = \overline{\lambda} g(l, m),$$

където, ако $\lambda = a + bi$, то $\overline{\lambda} = a - bi$ е комплексно спрегнатото на числото λ.#

Тук функцията $g(l, m)$ отново е линейна по първия си аргумент. По втория аргумент тя е „почти линейна”, защото за $g_l(m) = g(l, m)$ (при фиксирано l) имаме $g_l(m_1 + m_2) = g_l(m_1) + g_l(m_2)$, но $g_l(\lambda m) = \overline{\lambda} g_l(m)$.

Като запазваме означенията от пример б) в т. 1 (сега $N = \mathbf{C}$) нека

(3) $$g(l, m) = X^t G \overline{Y},$$

където матрицата $\overline{Y}$ е получена от матрицата Y със замяна на елементите ѝ с комплексно спрегнатите им. Непосредствената проверка показва, че равенството (3) дефинира почти билинейна форма $g : L \times M \to \mathbf{C}$.#

За приложенията в геометрията са особено важни билинейните и почти билинейните форми $g : L \times L \to N$, дефинирани в пространство L и удовлетворяващи някои допълнителни условия. Малко по-късно ще съсредоточим вниманието си именно върху такива форми.

Нека пространството L е крайномерно, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е негов базис, а g е билинейна или почти билинейна форма, дефинирана в L. Нека $l = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$ и $m = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n$ са произволни вектори от L. Тогава в билинейния случай имаме равенствата

(4) $$g(l,m)=g(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_jg(e_i,e_j)=X^tGY.$$

В най-дясната страна X и Y са матриците-стълбове, образувани съответно от координатите $x_1,x_2,\dots,x_n$ и $y_1,y_2,\dots,y_n$ на векторите *l* и *m,* а

$$G=(\,g_{ij}(e_{i,}e_j)\,)\,;\;\; i,\; j=1,2,\dots,n\,,$$

е квадратна матрица от ред *n,* която се нарича *матрица на формата спрямо* избрания базис или още *матрица на* Грам спрямо *базиса* $e_1,\dots,e_n$. При същите означения, ако формата е почти билинейна, имаме аналогична формула

(5) $$g(l,m)=g(\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i\bar{y}_jg(e_i,e_j)=X^tG\overline{Y},$$

където матрицата $\overline{Y}$ е получена от матрицата Y със замяна на елементите й с комплексно спрегнатите им. Равенствата (4) и (5) показват, че ако пространството L е крайномерно, то чрез координатите спрямо избран базис всяка билинейна (съотв. почти билинейна) форма може да се запише като

$$g(l,m)=X^tGY\,,\ \text{съответно}\ g(l,m)=X^tG\overline{Y}\,.$$

Нека $e_1',e_2',\dots,e_n'$ е още един базис (нов базис) и T е матрицата на прехода от досегашния (стария) базис към новия, а X' и Y' са матриците – стълбове, образувани от новите координати на векторите l и m. Както знаем, връзката между старите и новите координати (Ч. I, гл. 3, § 4) се дава с равенството $X=TX'$. Ако G' е матрицата на билинейната форма g спрямо новия базис, то съгласно (4) имаме

$$g(l,m)=X'^tG'Y'=X^tGY=(TX')^tG(TY')=X'^t(T^tGT)Y'\,,$$

следователно $X'^tG'Y'=X'^t(T^tGT)Y'$ за произволни матрици-стълбове X' и Y'. Като приложим твърдението от т. 2, получаваме равенството $G'=T^tGT$. При същите означения и с незначителни изменения се доказва, че ако формата е почти билинейна, то $G'=T^tG\overline{T}$. С това доказахме следното

4.Твърдение. *Ако билинейна* (съотв. *почти билинейна*) *форма, дефинирана в линейно пространство L, спрямо даден базис има матрица G, а T е матрицата на прехода от дадения базис към някакъв нов базис, то матрицата на формата спрямо новия базис е равна на* T^tGT *в билинейния случай и на* $T^tG\overline{T}$ *в почти билинейния.*

Както знаем, матрицата на прехода от един базис към друг базис винаги е неособена, следователно матриците G и T^tGT (съответно $T^tG\overline{T}$) имат един и същи ранг (Ч. I, гл. 3, § 3), който се нарича *ранг на формата.*

В част I, гл. 5, § 4 на тази книга беше въведено понятието *скаларно произведение* на свободни вектори. Ако се върнем към определението и свойствата на скаларното произведение, дадени там, ще забележим, че всъщност то по специален начин дефинира билинейна форма в тримерното пространство на свободните вектори. Тя има и някои допълнителни свойства, напр., че $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (комутативност или симетрия на скаларното произведение). Там нарекохме два свободни вектора *ортогонални,* ако скаларното им прозведение е равно на нула. Именно заради симетрията имаме, че ако свободният вектор $\vec{a}$ е ортогонален на свободния вектор $\vec{b}$, то $\vec{b}$ е ортогонален на $\vec{a}$. В общия случай на абстрактно пространство L, в което е дефинирана билинейна форма g, също ще казваме, че векторите l и m са *ортогонални* относно формата g, ако $g(l,m)=0$. За приложенията в геометрията е важно при такова определение да се запази симетричността на релацията ортогоналност. Това налага за формата g да се предположат и някои допълнителни условия.

5. Определение. а) Ще казваме, че билинейната форма g, дефинирана в пространството L, е *симетрична*, ако за всеки два вектора $l,\ m \in L$ е изпълнено

$$g(l,m) = g(m,l).$$

б) Ще казваме, че билинейната форма g, дефинирана в пространството L, е *антисиметрична* или *симплектична*, ако за всеки два вектора $l,\ m \in L$ е изпълнено

$$g(l,m) = -g(m,l).$$

в) Ще казваме, че почти билинейната форма g, дефинирана в комплексното пространство L, е *ермитово симетрична* или просто *ермитова*, ако за всеки два вектора $l, m \in L$ е в сила

$$g(l,m) = \overline{g(m,l)},$$

където чертата отново означава комплексно спрягане.

От определението се вижда, че ако формата g има някое от свойствата симетричност, антисиметричност или ермитовост, то от равенството $g(l,m)=0$ винаги следва $g(m,l)=0$, т. е. ако векторът l е ортогонален на вектора m относно формата, то m също е ортогонален на l.

Ще напомним, че квадратната матрица A се нарича съответно *симетрична, антисиметрична* (*симплектична*) и *ермитова*, ако съответно $A^t = A,\quad A^t = -A$ и $\overline{A}^t = A$.

6. Твърдение. *Нека g е билинейна или почти билинейна форма, дефинирана в крайномерно линейно пространство L. Тогава:*

а) *формата е симетрична тогава и само тогава, когато матрицата й спрямо поне един базис е симетрична. Ако формата е симетрична, матрицата й спрямо всеки базис е симетрична;*

б) *формата е антисиметрична* (*симплектична*) *тогава и само тогава, когато матрицата й спрямо поне един базис е антисиметрична. Ако формата е антисиметрична, матрицата й спрямо всеки базис е антисиметрична;*

в) *формата е ермитова тогава и само тогава, когато матрицата й спрямо поне един базис е ермитова. Ако формата е ермитова, матрицата й спрямо всеки базис е ермитова.*

Доказателство. а) Нека формата g е симетрична и G е матрицата й спрямо прозволно избран базис. Като се използват координати, равенството $g(l,m) = g(m,l)$, което е изпълнено за всеки два вектора l и m, може да се запише като матрично равенство $X^tGY = Y^tGX$, което е изпълнено за произволни матрици-стълбове X, Y. Но

$$Y^tGX = (Y^tGX)^t = X^tG^tY$$

(първото равенство е в сила, защото матрицата Y^tGX е от тип 1 1, а второто отразява правилото за транспониране на произведение на матрици), следователно $X^tGY = X^tG^tY$ и от твърдението в т. 2 получаваме $G = G^t$, т. е. матрицата G е симетрична.

Обратно, нека спрямо някакъв базис матрицата G на формата е симетрична . Като използваме координати, сега имаме

$$X^tGY = (X^tGY)^t = Y^tG^tX = Y^tGX$$

(в последното равенство използвахме, че матрицата G е симетрична). Като сравним най-лявата и най-дясната страна, получаваме

$$X^tGY = Y^tGX \qquad g(l,m) = g(m,l),$$

т. е. формата е симетрична. Както видяхме по-горе, ако формата е симетрична, то матрицата й спрямо всеки базис е симетрична. Доказателствата на твърденията б) и в) са аналогични и ги оставяме за упражнение.

Ако не е казано друго, по-нататък ще разглеждаме само форми, които имат поне едно от следните свойства: симетричност, антисиметричност и ермитовост. Всяка такава форма ще наричаме *обобщено скаларно произведение* (дефинирано в пространството L).

7. Определение. а) *Ядро* на обобщеното скаларно произведение g, дефинирано в пространството L, ще наричаме множеството на онези вектори $l \in L$, които са ортогонални на всички вектори от L.

б) Ще казваме, че обобщеното скаларно произведение е *неособено* (или, че формата е *неособена*), ако ядрото му е тривиално, т. е. ако се състои само от нулевия вектор.

Лесно е да се съобрази, че ядрото е подпространство на L. Наистина, нека l_1, l_2 са два вектора от ядрото, т. е. $g(l_1, m) = g(l_2, m) = 0$ за всеки вектор $m \in L$. Тогава за линейната комбинация $\lambda l_1 + \mu l_2$ имаме $g(\lambda l_1 + \mu l_2, m) = \lambda g(l_1, m) + \mu g(l_2, m) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$, т. е. тя също е в ядрото на формата.

8. Твърдение. *В крайномерно линейно пространство над поле N # обобщеното скаларно произведение е неособено тогава и само тогава, когато матрицата му на Грам спрямо произволен базис е неособена.*

Доказателство. Нека $\dim L = n$. Избираме произволно базис и нека $G = (g_{i\,j})$ е матрицата на Грам на формата g спрямо избрания базис. За определеност ще предположим например, че формата е ермитова. Тогава съгласно равенството (5) имаме

$$g(l, m) = X^t G \overline{Y}, \tag{6}$$

където X и Y са матриците-стълбове, образувани сътветно от координатите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ на векторите l и m. Нека

$$\begin{aligned} g_{11}x_1 + g_{21}x_2 + \ldots + g_{n1}x_n &= a_1 \\ g_{12}x_1 + g_{22}x_2 + \ldots + g_{n2}x_n &= a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ g_{1n}x_1 + g_{2n}x_2 + \ldots + g_{nn}x_n &= a_n . \end{aligned} \tag{7}$$

Левите страни на тези равенства са всъщност елементите на матрицата $X^t G$. При тези означения равенството $g(l, m) = X^t G \overline{Y} = 0$ добива вида

$$a_1 \overline{y}_1 + a_2 \overline{y}_2 + \ldots + a_n \overline{y}_n = 0 . \tag{8}$$

Векторът $l \in L$ е в ядрото на формата тогава и само тогава, когато равенството (8) е изпълнено за всички стойности на $y_1, y_2, \ldots, y_n$, а това от своя страна е изпълнено точно тогава, когато всички коефициенти a_i са равни на нула. Следователно векторът l принадлежи на ядрото на формата тогава и само тогава, когато координатите му $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяват системата (7) при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Както знаем, хомогенна система от n уравнения с n неизвестни има единствено решение (само нулевото) точно тогава, когато матрицата от коефициентите пред неизвестните е неособена. В нашия случай това е транспонираната на матрицата на Грам G. Следователно ядрото на формата е тривиално точно тогава, когато матрицата на Грам е неособена. Ако разглеждаме симетрична или симплектична форма, доказателството по нищо не се различава от изложеното.

9. Твърдение. *Нека в крайномерно линейно пространство L е въведено обобщено скаларно произведение g, а G е матрицата на Грам на формата g спрямо някакъв базис. Тогава ядрото на формата има размерност $\dim L - r(G)$, където $r(G)$ е рангът на матрицата G.*

Доказателство. Връщаме се към текста и означенията на доказателството в т. 8. Въпросът за размерността на ядрото е всъщност въпрос за размерността на пространството от решенията на хомогенната система, която се получава от (7) при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$. Както знаем (Ч. I, гл. 2, § 5), пространството от решенията има размерност, равна на броя n на неизвестните минус ранга на матрицата от коефициентите. В нашия случай $n = \dim L$.

10. Твърдение. *Нека L е крайномерно линейно пространство над поле N, в което е дефинирано неособено обобщено скаларно произведение g. Тогава за всяка линейна функция $f : L \to N$ съществува еднозначно определен вектор $m_f \in L$, за който $f(l) = g(l, m_f)$ за всеки вектор $l \in L$.*

Доказателство. Ако L е нулевото пространство, твърдението е очевидно, защото $f(0) = 0$ и в качеството на m_f ще изберем нулевия вектор. Нека L не е нулевото пространство и да изберем базис $e_1, \ldots, e_n$, като запазим означенията от т. 8. Нека $l = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$ е произволен вектор. Тъй като функцията f е линейна, то

$$f(l) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n)$$

и очевидно тя се определя еднозначно от стойностите си $f(e_i)$ върху базисните вектори. Следователно, ако търсеният вектор m_f съществува, необходимо и достатъчно е да са в сила равенствата $f(e_i) = g(e_i, m_f)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Нека $m_f = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n$. Като използваме формулите (4) и (5) и бележката, че i-тата координата на вектора e_i е единица, а останалите са равни на нула, равенствата, за които стана дума, се записват като

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} y_j, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

ако формата g е симетрична или симплектична, и

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} \bar{y}_j, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

ако формата е ермитова. И в двата случая имаме система от n уравнения с n неизвестни, в която матрицата от коефициентите пред неизвестните е матрицата на Грам G, а свободните членове са $f(e_i)$, $i = 1,2,\ldots,n$. Тъй като по условие обобщеното скаларно произведение е неособено, то матрицата G е неособена (вж. твърдението в т. 8). Следователно и в двата случая системата има решение и то е единствено, което завършва доказателството.

Нека M е подпространство на линейното пространство L, в което е въведено обобщено скаларно произведение g. Ако ограничението на формата g върху подпространството M е неособено обобщено скаларно произведение, ще казваме, че *подпространството M е неособено.* Ако L_1 и L_2 са подпространства на L и всеки вектор от L_1 е ортогонален на всеки вектор от L_2, ще казваме, че *подпространствата са ортогонални. Ортогонално допълнение* на подпространството M ще наричаме множеството

$$M^{\perp} = \{ l \in L \mid g(l,m) = 0 \quad \forall \ m \in M \},$$

т. е. то се състои от всички вектори от пространството, които са ортогонални на всички вектори от подпространството. Непосредствено се проверява, че ортогоналното допълнение на подпространство също е подпространство (вж. края на т. 7). Справка с определенията показва, че ако $M = \{0\}$ е нулевото подпространство, то $M^{\perp} = L$. Ако $M = L$, то $M^{\perp}$ е всъщност ядрото на обобщеното скаларно произведение.

11. Твърдение. *Нека L е крайномерно линейно пространство с обобщено скаларно произведение g, а $M \subset L$ е подпространство.*

а) *Ако подпространството M е неособено, то $L = M \oplus M^{\perp}$.*

б) *Ако и двете подпространства* M *и* $M^{\perp}$ *са неособени, то* $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

Доказателство. а) Ако M е нулевото подпространство, то $M^{\perp} = L$ и а) е очевидно. Тъй като $L^{\perp}$ е ядрото на формата g, ако M е нулевото подпространство, то $M^{\perp} = L$ е неособено пространство и ядрото $L^{\perp}$ на формата е нулевото подпространство, т. е. в сила е твърдението б). Нека сега M не е нулевото подпространство. Избираме базис $e_1, e_2, \dots, e_k$, $k \geq 1$, на подпространството и го допълваме до базис $e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n$, $k \leq n$, на цялото пространство L. Ако векторът $l \in L$ е ортогонален на всеки от векторите $e_1, \dots, e_k$, то той е ортогонален и на всяка тяхна линейна комбинация. Следователно векторът $l \in L$ е ортогонален на всички вектори от подпространството M, т. е. лежи в подпространството $M^{\perp}$, тогава и само тогава, когато са в сила равенствата $g(l, e_1) = 0$, $g(l, e_2) = 0$, $\dots, g(l, e_k) = 0$. Да въведем координати на векторите и да запишем тези равенства като система линейни хомогенни уравнения с неизвестни – координатите x_i на вектора L. За определеност нека обобщеното скаларно произведение е ермитово и G е матрицата му на Грам спрямо избрания базис. Тъй като i-тата координата на вектора e_i е единица, а останалите са нули, като използваме формулата (5), получаваме последователно

$$
\begin{array}{c}
g_{11}x_1 + g_{21}x_2 + \dots + g_{n1}x_n = 0 \\
g_{12}x_1 + g_{22}x_2 + \dots + g_{n2}x_n = 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
g_{1k}x_1 + g_{2k}x_2 + \dots + g_{nk}x_n = 0 .
\end{array}
\tag{8}
$$

Матрицата от коефициентите в тази система има ранг k, защото

$$g_{ij} = g(e_i, e_j), \quad 1 \leq i, j \leq k,$$

са елементите на матрицата на Грам на ограничението на формата g върху подпространството M; то е неособено и по твърдението в т. 8 матрицата му е неособена. И така, хомогенната система (8) е с n неизвестни, а матрицата й има ранг $k \leq n$. Съгласно общата теория на хомогенните системи линейни уравнения (Ч. I, гл. 2, § 5) пространството от решенията на системата (8) има размерност $n - k$, което доказва, че $\dim M^{\perp} = n - k$. От друга страна, $M \cap M^{\perp} = \{0\}$, защото в противен случай съществува ненулев вектор $l \in M$, който е ортогонален на всички вектори от M, което противоречи на предположението, че подпространството M е неособено. Следователно сумата на подпространства $M + M^{\perp}$ е директна, а тъй като $\dim M + \dim M^{\perp} = k + (n-k) = \dim L$, то $M \oplus M^{\perp} = L$, с което доказахме твърдението а).

б) От определението на ортогонално допълнение имаме включването $M \subset (M^{\perp})^{\perp}$. От друга страна, ако M и $M^{\perp}$ са неособени подпространства, то според доказаното в а) имаме

$$\dim (M^{\perp})^{\perp} = \dim L - \dim M^{\perp} = \dim M,$$

следователно $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

12. Теорема. *Нека L е ненулево крайномерно линейно пространство, в което е дефинирана симетрична билинейна или ермитова форма g. Тогава пространството може да се представи като директна сума на едномерни подпространства, които са две по две ортогонални, т. е.*

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n,$$

където $n = \dim L$.

Доказателство. Ако формата е нулевата, твърдението е очевидно: достатъчно е да изберем базис $e_1, \ldots, e_n$ на пространството и да означим с L_i едномерното подпространство, породено от вектора e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Нека формата е ненулева. Ще покажем първо, че съществува поне един вектор $l_1 \in L$, за който $g(l_1, l_1) \neq 0$. Да допуснем, че $g(l,l) = 0$ за всеки вектор $l \in L$. Ако формата е симетрична, имаме

$$0 = g(l+m, l+m) = g(l,l) + 2g(l,m) + g(m,m) = 2g(l,m)$$

за всеки два вектора $l, m \in L$, т. е. формата е нулевата, което е противоречие. В ермитовия случай имаме

$$\begin{aligned} 0 = g(l+m, l+m) &= g(l,l) + g(l,m) + g(m,l) + g(m,m) \\ &= g(l,m) + \overline{g(l,m)} = 2\operatorname{Re} g(l,m) \end{aligned}$$

за всеки два вектора. Следователно $g(l,m) = ia$, където a е реално число. Ако за някои два вектора $l, m \in L$ имаме $a \neq 0$, то

$$0 = \operatorname{Re}\, g((ia)^{-1} l, m) = \operatorname{Re}\,(ia)^{-1} g(l,m) = \operatorname{Re}\,(ia)^{-1}(ia) = 1.$$

Полученото противоречие показва, че $g(l,m)=0$ за всеки два вектора, което пък противоречи на допускането, че формата g не е нулевата.

Ще довършим доказателството с помощта на индукция по размерността n на пространството. При $n=1$ няма какво да се доказва. Нека $n>1$. Избираме ненулев вектор $l_1 \in L$, за който $g(l_1,l_1) \neq 0$ и означаваме с L_1 едномерното подпространство, което този вектор поражда. Върху подпространството L_1 формата е неособена и по твърдението в т. 11 имаме $L = L_1 \oplus L_1^{\perp}$. Подпространството $L_1^{\perp}$ има размерност $n-1$ и по индуктивното допускане то е директна сума на $n-1$ едномерни подпространства, които са две по две ортогонални, и това завършва доказателството.

13. Едномерни пространства със симетрична форма. а) Нека L е едномерно линейно пространство над полето $\mathbf{R}$ на реалните числа и нека в L е дефинирана симетрична билинейна форма g. Ако векторът e' е базис на пространството, нека $g(e',e')=a$. Ако $a=0$, то за всеки два вектора $l,m \in L, \quad l = x'e', \ m = y'e'$ имаме $g(l,m) = x'y'g(e',e') = x'y' \cdot 0 = 0$, т. е. формата е нулевата. Нека $a>0$ и $b = (\sqrt{a})^{-1}$. Векторът $e = be'$ е базис на L (избрахме нов базис) и сега за $l = xe$, $m = ye$ имаме $g(l,m) = g(xe, ye) =$ $= xyg(e,e) = xyg(be',be') = xyb^2 g(e',e') = xyb^2 a = xy$ В частност имаме $g(e,e) = 1 \cdot 1 = 1$. Ако $a<0$, нека $b = (\sqrt{-a})^{-1}$ и отново $e = be'$. Като повторим пресмятането, сега ще получим $g(l,m) = -xy$, защото в този случай $b^2 = -a^{-1}$. В частност $g(e,e) = -1 \cdot 1 = -1$. Матрицата на Грам на формата спрямо базиса e се състои от числото $g(e,e)$, следователно *за всяка симетрична билинейна форма в едномерно пространство над* $\mathbf{R}$ *винаги съществува базис, спрямо който матрицата на формата е една от следните*: $(\ 0\ )$, $(\ 1\ )$, $(\ -1\ )$, *или съответно чрез координатите формата има вида* 0, xy, $-xy$.

б) При същите предположения нека пространството L е над полето $\mathbf{C}$ на комплексните числа. Сега коренуването винаги е възможно и ако $g(e',e') = a \neq 0$, нека $b = (\sqrt{a})^{-1}$. За базиса $e = be'$ имаме $g(e,e) = 1$. Следователно *за всяка симетрична билинейна форма в едномерно пространство над* $\mathbf{C}$ *винаги съществува базис, спрямо който матрицата на формата е една от следните*: $(\ 0\ )$, $(\ 1\ )$, *или съответно чрез координатите:* 0, xy.

в) Нека накрая L е едномерно линейно пространство над произволно поле ℕ . И в този случай или формата е нулевата, или съществува вектор e' (той е базис), за който $g(e',e') = a \neq 0$. По-нататъшните опростявания съществено зависят от аритметичните свойства на полето, например от въпроси като следните: за кои елементи a от полето съществува елемент c *от същото поле*, за който $a = c^2$, или по-общо, за кои $a, d \in N$, $a \neq 0$, съществува такова $c \in N$, за което $a = dc^2$. За полето на реалните числа отговорът е прост: необходимо и достатъчно е a и d да са с еднакви знаци; при дадено a винаги можем да изберем или $d = 1$, или $d = -1$. За полето на комплексните числа отговорите звучат даже тривиално: *винаги*. В общия случай тези въпроси са деликатни проблеми на теорията на числата, която не е обект на тази книга.

14. Едномерни пространства с ермитова форма. Сега по условие имаме N =**C.** Ако формата не е нулевата, нека e' е базис на пространството L и $g(e',e') = a \neq 0$. Тъй като $g(e',e') = \overline{g(e',e')}$, то a е реално число. Ако $e = \lambda e'$, сега $g(e,e) = \lambda\bar{\lambda} g(e',e') = \lambda\bar{\lambda} a = |\lambda|^2 a$. При $a > 0$ винаги можем да изберем комплексно число , за което $|\lambda|^2 = a^{-1}$. Ако $a < 0$, избираме така, че $|\lambda|^2 = -a^{-1}$. В първия случай имаме $g(e,e) = 1$, а във втория $g(e,e) = -1$. Следователно *за всяка ермитова форма в едномерно пространство винаги съществува базис, спрямо който матрицата на формата е една от следните*: $(\ 0\ )$, $(\ 1\ )$, (-1), *или съответно чрез координатите формата има вида* 0, $x\bar{y}$, $-x\bar{y}$.

15. Едномерни и двумерни пространства със симплектична билинейна форма. Непосредствената ни цел е да докажем за симплектични форми аналог на теоремата от т. 12. Сега полето N е произволно. Тъй като $g(l,l) = -g(l,l)$, то за всеки вектор $l \in L$ имаме $g(l,l) = 0$. Ако пространството е едномерно и векторът e е базис, то $g(xe, ye) =$ $= xyg(e,e) = 0$, т. е. формата винаги е нулевата. Нека пространството е двумерно и симплектичната форма g не е нулевата. Тогава съществуват поне два вектора $l_1, l_2 \in L$, за които $g(l_1, l_2) = a \neq 0$. Ако означим $e_1 = a^{-1} l_1$, $e_2 = l_2$, ще имаме $g(e_1, e_2) = 1$, $g(e_2, e_1) = -1$. Векторите e_1, e_2 са ненулеви и линейно независими, защото ако $e_1 = \lambda e_2$, то

$g(e_1, e_2) = 1 = g(\lambda e_2, e_2) = \lambda g(e_2, e_2) = \lambda \cdot 0 = 0$. Спрямо базиса e_1, e_2 матрицата на формата е

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ако x_1, x_2 и y_1, y_2 са съответно координатите на векторите l, m спрямо избрания базис, то $g(l, m) = x_1 y_2 - x_2 y_1$. Формата очевидно е неособена, защото матрицата й е неособена. Следователно *в едномерно линейно пространство единствено нулевата форма е симплектична. В двумерно пространство всяка симплектична форма или е нулевата, или може да се избере базис* e_1, e_2 *както по-горе.*

16. Теорема. *Нека* L *е ненулево крайномерно линейно пространство* (*над числово поле*#N), *в което е дефинирана симплектична билинейна форма* g. *Тогава* L *може да се представи като директна сума на едномерни или двумерни подпространства, които са две по две ортогонални относно формата, т. е.*

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_k .$$

Върху едномерните подпространства формата е нулевата. Техният брой е равен на размерността на ядрото на формата. Върху всяко от двумерните подпространства в това разлагане (ако има такива) формата е неособена. Ако в L *е дефинирана неособена симплектична форма, то размерността на пространството е четно число.*

Няма да излагаме педантично доказателство, защото то почти буквално повтаря доказателството на теоремата от т. 12. Сега симплектичната форма е нулева върху всяко едномерно подпространство (няма неособени едномерни подпространства), но за ненулева форма в L току-що показахме всъщност, че винаги съществува поне едно неособено *двумерно* подпространство L_1 (вж. т. 15). Съгласно твърдението в т. 11 имаме разлагането $L = L_1 \oplus L_1^{\perp}$, а до исканото разлагане достигаме както по-горе с индукция по размерността на пространството L. Останалите твърдения следват непосредствено от определенията на съответните понятия.

17. Теоремите от т. 12 и от т. 16 в термините на матрици и координати. Навсякъде в тази точка ще предполагаме, че L е крайномерно линейно пространство над поле#N , а g е билинейна или почти билинейна форма, дефинирана в L. Нека $\dim L = n \geq 1$. Ще разгледаме няколко случая.

а) Нека формата е *симетрична* и $\mathbb{N}=\mathbf{R}$. Според теоремата от т. 12 можем да разложим пространството на директна сума от n едномерни подпространства L_i, $i=1,\dots,n$, които са две по две ортогонални. Във всяко от тях избираме базис e_i както в т. 13. Имаме $g(e_i,e_j)=0$ при $i\neq j$. Да означим с r_+ броя на базисните вектори e_i, за които $g(e_i,e_i)=1$ (ако има такива), с r_- - броя на векторите e_j, за които $g(e_j,e_j)=-1$, и накрая нека r_0 е броят на базисните вектори e_k, за които $g(e_k,e_k)=0$. Имаме $r_+ + r_- + r_0 = n$, въпреки че е възможно всяко от трите събираеми отляво да бъде равно на нула. В сумата на подпространства можем да разместваме събираемите, следователно можем така да номерираме базисните вектори, че да бъде изпълнено $g(e_i,e_i)=1$ за първите r_+ на брой базисни вектори, $g(e_j,e_j)=-1$ за следващите r_- на брой и $g(e_k,e_k)=0$ за последните базисни вектори. Разбира се $g(e_i,e_j)=0$ за всички $i\neq j$, защото едномерните подпространства са две по две оротогонални. При тази номерация матрицата на формата ще има клетъчния вид:

$$G=\begin{pmatrix} E_{r_+} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

където по главния диагонал стоят съответно единичната матрица от ред r_+, единичната матрица от ред r_-, умножена с –1, и нулевата матрица от ред r_0. Останалите нули означават нулеви матрици от съответен тип. Уславяме се , че ако някое от числата r_+, r_- и r_0 е равно на нула, то съответната клетка няма да участва в матрицата. Тази уговорка ще спазваме и по-долу. Иначе казано, имаме $G=\mathrm{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1,0,\dots,0)$, където броят на единиците, минус единиците и нулите е съответно r_+, r_-, и r_0.

Нека означим с L_+ сумата на онези едномерни подпространства L_i от директното разлагане на пространството, за които $g(e_i,e_i)=1$, аналогично L_- означава сумата на подпространствата, за които $g(e_j,e_j)=-1$; най-сетне L_0 е сумата на едномерните подпространства, за които $g(e_k,e_k)=0$.

Ясно е, че $L = L_+ \oplus L_- \oplus L_0$. Спрямо избрания базис ограничението на формата върху подпространството $L_+ \oplus L_-$ има матрица

$$\begin{pmatrix} E_{r_+} & 0 \\ 0 & E_{r_-} \end{pmatrix}.$$

Тя е неособена, следователно ограничението на формата върху подпространството $L_+ \oplus L_-$ е неособена форма (вж. т. 8). За размерностите имаме $\dim(L_+ \oplus L_-) = r_+ + r_- = r(G)$ – рангът на матрицата G, или все едно, рангът на формата. От твърдението в т. 9 знаем, че ядрото на формата има размерност, равна на $n - r(G) = n - (r_+ + r_-)$. По построение подпространството L_0 има размерност r_0, а тъй като $r_+ + r_- + r_0 = n$, подпространството L_0 има същата размерност, каквато има ядрото на формата. Ограничението на формата g върху подпространството L_0 е нулевата форма, следователно всеки вектор от L_0 е ортогонален на всеки вектор от пространството L, т. е. L_0 се съдържа в ядрото на формата. Тъй като размерността на L_0 е равна на размерността на ядрото, то L_0 е всъщност ядрото на формата g.

Ще забележим, че $g(l,l) > 0$ за всеки ненулев вектор $l \in L_+$, аналогично $g(l,l) < 0$ за всеки ненулев вектор $l \in L_-$ и $g(l,l) = 0$ в подпространството L_0. Наистина, нека например $l \in L_+$, $l \neq 0$. Спрямо избрания базис имаме $l = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_{r_+} e_{r_+}$. Тъй като $g(e_i, e_i) = 1$ и $g(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$, $\ ,i, j = 1, \ldots, r_+$, имаме

$$g(l,l) = g(\sum_i x_i e_i, \sum_j x_j e_j) = \sum_{i=1}^{r_+} x_i^2 g(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{r_+} x_i^2 .$$

Сумата в най-дясната страна е положително число, защото реалните числа x_i не са едновременно равни на нула. Останалите две твърдения се доказват аналогично. Обикновено се казва накратко, че в подпространството L_+ формата е *положително определена* (аналогично: *отрицателно определена* в L_-). В литературата на български език е разпространена и терминологията “*положително дефинитна*” и “*отрицателно дефинитна*”.

б) Нека формата отново е симетрична, но полето N е произволно. Може да се повторят разсъжденията от т. а), но сега за всички базисни вектори e_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, ще имаме $g(e_i, e_i) = a_i$, където a_i е някакъв елемент от полето N, а $g(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. Матрицата на формата спрямо този базис ще бъде диагонална и при подходяща номерация на базисните вектори ще има вида $G = \mathrm{diag}\,(a_1, \ldots, a_r, 0, \ldots, 0)$, където r е рангът на формата и елементите $a_1, \ldots, a_r$ са различни от нула; броят на нулите по диагонала е равен на $n - r$. Ако $N = \mathbf{C}$, можем да предполагаме, че $a_1 = \ldots = a_r = 1$ (вж. т. 13).

в) При същите означения от а) нека формата е *ермитова*, а $N = \mathbf{C}$. Като използваме резултата от т. 14 и повторим разсъжденията от а), ще стигнем до извода, че съществува базис от два по два ортогонални вектори, спрямо който матрицата на формата има вида (9). Сумата $r_+ + r_-$ е рангът на формата, а r_0 е размерността на нейното ядро. Ако както в а) въведем подпространствата L_+, L_-, L_0, ще имаме $L = L_+ \oplus L_- \oplus L_0$. И в този случай може да се докаже, че в L_+ формата е положително определена (съотв. отрицателно определена в L_-). Сега координатите са комплексни числа и аналогично на а) за вектор $l \in L_+$ ще стигнем до

$$g(l, l) = \sum_{i=1}^{r_+} x_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{r_+} |x_i|^2 .$$

г) Нека формата g е симплектична, а полето N е произволно. Като използваме теоремата от т. 16, можем да разложим пространството L на директна сума от двумерни неособени и едномерни подпространства, които са две по две ортогонални, т. е.

$$L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_r \oplus L_{r+1} \oplus \ldots \oplus L_{n-2r} .$$

Ще считаме, че в това разлагане подпространствата $L_1, \ldots, L_r$ са двумерни неособени, а останалите са едномерни. Като използваме разлагането и резултата от т. 15, ще изберем базис на пространството (т. нар. *симплектичен базис*): $e_1, e_2, \ldots, e_r; e_{r+1}, \ldots, e_{2r}; e_{2r+1}, \ldots, e_n$; номерацията предполага , че векторите e_i, e_{r+i} са базис на подпространството L_i при $1 \leq i \leq r$, а e_{2r+i} е базис на подпространството L_{r+i}. В едномерните и двумерните подпространства базисът е избран както в т. 13, а подпространствата са две по две ортогонални, ето защо

$$g(e_i, e_{r+i}) = -g(e_{r+i}, e_i) = 1, \quad 1 \le i \le r,$$

и $g(e_i, e_j) = 0$ във всички останали случаи. Матрицата на формата спрямо така избрания базис има клетъчния вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 \\ -E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

където E_r е единичната матрица от ред *r,* символът 0 означава нулева матрица от съответен тип: например, първите два символа по главния диагонал означават последователно нулеви матрици от тип $r \times r$, а третият – нулевата матрица от тип $(n-2r)\times(n-2r)$. Ако векторите $l, m \in L$ имат спрямо избрания базис координати съответно $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_n$, то с използване на равенството (4) непосредствено се вижда, че

$$g(l,m) = \sum_{i=1}^{r} (x_i y_{r+i} - x_{r+i} y_i). \tag{11}$$

18. Твърдение. а) *Нека A е реална симетрична* (съотв. *комплексна ермитова*) *матрица от ред n. Тогава съществува неособена реална матрица T* (съотв. *неособена комплексна матрица T), за която матрицата $T^t AT$ има вида*

$$T^t AT = \begin{pmatrix} E_{r_+} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1,0,\dots,0)$$

в симетричния случай и съответно

$$T^t A\overline{T} = \begin{pmatrix} E_{r_+} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1,\dots,1,-1,\dots,-1,0,\dots,0),$$

ако матрицата A е ермитова (вж. уговорките в т.17, а)). *Общият брой на единиците и минус единиците по диагонала е равен на ранга на матрицата A.*

б) *Нека A е антисиметрична* (*симплектична*) *матрица с елементи от произволно поле N. Тогава съществува неособена матрица T с елементи от същото поле, за която*

$$T^t AT = \begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 \\ -E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Числото $2r$ е равно на ранга на матрицата A.

Доказателство. Нека L е линейно пространство с размерност n над поле N. Избираме базис в L (да го наречем стар базис). В пространството дефинираме билинейна или почти билинейна форма g така, че матрицата й спрямо избрания базис да бъде дадената матрица A. Това винаги може да се направи, като за дефиниция се използва някое от равенствата (4) или (5).

Нека, например, матрицата A е реална симетрична ($N = \mathbf{R}$). Тогава съгласно твърдението в т. 6 формата g е симетрична. От резултата в т. 17, а) знаем, че може да се избере (нов) базис, спрямо който матрицата на формата има именно вида, за който става дума в а). Нека T е матрицата на прехода от стария към новия базис. Както знаем, тя е неособена и елементите й са от разглежданото поле. От друга страна, от доказаното в т. 4 е известно, че матрицата на формата спрямо новия базис е $T^t AT$. Тъй като матрицата T е неособена, матриците A и $T^t AT$ имат равни рангове, а рангът на $T^t AT$ очевидно е равен на броя на ненулевите елементи по главния диагонал. Ако матрицата A е ермитова или симплектична, разсъжденията са аналогични и ги пропускаме.

19. Теорема (закон за инерцията). *Нека L е ненулево крайномерно линейно пространство над поле N, където $N = \mathbf{R}$, или $N = \mathbf{C}$. Ако $N = \mathbf{R}$, нека g е симетрична билинейна форма, дефинирана в L, а ако $N = \mathbf{C}$, нека g е ермитова форма. Нека пространството е представено като директна сума на едномерни подпространства, които са две по две ортогонални относно формата g. Тогава броят r_+* (съотв. r_-) *на едномерните подпространства, в които формата е положително определена* (съотв. *отрицателно определена*), *зависи само от формата, т.е. във всяко друго такова разлагане на пространството като директна сума този брой е същият.*

Доказателство. Ще използваме означенията от т. 17, а) и в) и ще предполагаме, че формата не е нулева, защото за нулевата няма какво да се доказва. Като обединим съответните едномерни подпространства, нека както в т. 17

$$L = L_+ \oplus L_- \oplus L_0 , \qquad L = L'_+ \oplus L'_- \oplus L'_0$$

са две разлагания на пространството. Нека подпространствата L'_+, L'_- и L'_0 имат размерности съответно r'_+, r'_- и r'_0, като ще подразбираме, че във всяко от тях формата е съответно положително определена, отрицателно определена и нулева. В т. 17 видяхме, че L_0 е ядрото на формата, следователно L'_0 също е ядрото, т. е. $L'_0 = L_0$ и $r_0 = r'_0$. Оттук следва, че $r_+ + r_- = r'_+ + r'_-$, защото $\dim L = r_+ + r_- + r_0 = r'_+ + r'_- + r'_0$. Вече е ясно, че ако докажем равенството $r_+ = r'_+$, то от него автоматично ще следва и $r_- = r'_-$.

Да допуснем, че $\dim L_+ = r_+ > \dim L'_+ = r'_+$ и да разгледаме проекцията $p : L \to L'_+$ (ако $l \in L$ и $l = l'_+ + l'_- + l'_0$, където трите събираеми отдясно са съответно от подпространствата L'_+, L'_- и L'_0, то $p(l) = l'_+$). Проекцията p очевидно е линейно изображение. Да разгледаме ограничението на проекцията върху подпространството L_+, т. е. разглеждаме линейното изображение $p : L_+ \to L'_+$. То не може да бъде инективно, защото в противен случай L_+ ще е изоморфно на подпространство на L'_+, а това е невъзможно, тъй като по предположение $\dim L_+ > \dim L'_+$. Следователно съществува ненулев вектор $l_+ \in L_+$, за който $p(l_+) = 0$, т. е. $l_+ = l'_- + l'_0$. Като използваме, че всеки вектор от подпространството L'_- е ортогонален на всеки вектор от подпространството L'_0 и факта, че в L'_0 формата е нулева, получаваме

$$g(l_+, l_+) = g(l'_- + l'_0, l'_- + l'_0) = g(l'_-, l'_-) + g(l'_-, l'_0) + g(l'_0, l'_-) + g(l'_0, l'_0) =$$
$$= g(l'_-, l'_-) \le 0 .$$

Последното неравенство е следствие от факта, че в подпространството L'_- формата е отрицателно определена. От друга страна, $g(l_+, l_+) > 0$, защото в подпространството L_+ формата е положително определена и $l_+ \ne 0$. Полученото противоречие $0 < g(l_+, l_+) = g(l'_-, l'_-) \le 0$ доказва, че $r_+ \le r'_+$. Ако допуснем, че неравенството е строго, с аналогично разсъждение отново ще стигнем до противоречие. Следователно налице е равенство и теоремата е доказана.

Ще подчертаем, че ако в крайномерно линейно пространство е дадено обобщено скаларно произведение g, разлагането на пространството като директна сума на две по две ортогонални едномерни подпространства е еквивалентно на намирането на базис, спрямо който матрицата на формата е диагонална. Наистина, ако $e_1,\dots,e_n$ е базис, спрямо който матрицата G= $=(g(e_i,e_j))$ е диагонална, то $g(e_i,e_j)=0$ при $i\neq j$. Ако означим с L_i едномерното подпространство, породено от вектора e_i, имаме разлагане

$$L = L_1 \oplus L_2 \oplus \dots \oplus L_n$$

с посочените свойства. Обратно, ако имаме такова разлагане, във всяко от подпространствата L_i избираме ненулев вектор e_i и получаваме базис на цялото пространство $(i=1,\dots,n)$. За него имаме $g(e_i,e_j)=0$ при $i\neq j$, защото подпространствата са ортогонални помежду си и следователно матрицата на формата е диагонална. Тъй като по диагонала стоят елементите $g(e_i,e_i)$, можем да формулираме закона за инерцията и по следния начин.

Нека L е ненулево крайномерно линейно пространство над поле N, където#N = **R** *или N =* **C**. *Ако N =* **R,** *нека g е симетрична билинейна форма, дефинирана в L, а ако N =* **C**, *нека g е ермитова форма. Нека спрямо някакъв базис матрицата на формата е диагонална и r_+* (съотв. *r_-) е броят на положителните* (съотв. *на отрицателните*) *елементи по главния диагонал на матрицата. Числата r_+ и r_- зависят от формата, но не зависят от базиса,* т. е. *за всеки друг базис, спрямо който матрицата на формата е диагонална, съответните числа също ще бъдат r_+ и r_-.*

Наредената тройка числа (r_0, r_+, r_-) се нарича *сигнатура* на формата, а r_+ *и* r_- се наричат съответно *положителен индекс на инерцията* и *отрицателен индекс на инерцията*. Смисълът на закона за инерцията е, че положителният и отрицателният индекс на инерцията са инварианти на формата, т. е. те зависят само от формата, а не от помощни неща като базиси и координати. Числото r_0 е равно на размерността на ядрото на формата.

20. Алгоритъм на Грам – Шмидт за ортогонализиране. Нека L е ненулево крайномерно линейно пространство, а g е или симетрична билинейна, или ермитова форма, дефинирана в L. Нека $v_1,v_2,\dots,v_n$ е базис на пространството и нека за всяко $i=1,2,\dots,n$ да означим с L_i подпространството, породено от векторите $v_1, v_2, \ldots, v_i$. Ще предположим допълнително, че *ограничението на формата g върху всяко от подпространствата L_i е неособена форма.* Ще изложим алгоритъм, наречен в чест на Грам и Шмидт, за построяване на базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, удовлетворяващ следните две условия: а*) векторите $e_1, e_2, \ldots, e_n$ са два по два ортогонални (ортогонален базис*) *относно формата*; б) *за всяко $i = 1,2,\ldots,n$ векторите $e_1, e_2, \ldots, e_i$ са базис на подпространството L_i*. Процедурите са следните.

Нека $e_1 = v_1$. Вектора e_2 ще търсим във вида

$$e_2 = v_2 - \lambda e_1 .$$

Искаме векторите e_1 и e_2 да бъдат ортогонални, т. е. $g(e_1, e_2) = 0$. Следователно $g(e_1, e_2) = 0 = g(e_1, v_2) - \lambda g(e_1, e_1)$. По условие формата е неособена върху едномерното подпространство L_1, следователно $g(e_1, e_1) \neq 0$ и за λ получаваме

$$\lambda = \frac{g(e_1, v_2)}{g(e_1, e_1)};$$

исканото условие за ортогоналност ще бъде удовлетворено при намерената стойност на λ. Векторите e_1, e_2 са линейно независими: ако $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = 0$, то $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 (v_2 - \lambda v_1) = (\alpha_1 - \alpha_2 \lambda) v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, защото векторите v_1, v_2 са линейно независими. Векторите e_1, e_2 очевидно принадлежат на двумерното подпространство L_2 и са негов базис. Ще отбележим, че $g(e_2, e_2) \neq 0$ - в противен случай от равенствата $g(e_2, e_2) = 0$ и $g(e_1, e_2) = 0$ следва, че ненулевият вектор e_2 е ортогонален на всеки вектор $x_1 e_1 + x_2 e_2 \in L_2$, а това противоречи на условието, че формата g е неособена в подпространството L_2.

Да допуснем, че вече сме конструирали векторите $e_1, e_2, \ldots, e_i$, където $1 \leq i < n$. Предполагаме, че те са ортогонален базис на подпространството L_i и $g(e_k, e_k) \neq 0$ за всяко $k = 1,2,\ldots,i$. Търсим вектор e_{i+1} от вида

$$e_{i+1} = v_{i+1} - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \ldots - \lambda_i e_i .$$

Тъй като векторите $e_1, e_2, \ldots, e_i$ по построение са два по два ортогонални, достатъчно е да определим коефициентите $\lambda_1, \ldots, \lambda_i$ така, че векторът e_{i+1}

да бъде ортогонален на всеки от векторите $e_1, e_2, \ldots, e_i$, т. е. трябва да решим системата $g(e_1, e_{i+1}) = 0, \quad g(e_2, e_{i+1}) = 0, \ldots, g(e_i, e_{i+1}) = 0$. Като използваме, че векторите $e_1, e_2, \ldots, e_i$ са два по два ортогонални, всяко от тези уравнения се записва съответно

$$g(e_1, v_{i+1}) - \lambda_1 g(e_1, e_1) = 0,$$

$$g(e_2, v_{i+1}) - \lambda_2 g(e_2, e_2) = 0, \ldots, g(e_i, v_{i+1}) - \lambda_i g(e_i, e_i) = 0$$

и очевидно

$$\lambda_1 = \frac{g(e_1, v_{i+1})}{g(e_1, e_1)}, \quad \lambda_2 = \frac{g(e_2, v_{i+1})}{g(e_2, e_2)}, \ldots, \lambda_i = \frac{g(e_i, v_{i+1})}{g(e_i, e_i)}.$$

Векторите $e_1, e_2, \ldots, e_i$ са линейни комбинации на векторите $v_1, v_2, \ldots, v_i$, които са базис на подпространството L_i. Векторът e_{i+1} очевидно е в подпространството L_{i+1} (той е линейна комбинация на $v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}$), но не принадлежи на подпространството L_i, защото не е линейна комбинация на векторите $v_1, v_2, \ldots, v_i$. Следователно $e_1, \ldots, e_i, e_{i+1}$ пораждат L_{i+1} и са негов базис, защото броят им $i+1$ е равен на $\dim L_{i+1}$.

Ще забележим, че при горната конструкция на новия базис $e_1, \ldots, e_n$ са в сила равенства от вида:

$$\begin{aligned}
&e_1 = v_1 \\
&e_2 = v_2 + \alpha_{12} v_1 \\
&\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\
&e_n = v_n + \alpha_{1n} v_1 + \alpha_{2n} v_2 + \ldots + \alpha_{n-1\,n} v_{n-1},
\end{aligned}$$

следователно матрицата T на прехода от стария базис $v_1, v_2, \ldots, v_n$ към новия има вида

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & 1 & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

§ 2. Квадратични форми

Всички линейни пространства, разглеждани в този параграф, се предполагат крайномерни.

1. Определение. Нека L е крайномерно линейно пространство над (числово) поле N 1Ще казваме, че изображението (функцията) $f: L \to N$ е *квадратична форма, дефинирана в* L, ако съществува билинейна форма g, дефинирана в L, за която

$$f(l) = g(l,l)$$

за всеки вектор $l \in L$.

Ще покажем, че за всяка квадратична форма f съществува единствена *симетрична* билинейна форма h, за която $f(l) = h(l,l)$. Наистина, нека

$$h(l,m) = \frac{1}{2}[g(l,m) + g(m,l)].$$

Очевидно е, че $h(l,m) = h(m,l)$ за всеки два вектора $m, l \in L$. Непосредствено се проверява, че сума на билинейни форми е билинейна форма и произведение на билинейна форма с число също е билинейна форма. Следователно h е симетрична билинейна форма и очевидно

$$h(l,l) = \frac{1}{2}[g(l,l) + g(l,l)] = g(l,l) = f(l).$$

За да докажем единствеността, нека предположим, че g_1 и g_2 са две симетрични билинейни форми, за които $f(l) = g_1(l,l) = g_2(l,l)$. Тогава разликата $g = g_1 - g_2$ също е симетрична билинейна форма, за която $g(l,l) = 0$ за всеки вектор $l \in L$. В доказателството на теоремата от т. 12, § 1 видяхме, че от това следва $g(l,m) = 0$ за всеки два вектора, т. е. g е нулевата форма и $g_1 = g_2$.

Единствената *симетрична* билинейна форма h, за която $f(l) = h(l,l)$, ще наричаме *поляризация* на квадратичната форма f. Тъй като $f(l+m) =$

$= h(l+m, l+m) = h(l,l) + 2h(l,m) + h(m,m) = f(l) + 2h(l,m) + f(m)$, то

$$h(l,m) = \frac{1}{2}[f(l+m) - f(l) - f(m)].$$

Установената връзка между квадратичните и симетричните билинейни форми дава възможност да преформулираме редица резултати, доказани в § 1 за симетрични билинейни форми, като твърдения за квадратични форми.

Например, да изберем базис на пространството L и нека $A=(a_{ij})$ е матрицата на поляризацията h спрямо избрания базис, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ са координатите на вектора l. Ще подчертаем, че матрицата A е симетрична, защото билинейната форма h е симетрична. Като използваме равенствата (4) от § 1, получаваме

(1) $$f(l)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j = X^tAX\ ,\quad a_{ij}=a_{ji}\in N\ /$$

където първото равенство е само уговорка за традиционно означение.

Множина автори с оглед на конкретни цели излагат теорията на квадратичните форми независимо от теорията на билинейните форми. При такъв подход се използва и специфична терминология, за която ще споменем. За определение използват равенството (1): квадратична форма на *променливите* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с коефициенти от полето N наричат израза

(2) $$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ ,$$

където $a_{ij}=a_{ji}\in N$ 1Симетричната матрица $A=(a_{ij})$ наричат *матрица на квадратичната форма*. Всъщност тя е матрицата на съответната симетрична билинейна форма (поляризацията на f).

По-общо, нека $B=(b_{ij})$ е произволна квадратна матрица. Изразът

$$f(x_1,\ldots,x_n)=X^tBX=\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j$$

е квадратична форма. Нека $a_{ij}=(b_{ij}+b_{ji})/2$ за всички $i,j=1,\ldots,n$. Сега матрицата $A=(a_{ij})=\dfrac{1}{2}(B+B^t)$ очевидно е симетрична и

$$X^tAX=\frac{1}{2}X^t(B+B^t)X=\frac{1}{2}\Big[X^tBX+X^tB^tX\Big]=X^tBX=f(x,\ldots,x_n),$$

защото $X^tB^tX=X^tBX$ (матрица от тип 1×1).

П р и м е р. Изразът $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=3x_1^2+2x_1x_2+x_3^2-4x_1x_3+6x_1x_4$ също е квадратична форма, но матрицата й е

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

За да опростят (в някакъв смисъл) израза (2), обикновено правят *линейна смяна на променливите* :

(3) $$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \ldots + \alpha_{1n}y_n \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \ldots + \alpha_{2n}y_n \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n &= \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \ldots + \alpha_{nn}y_n \ . \end{aligned}$$

Ако *матрицата на смяната* $T = (\alpha_{ij})$ е неособена, казват, че смяната на променливите е *неособена*. (У нас често наричат смяната (3) линейна *трансформация* или линейно *пребразувание* на променливите.) В равенствата (1) $x_1, \ldots, x_n$ се интерпретират като координати на вектор. Ако сменим базиса и $y_1, \ldots, y_n$ са координатите на същия вектор спрямо новия базис, а T е матрицата на прехода от стария към новия базис, то връзката между старите и новите координати се дава с равенствата (3). Матрицата T винаги е неособена, следователно дали ще правим неособена смяна на променливите, или ще сменяме базиси и координати, е едно и също. Ако X и Y са матриците–стълбове, образувани съответно от старите и новите координати, равенствата (3) се записват като едно матрично равенство: $X = TY$. От твърдението в § 1, т. 4 веднага следва:

2. Твърдение. *Ако сменим координатите по формулата* $X = TY$ (*направим линейната смяна на променливите* (3)), *матрицата* A *на квадратичната форма се сменя с матрицата* $T^t AT$.

Ако матрицата на една квадратична форма е диагонална, т. е. ако

(4) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2,$$

казва се, че формата е в *каноничен вид*. Ако за поляризацията на произволна квадратична форма приложим теоремата от § 1, т. 12 и резултатите за симетрични форми от т. 17, веднага получаваме следната

3. Теорема. *Ако* f *е квадратична форма, дефинирана в линейно пространство L, то съществува базис на пространството, спрямо който* *формата е в каноничен вид.* Еквивалентно: *съществува неособена линейна смяна на променливите, с помощта на която формата може да се приведе в каноничен вид. Ако квадратичната форма е реална* (N =**R**), *може да се предполага, че коефициентите* a_{ii} *в каноничния вид* (4) *са равни на* ± 1 *или* 0. *Ако формата е комплексна* (N =**C**) , *може да се предполага, че всеки от коефициентите* a_{ii} *е равен на* 1 *или* 0.

4. Алгоритъм за привеждане на квадратична форма в каноничен вид. Разглеждаме формата (2). Ако тя е нулева, т. е. всички коефициенти a_{ij} са равни на нула, имаме $f(x_1,\dots,x_n)=0\cdot x_1^2+0\cdot x_2^2+\dots+0\cdot x_n^2$ и формата е в каноничен вид. По-нататък ще предполагаме, че квадратичната форма не е нулева и ще разгледаме поотделно два случая.

а) Нека поне един от коефициентите a_{ii}, $i=1,\dots,n,$ е различен от нула, например $a_{11}\neq 0$. Всички събираеми в дясната страна на (2), които съдържат x_1 , са:

$$a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\dots+2a_{1n}x_1x_n=a_{11}x_1^2+2\sum_{i=2}^{n}a_{1i}x_1x_i \tag{5}$$

(използвахме, че $a_{ij}=a_{ji}$). От друга страна,

$$a_{11}^{-1}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n)^2=a_{11}x_1^2+2\sum_{i=2}^{n}a_{1i}x_1x_i+S\,, \tag{6}$$

където S означава сума от събираеми, които не съдържат x_1 . От равенствата (5) и (6) следва, че разликата

$$f(x_1,\dots,x_n)-a_{11}^{-1}(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n)^2=f_1(x_2,\dots,x_n)$$

(най-дясното равенство е само означение) е квадратична форма на променливите $x_2,\dots,x_n$. Да направим смяната:

$$y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n\,,\ \ y_2=x_2,\dots,y_n=x_n\,.$$

Тя е неособена, защотото матрицата й

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

е неособена (по условие $a_{11} \neq 0$). При тази процедура, да я наречем “отделяне на точен квадрат”, получаваме

$$f(x_1,\dots,x_n) = a_{11}^{-1} y_1^2 + f_1(y_2,\dots,y_n) .$$

Естествената следваща стъпка на алгоритъма е да отделим точен квадрат от формата f_1. Може да се окаже обаче, че във формата f (или в f_1) коефициентите пред квадратите на променливите са равни на нула. Ще покажем как може да се преодолее това препятствие.

б) Нека всички “диагонални коефициенти” a_{ii}, $i = 1,\dots,n$, са равни на нула. Тъй като някой от останалите коефициенти е различен от нула, след смяна на номерацията на променливите можем да предполагаме, че $a_{12} \neq 0$.

При $n = 2$ формата има вида $f = 2a_{12}x_1x_2$, а при $n > 2$ имаме

$$f(x_1,\dots,x_n) = 2a_{12}x_1x_2 + 2x_1(a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n) + 2x_2(a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n) + \\ + f_2(x_3,\dots,x_n),$$

където $f_2(x_3,\dots,x_n)$ е квадратична форма на променливите $x_3,\dots,x_n$. Да направим смяната:

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2, \quad x_i = y_i, \quad i \geq 3 .$$

Тя е неособена, защото за детерминантата на матрицата ѝ имаме

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 .$$

Лесно е да се съобрази, че след смяната на променливите формата ще има вида

$$f = 2a_{12}(y_1^2 - y_2^2) + f_3(y_1, y_2,\dots,y_n),$$

където квадратичната форма f_3 не съдържа събираеми с y_1^2 и y_2^2. Следователно за така преобразуваната форма f може да се приложи процедурата от а) – отделяне на точен квадрат, което води до разглеждане на форма на по-малък брой променливи.

Ясно е, че ако приложим краен брой пъти процедурите, описани в а) и б), ще стигнем до каноничен вид на формата. Всички междинни линейни смени на променливите са неособени. Композицията им също е неособена смяна, което още веднъж доказва (конструктивно, с алгоритъм) първата част на теоремата от т. 3.

5. Теорема (закон за инерцията на реалните квадратични форми). *Нека реалната квадратична форма* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *е приведена в каноничен вид с помощта на неособена линейна смяна на променливите*:

$$f = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_n y_n^2 .$$

Броят r_+ *на положителните коефициенти* c_i, съответно r_- *на отрицателните, в каноничния вид не зависи от неособеното линейно преобразуване, с което формата е приведена в каноничен вид.*

Теоремата е непосредствено следствие от твърдението за реални симетрични билинейни форми, формулирано в края на т. 19, § 1. Достатъчно е да забележим, че матрицата на квадратичната форма (тя по определение е симетрична) е матрица и на поляризацията ѝ (съответната ѝ симетрична билинейна форма). Във формулировката на теоремата матрицата на приведената в каноничен вид квадратична форма е diag($c_1, c_2, \ldots, c_n$).

Нека $r_0 = n - r_+ - r_-$ е броят на коефициентите в каноничния вид на квадратичната форма, които са равни на нула. Наредената тройка (r_0, r_+, r_-) се нарича *сигнатура* на квадратичната форма, а числата r_+ и r_- се наричат съответно *положителен* и *отрицателен индекс на инерцията* на формата.

6. Определение. Ще казваме, че реалната квадратична форма f *е положително определена* (*положително дефинитна*), ако $f(l) > 0$ за всеки ненулев вектор l. Еквивалентно: ако $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) > 0$ за всяка наредена *n*-орка $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ от реални числа, които не са едновременно равни на нула.

7. Твърдение. *Реалната квадратична форма f в n-мерно пространство* (*форма на n променливи*) *е положително определена тогава и само тогава, когато има каноничен вид* $f = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_n y_n^2$, *където* $c_i > 0$ *за всички* $i = 1, 2, \ldots, n$, *т. е. когато положителният индекс на инерцията* r_+ *е равен на n.*

Доказателство. Нека квадратичната форма е дефинирана в n-мерно линейно пространство L и $f(l) = h(l,l)$, където h е съответната симетрична билинейна форма. Да разложим пространството както в § 1, т. 17, а): $L = L_+ \oplus L_- \oplus L_0$. Пак там видяхме, че $f(l) = h(l,l) < 0$ за всеки ненулев вектор $l \in L_-$ и $f(l) = h(l,l) = 0$ за всеки вектор $l \in L_0$, а в подпространството L_+ билинейната форма h (все едно квадратичната форма f) е положително определена. Следователно квадратичната форма е положително определена тогава и само тогава, когато подпространствата L_- и L_0 са нулевото подпространство, т. е. когато $L = L_+$. В § 1, т. 19 видяхме, че ако матрицата на билинейната форма h е диагонална (тя е матрица и на квадратичната форма), то броят r_+ на положителните коефициенти по главния диагонал (броят на положителните коефициенти c_i в разглеждания каноничен вид) е равен на $\dim L_+$. Следователно формата е положително определена точно тогава, когато $r_+ = \dim L_+ = \dim L = n$, което доказва твърдението.

Ако реалната квадратична форма е зададена в "общ вид"

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

желателно е да се намери необходимо и достатъчно условие тя да е положително определена, без да се налага привеждането й в каноничен вид. Първо ще докажем един по-общ резултат. Нека от матрицата $A = (a_{ij})$ образуваме матрици и детерминанти по следното правило:

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & \ldots & a_{ii} \end{pmatrix}, \quad \Delta_i = \det(A_i), \quad i = 1,2,\ldots,n.$$

Детерминантите Δ_i, $i = 1,2,\ldots,n$, са всъщност минори: Δ_i е минорът, образуван от първите i реда и първите i стълба на матрицата A. Наричат ги *главни минори* на матрицата.

8. Теорема на Якоби. *Нека в реално линейно пространство L е зададена квадратична форма f и нека $A = (a_{ij})$ е матрицата на формата спрямо някакъв базис $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тогава, ако всички главни минори $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ на матрицата A са различни от нула, то съществува базис*

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ на пространството, спрямо който квадратичната форма има вида

$$f = \Delta_1 y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} y_n^2 .$$

Положителният индекс на инерцията на квадратичната форма е равен на броя на положителните членове на редицата $\Delta_1, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$.

Доказателство. Нека h е поляризацията на квадратичната форма f. Ще забележим, че за билинейната форма h и за базиса $v_1, v_2, \ldots, v_n$ може да се приложи алгоритъмът на Грам – Шмидт за ортогонализация (вж. § 1, т. 20). Наистина, нека L_i е подпространството с базис $v_1, \ldots, v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ограничението на билинейната форма h върху подпространството L_i има матрица A_i, а по условие нейната детерминанта (минорът) Δ_i е различна от нула, т.е. формата h е неособена върху подпространството. Нека $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е ортогонализацията на базиса $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Спрямо новия базис матрицата на билинейната форма h ще бъде диагонална и нека тя е $C = \operatorname{diag}(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Квадратичната форма ще има вида

$$f = c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \ldots + c_n y_n^2 ,$$

а ограничението на билинейната форма върху подпространството L_i спрямо базиса $e_1, \ldots, e_i$ ще има матрица $C_i = \operatorname{diag}(c_1, \ldots, c_i)$. Ако се върнем към текста на § 1, т. 20 (алгоритъма на Грам – Шмидт), ще забележим, че матрицата T_i на прехода от базиса $v_1, \ldots, v_i$ на подпространството L_i към базиса $e_1, \ldots, e_i$ на същото подпространство има вида

$$T_i = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{12} & & \alpha_{1i} \\ 0 & 1 & \ldots & \alpha_{2i} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Според правилото за смяна на матрицата на билинейна (квадратична) форма при смяна на базиса имаме $C_i = T_i^t A_i T_i$. Тъй като детерминантата на матрицата T_i е равна на единица, от матричното равенство получаваме

$$\det C_i = c_1 c_2 \dots c_i = 1 \cdot \Delta_i \cdot 1 = \Delta_i\,, \quad i = 1,2,\dots,n\,.$$

Следователно $c_1 = \Delta_1$ и $c_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}$ при $i > 1$. Последната част от теоремата е всъщност напомняне на определението на положителен индекс на инерцията, но тук получаваме възможност за неговото пресмятане.

9. Критерий на Силвестър. *Реалната квадратична форма f в ненулево линейно пространство L е положително определена тогава и само тогава, когато главните минори на матрицата й спрямо всеки базис на пространството са положителни числа.*

Доказателство. Ако всички главни минори на матрицата на квадратичната форма спрямо някакъв базис са положителни, то по теоремата на Якоби формата има каноничен вид, в който всички коефициенти пред квадратите на променливите са положителни, и според твърдението в т. 7 формата е положително определена.

Нека квадратичната форма е положително определена и $A = (a_{i\,j})$ е матрицата й спрямо произволно избран базис $v_1, v_2, \dots, v_n$ на пространството. Запазваме означенията от доказателството на теоремата на Якоби. Първо ще покажем, че главните минори на матрицата A са различни от нула. Нека h е поляризацията на квадратичната форма f. Билинейната форма h е неособена върху всяко от подпространствата L_i, защото, ако за ненулевия вектор $l \in L_i$ имаме $h(l,m) = 0$ за всеки вектор $m \in L_i$, то в частност $0 = h(l,l) = f(l) > 0$, тъй като квадратичната форма f е положително определена. Спрямо базиса $v_1, \dots, v_i$ на подпространството L_i ограничението на билинейната форма h има матрица A_i (вж. абзаца преди т. 8). Тя е неособена, защото е матрица на неособена билинейна форма, т.е. $\Delta_i \neq 0$ за всяко $i = 1,2,\dots,n$. Тъй като всички главни минори на матрицата A се оказаха различни от нула, можем да приложим теоремата на Якоби: привеждаме формата в каноничния вид, посочен в теоремата. Тъй като по условие квадратичната форма е положително определена, то всички коефициенти в този каноничен вид са положителни, т.е. всички главни минори $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ са положителни, което завършва доказателството.

Глава 2

Евклидови и унитарни пространства

§ 1. Евклидови пространства

Абстрактните линейни пространства добре моделират свойствата на афинните операции със свободни вектори: събиране на вектори и умножаване на вектори с числа. С помощта само на тези операции в абстрактните пространства не е възможно да се въведат понятия като дължина на вектор и ъгъл между два вектора, които са твърде важни в геометрията. Целта на параграфа е да запълни тази празнина. Ще отбележим, че в пространството на свободните вектори споменатите понятия са въведени предварително (отделно) и с тяхна помощ въведохме скаларното произведение на свободни вектори (I, гл. 5, § 4). Там видяхме, че е възможно и обратното, т.е. дължините на векторите и ъглите между тях да се изразят чрез скаларното произведение. Интуитивно е ясно, че бихме могли да решим нашата задача, ако в произволно реално линейно пространство въведем аксиоматично "скаларно произведение" като аксиоматизираме основните свойства на познатото вече скаларно произведение на свободни вектори.

1. Определение. Нека L е линейно пространство над полето $\mathbf{R}$ на реалните числа. Ще казваме, че в пространството е въведено *скаларно произведение,* ако на всяка наредена двойка вектори $l, m \in L$ е съпоставено реално число $\langle l, m\rangle$ и са изпълнени следните условия (аксиоми на скаларното произведение):

1) $\langle l, m\rangle = \langle m, l\rangle$ за всеки два вектора $l, m \in L$;
2) $\langle l_1 + l_2, m\rangle = \langle l_1, m\rangle + \langle l_2, m\rangle$ за всеки три вектора $l_1, l_2, m \in L$;
3) $\langle \lambda l, m\rangle = \lambda\langle l, m\rangle$ за всеки два вектора $l, m \in L$ и за всеки скалар $\lambda \in \mathbf{R}$;
4) $\langle l, l\rangle > 0$ за всеки ненулев вектор $l \in L$.

Евклидово пространство ще наричаме всяко *крайномерно* реално линейно пространство, в което е въведено скаларно произведение.

Аксиоми 2) и 3) означават, че скаларното произведение е линейна функция на първия аргумент. От аксиоми 1), 2) и 3) непосредствено следва, че то е линейна функция и на втория аргумент:

$$< l, m_1 + m_2 > = < m_1 + m_2, l > = < m_1, l > + < m_2, l > = < l, m_1 > + < l, m_2 >,$$
$$< l, \lambda m > = < \lambda m, l > = \lambda < l, m > .$$

Като вземем предвид и аксиома 4), можем да кажем,че *скаларно произведение е симетрична билинейна форма, която е положително определена.*

Пример. Нека L е ненулево крайномерно реално линейно пространство. Избираме произволно базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и за всеки два вектора $l = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, $m = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n$ *дефинираме*:

(1) $$< l, m >= x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n .$$

Рутинна проверка показва, че $< l, m >$ удовлетворява условията 1) – 4) от определението на скаларно произведение. Следователно всяко крайномерно ненулево реално линейно пространство може да бъде превърнато в евклидово.

Често ще използваме равенството

(2) $$< \sum_{i=1}^{k} x_i l_i, \sum_{k=1}^{n} y_j m_j > = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j < l_i, m_j >, \quad l_i, m_j \in L, \quad x_i, y_j \in \mathbf{R},$$

което се получава непосредствено, като приложим няколко пъти свойството билинейност.

От аксиомите (или пък от свойствата на билинейните форми - (гл. 1, § 1)) следва, че $< l, 0 > = < 0, m > = 0$. Заедно с аксиома 4) това означава, че $< l, l > = 0$ тогава и само тогава, когато векторът l е нулевият. Следователно числото

$$| l |= \sqrt{< l, l >}$$

е положително за всеки ненулев вектор и нула за нулевия вектор; ще го наречем *дължина на вектора* l. За всяко реално число λ имаме

$$| \lambda l |= \sqrt{< \lambda l, \lambda l >} = \sqrt{\lambda^2 < l, l >} =| \lambda | \sqrt{< l, l >} =| \lambda || l | .$$

Ще продължим с въвеждането на геометрична терминология. Ако скаларното произведение на два вектора е равно на нула, ще казваме, че векторите са *ортогонални*. Ако всеки два различни вектора в системата вектори $l_1, l_2, \ldots, l_k$ са ортогонални, ще казваме че, системата е *ортого-*

нална. Ако в ортогонална система всеки вектор има дължина, равна на единица, ще казваме, че системата е *ортонормирана*.

2. Твърдение. *В евклидово пространство всяка ортогонална система от ненулеви вектори е линейно независима*.

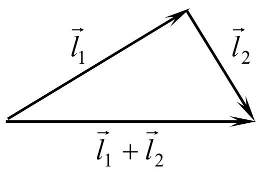
Д о к а з а т е л с т в о. Нека дадената ортогонална система е $l_1, l_2, \dots, l_k$ и нека $\lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2 + \dots + \lambda_k l_k = 0$ за някакви скалари $\lambda_i \in \mathbf{R}$. Като използваме равенството (2), получаваме

$$0 = < l_i, 0 > = < l_i, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j l_j > = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j < l_i, l_j > = \lambda_i < l_i, l_i >, \quad i = 1,2,\dots,k,$$

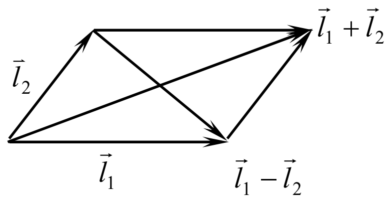
защото $< l_i, l_j > = 0$ при $i \neq j$ (векторите са ортогонални). Тъй като $l_i \neq 0$, то $< l_i, l_i > \neq 0$ и следователно $\lambda_i = 0$ за всяко $i = 1,2,\dots,k$.

Въпреки че разглеждаме абстрактни многомерни линейни пространства, препоръчително е читателят да онагледява съответните твърдения, използвайки свободни вектори, като държи сметка, че те са от тримерно евклидово пространство. Ето няколко съвсем елементарни примера в тази насока.

3. Многомерна теорема на Питагор. *Ако векторите* $l_1, l_2, \dots, l_k$ *са два по два ортогонални, то* $| l_1 + l_2 + \dots + l_k |^2 = | l_1 |^2 + | l_2 |^2 + \dots + | l_k |^2$.



Черт. 1



Черт. 2

Д о к а з а т е л с т в о. Твърдението е непосредствено следствие от определението на дължина, от тъждеството (2) и условието $< l_i, l_j > = 0$ при $i \neq j$. При $k = 2$ то се визуализира с черт. 1 и е познатата от училище теорема на Питагор.

4. Теорема за успоредника. *За всеки два вектора в евклидово пространство е в сила* $| l_1 + l_2 |^2 + | l_1 - l_2 |^2 = 2 | l_1 |^2 + 2 | l_2 |^2$ (вж. черт. 2).

Твърдението е тривиално следствие от тъждествата

$$|l_1 + l_2|^2 = \langle l_1 + l_2, l_1 + l_2 \rangle = \langle l_1, l_1 \rangle + 2\langle l_1, l_2 \rangle + \langle l_2, l_2 \rangle,$$

$$|l_1 - l_2|^2 = \langle l_1 - l_2, l_1 - l_2 \rangle = \langle l_1, l_1 \rangle - 2\langle l_1, l_2 \rangle + \langle l_2, l_2 \rangle.$$

5. Неравенство на Коши – Буняковски – Шварц. *За всеки два вектора* l_1, l_2 *е в сила неравенството*

$$|\langle l_1, l_2 \rangle| \le |l_1||l_2|.$$

Равенството се достига точно тогава, когато векторите са линейно зависими (колинеарни).

Доказателство. Ако $l_1 = 0$, неравенството се превръща в равенството $0 = 0$. Нека $l_1 \ne 0$. За всяко реално число t имаме

$$0 \le |tl_1 + l_2|^2 = \langle tl_1 + l_2, tl_1 + l_2 \rangle = t^2 |l_1|^2 + 2t\langle l_1, l_2 \rangle + |l_2|^2.$$

Тъй като $l_1 \ne 0$, най-дясната страна е квадратен тричлен, който приема само неотрицателни стойности за всяка реална стойност на t, следователно дискриминантата му е неположителна, т.е.

$$\langle l_1, l_2 \rangle^2 - |l_1|^2 |l_2|^2 \le 0.$$

Тя е нула точно тогава, когато тричленът има реален корен t_0. Тогава $|t_0 l_1 + l_2| = 0$, а последното е налице точно когато $t_0 l_1 + l_2 = 0$, т.е. когато векторите l_1, l_2 са линейно зависими.

6. Неравенство на триъгълника. *За всеки два вектора имаме*

$$|l_1 + l_2| \le |l_1| + |l_2|.$$

Доказателство. Твърдението е следствие от неравенството в т. 5:

$$|l_1 + l_2|^2 = |l_1|^2 + 2\langle l_1, l_2 \rangle + |l_2|^2 \le |l_1|^2 + 2|l_1||l_2| + |l_2|^2 = (|l_1| + |l_2|)^2.$$

(Препоръчваме да се погледне и черт. 1.)

7. Ъгли. Ако векторите l_1, l_2 са ненулеви, от неравенството на Коши – Буняковски – Шварц следва, че

$$-1 \le \frac{\langle l_1, l_2 \rangle}{|l_1||l_2|} \le 1.$$

Следователно в интервала $[0,\pi]$ съществува единствен ъгъл φ, за който

$$\cos\varphi = \frac{<l_1,l_2>}{|l_1||l_2|} .$$

Ъгъла φ ще наричаме (елементарно геометричен) *ъгъл между векторите* l_1 и l_2. Ако някой от векторите е нулевият, ъгъл между тях не се дефинира.

8. Алгоритъм на Грам – Шмидт за ортогонализиране. Той беше изложен в гл. 1, § 1, т. 20. Тук няма да го излагаме отново, а ще направим само някои коментари върху цитирания текст. Сега разглеждаме ненулево евклидово пространство L (вместо билинейната форма g имаме скаларното произведение $<\ ,\ >$) и негов произволен базис $v_1,v_2,\dots,v_n$. В гл. 1 за този базис се искаха някои допълнителни условия. Ако читателят е усвоил понятията от гл. 1, той веднага ще съобрази, че в евклидово пространство билинейната форма $<\ ,\ >$ (скаларното произведение) е неособена върху всяко подпространство и допълнителните условия са ненужни (те са изпълнени автоматично). Ще споменем все пак, че в текста на т. 20 условията билинейната форма да бъде неособена върху някои конкретни подпространства са използвани единствено, за да осигурят, че за ненулевите вектори e_i имаме $g(e_i,e_i)\neq 0$. За скаларното произведение по определение имаме $<l,l>>0$ за всеки ненулев вектор. Следователно *за произволен базис* $v_1,v_2,\dots,v_n$ *на ненулево евклидово пространство можем* да повторим процедурите от алгоритъма на Грам – Шмидт и *да построим ортогонален базис* $e_1,e_2,\dots,e_n$ *на пространството, такъв, че за всяко* $i=1,2,\dots,n$ *векторите* $e_1,\dots,e_i$ *да са базис на подпространството, породено от векторите* $v_1,\dots,v_i$.

Ако l е ненулев вектор, за вектора $l'=\dfrac{\pm 1}{|l|}l$ казваме, че е получен от l чрез *нормиране*. Очевидно $|l'|=1$. Ако в ортогоналния базис $e_1,e_2,\dots,e_n$ нормираме последователно всички вектори, ще получим *ортонормиран базис*:

$$e_1'=\frac{\pm 1}{|e_1|}e_1, \quad e_2'=\frac{\pm 1}{|e_2|}e_2, \dots, e_n'=\frac{\pm 1}{|e_n|}e_n .$$

Наистина:

$$< e_i', e_j' > = < \frac{\pm 1}{|e_i|} e_i, \frac{\pm 1}{|e_j|} e_j > = \frac{\pm 1}{|e_i| |e_j|} < e_i, e_j >, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n .$$

При $i = j$ очевидно $< e_i', e_i' > = 1$. При $i \neq j$ имаме $< e_i', e_j' >= 0$, защото $< e_i, e_j >= 0$. Според твърдението в т. 2 ортонормираната система вектори $e_1', \ldots, e_n'$ е линейно независима, следователно също е базис.

9. Твърдение. *В евклидово пространство всяко ненулево подпространство има поне един ортонормиран базис.* (*В частност цялото пространство има поне един ортонормиран базис*). *Всеки ортонормиран базис на подпространство може да бъде допълнен до ортонормиран базис на цялото пространство.*

Доказателство. Избираме базис на даденото подпространство, ортогонализираме го с помощта на алгоритъма на Грам – Шмидт, след което го нормираме по начина, обяснен по-горе. Ако M е собствено подпространство и $e_1, \ldots, e_k$ е ортонормиран базис на M, допълваме го до базис $e_1, \ldots, e_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ на цялото пространство и го ортогонализираме с алгоритъма на Грам –Шмидт. Процесът на ортогонализиране следва да започне направо с търсене на вектора e_{k+1}, защото по условие векторите $e_1, \ldots, e_k$ са ортонормирана система. След евентуално нормиране на новите вектори $e_{k+1}, \ldots, e_n$ ще получим ортонормиран базис на цялото пространство, съдържащ векторите $e_1, \ldots, e_k$.

10. Определение. Ще казваме, че квадратната матрица $A = (a_{ij})$ от ред n е *ортогонална,* ако $AA^t = E_n$ - единичната матрица от ред n.

От дефиниционното равенство следва, че $(\det A)^2 = \det E_n = 1$. Следователно всяка ортогонална матрица е неособена и от равенството $AA^t = E_n$ получаваме, че $A^{-1} = A^t$. Тъй като $A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$, за ортогоналната матрица A имаме и равенството $A^t A = E_n$. Матричното равенство $AA^t = E_n$ е еквивалентно на равенствата

(3) $$a_{i1}a_{j1} + a_{i2}a_{j2} + \ldots + a_{in}a_{jn} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

(δ_{ij} е символът на Кронекер: $\delta_{ii}=1$ и $\delta_{ij}=0$ при $i \neq j$). Равенството $A^t A = E_n$ пък е еквивалентно на

$$(4) \qquad a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+\ldots+a_{ni}a_{nj}=\delta_{ij}, \quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Ако ортогоналната матрица A е реална (състои се от реални числа), от равенството $(\det A)^2=1$ следва, че $\det A=\pm 1$.

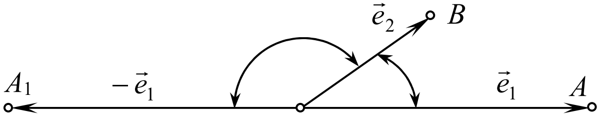
11. Скаларното произведение чрез координати. Нека в евклидово пространство L сме избрали базис $e_1,e_2,\ldots,e_n$ и $l=x_1e_1+x_2e_2+\ldots$ $\ldots+x_ne_n$, $m=y_1e_1+y_2e_2+\ldots+y_ne_n$ са произволни вектори. За скаларното им произведение имаме

$$(5) \qquad <l,m>=<\sum_{i=1}^{n}x_ie_i,\sum_{j=1}^{n}y_je_j>=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_iy_j<e_i,e_j>.$$

Ще напомним, че матрицата $G=(<e_i,e_j>)$ се нарича *матрица на Грам на базиса* $e_1,e_2,\ldots,e_n$. В случая тя е симетрична. Тъй като квадратичната форма $<l,l>$ е положително определена, от критерия на Силвестър (гл. 1, § 2, т. 9) следва , че всички главни минори в матрицата G са положителни числа. *Ако базисът* $e_1,e_2,\ldots,e_n$ *е ортонормиран,* т. е. ако $<e_i,e_j>=\delta_{ij}$, *равенството* (5) *добива вида*

$$(6) \qquad <l,m>=x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n.$$

Обратно, ако скаларното произведение се пресмята чрез координатите по формулата (6), то базисът, спрямо който са координатите, е ортонормиран: достатъчно е да забележим, че спрямо базиса $e_1,e_2,\ldots,e_n$ векторът e_i има координати $(0,\ldots,1,\ldots,0)$ (единицата е на i-то място) и по (6) имаме $<e_i,e_j>=\delta_{ij}$. Следствията от този елементарен факт са доста любопитни. Примерът от т. 1 може сега да се интепретира така: избрахме произволен базис, обявихме го за ортонормиран и с негова помощ въведохме скаларно произведение. Следователно всяко крайномерно реално линейно пространство може да се превърне в евклидово по различни начини. За всеки конкретен базис съществува единствено скаларно произведение, спрямо което базисът е ортонормиран. Ако онагледим ситуацията в двумерно пространство от свободни вектори, черт. 3 изглежда скандализиращ.



Черт. 3

По определение $<\vec{e}_1,\vec{e}_2>=0$ и $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=1$. Следователно ъгълът φ между базисните вектори, т. е. $\angle AOB$, е прав. Тъй като $<-\vec{e}_1,\vec{e}_2>=0$, съседният ъгъл A_1OB също е прав. Правоъгълните триъгълници AOB и A_1OB са еднакви, защото са равнобедрени и имат съответно равни катети. Задълбоченият анализ на този пример би ни отвел към основите на геометрията. Нека засега го възприемем само като предупреждение, че нашите сетивни представи в някои случаи са доста по-ограничени от строгите логически конструкции.

12. Твърдение. *Нека $e_1,e_2,\ldots,e_n$ и $e'_1,e'_2,\ldots,e'_n$ са два базиса на ненулево евклидово пространство, като първият от тях е ортонормиран. Вторият базис е ортонормиран точно тогава, когато матрицата на прехода от първия базис към втория е ортогонална.*

Доказателство. Нека $A=(a_{ij})$ е матрицата на прехода от стария базис $e_1,e_2,\ldots,e_n$ към новия $e'_1,e'_2,\ldots,e'_n$. Стълбовете на матрицата A са координатите на новите базисни вектори спрямо стария базис. Тъй като старият базис е ортонормиран, по формулата (6) имаме

$$<e'_i,e'_j>=a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+\ldots+a_{ni}a_{nj}, \quad i,j=1,2,\ldots,n.$$

Следователно новият базис е ортонормиран точно тогава, когато са налице равенствата (4), а те означават, че матрицата A е ортогонална.

13. Ортогонално допълнение. Ако M е подпространство на евклидово пространство L, множеството

$$M^{\perp}=\{l\in L\,\big|\ <l,m>=0 \quad \forall\ m\in M\}$$

ще наричаме *ортогонално допълнение* на подпространството M. В гл. 1, § 1, т. 10 видяхме, че ортогоналното допълнение е подпространство. Сега скаларното произведение е неособено във всяко подпространство M на пространството L. Като приложим твърдението от т. 11 на цитирания параграф, получаваме: *в евклидово пространство L за всяко подпространство M имаме*

$$L=M\oplus M^{\perp}, \quad (M^{\perp})^{\perp}=M.$$

Ще изложим още едно доказателство. Ако M е нулевото подпространство, то $M^{\perp} = L,$ а при $M = L$ ортогоналното допълнение $M^{\perp}$ е нулевото подпространство. И в двата случая твърдението е очевидно. Нека M е собствено подпространство. Избираме негов ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k$ и го допълваме до ортонормиран базис $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ на цялото пространство. Твърдим, че векторите $e_{k+1}, \ldots, e_n$ са ортонормиран базис на $M^{\perp}$. Наистина, нека $l = x_1 e_1 + \ldots + x_k e_k + x_{k+1} e_{k+1} + \ldots + x_n e_n$, $l \in M^{\perp}$. Тъй като векторът l е ортогонален на всички вектори от подпространството M, то в частност

$$< l, e_i > = 0 = < x_i e_i, e_i > = x_i, \quad i = 1,2,\ldots,k,$$

защото системата вектори $e_1, \ldots, e_n$ е ортонормирана. Следователно всеки вектор от ортогоналното допълнение има вида $l = x_{k+1} e_{k+1} + \ldots + x_n e_n$. Обратно, всеки вектор от този вид е в ортогоналното допълнение, защото очевидно е ортогонален на векторите $e_1, \ldots, e_k$, следователно е ортогонален и на всяка тяхна линейна комбинация, т. е. на всеки вектор от подпространството M . Всеки вектор $l \in L$ се представя еднозначно във вида $l = (x_1 e_1 + \ldots + x_k e_k) + (x_{k+1} e_{k+1} + \ldots + x_n e_n)$. Сумата в първите скоби от дясно е вектор $l_1 \in M$, а сумата във вторите скоби е вектор $l_2 \in M^{\perp}$. Следователно всеки вектор $l \in L$ се представя еднозначно във вида $l = l_1 + l_2$, където $l_1 \in M$ и $l_2 \in M^{\perp}$, т. е. $L = M \oplus M^{\perp}$. Втората част на твърдението се доказва с повторение на проведеното разсъждение и я оставяме за упражнение.

14. Изоморфизъм на евклидови пространства. Нека L_1 и L_2 са две евклидови пространства със скаларни произведения, съответно $<,>_1$ и $<,>_2$. Ще казваме, че двете пространства са *изоморфни* (*изометрични*), ако съществува поне едно изображение $f : L_1 \to L_2$ със следните свойства: а) f е изморфизъм на линейните пространства L_1 и L_2; б) за всеки два вектора $l, m \in L_1$ е изпълнено $< l, m >_1 = < f(l), f(m) >_2$.

Ще покажем, че *две евклидови пространства са изометрични тогава и само тогава, когато имат равни размерности.* Наистина, ако пространствата са изометрични, те са изоморфни като линейни пространства и тогава размерностите им са равни (Ч. I, гл. 4, § 3, т. 3). Обратно, нека дадените пространства имат равни размерности, а $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и

$e_1', e_2', \ldots, e_n'$ са ортонормирани базиси, съответно в пространствата L_1 и L_2. Дефинираме $f : L_1 \to L_2$ с правилото: ако $l = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, то $f(l) = x_1e_1' + x_2e_2' + \ldots + x_ne_n'$. От доказателството на цитираната теорема знаем, че изображението f е изоморфизъм на линейни пространства. Нека $m = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n$. Тъй като разглежданите базиси в двете пространства са ортонормирани, то

$$< l, m >_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n = < f(l), f(m) >_2 ,$$

което завършва доказателството.

§ 2. Унитарни пространства

Резултатите и разсъжденията в този параграф са аналогични на разсъжденията в предишния параграф. Ще считаме, че читателят вече е добил достатъчно опит, за да допълни самостоятелно необходимите детайли и изменения, използвайки съответните разсъждения от § 1, или пък ще си помогне с разсъждения, проведени в гл. 1, § 1.

1. **Определение.** Нека L е линейно пространство над полето $\mathbf{C}$ на комплексните числа. Ще казваме, че в пространството е въведено *скаларно произведение,* ако на всяка наредена двойка вектори $l, m \in L$ е съпоставено комплексно число $\langle l, m \rangle$ и са изпълнени следните условия (аксиоми на скаларното произведение):

1) $\langle l, m \rangle = \overline{< m, l >}$ за всеки два вектора $l, m \in L$;
2) $\langle l_1 + l_2, m \rangle = \langle l_1, m \rangle + \langle l_2, m \rangle$ за всеки три вектора $l_1, l_2, m \in L$;
3) $\langle \lambda l, m \rangle = \lambda \langle l, m \rangle$ за всеки два вектора $l, m \in L$ и за всеки скалар $\lambda \in \mathbf{C}$;
4) $\langle l, l \rangle > 0$ за всеки ненулев вектор $l \in L$.

Унитарно пространство ще наричаме всяко комплексно линейно пространство, в което е въведено скаларно произведение.

Ако използваме понятията от гл. 1, § 1, бихме могли да кажем накратко, че *унитарно пространство това е комплексно пространство, в което е зададена положително определена ермитова форма*.

Пример. Нека $L = \mathbf{C}^n$ е комплексното координатно линейно пространство, $l = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $m = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Дефинираме :

$$< l, m > = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_n\overline{y}_n \ .$$

Проверката на свойствата 1) – 3) е рутинна. Ще отбележим само, че $< l,l >= x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + \ldots + x_n\bar{x}_n = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2$ и 4) очевидно е изпълнено.

Съответните понятия, въведени в евклидови пространства, се пренасят почти буквално и в унитарни пространства. *Дължина на вектора* l от унитарното пространство L ще наричаме числото $|l| = \sqrt{< l,l >}$. От свойство 4) (аксиома 4) на скаларното произведение следва, че дължината на всеки ненулев вектор е реално положително число. Дължина на нулевия вектор е числото нула, защото $< 0,0 >= 0$.

От аксиомите на скаларно произведение сега лесно следва, че

$$< l, \lambda m >= \bar{\lambda} < l,m > \text{ за всяко число } \lambda \in \mathbf{C}.$$

Ако в крайномерно унитарно пространство векторите l,m са зададени с координатите си спрямо базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$, т. е. ако

$$l = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n\,,\ m = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n\,,$$

то

(1) $$< l,m >=< \sum_{i=1}^{n} x_ie_i, \sum_{j=1}^{n} y_je_j >= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\bar{y}_j < e_i,e_j > .$$

В унитарни пространства можем без изменения да прилагаме алгоритъма на Грам – Шмидт (вж. § 1, т. 8) и с негова помощ да докажем, че *всяко ненулево крайномерно унитарно пространство има поне един ортонормиран базис*. Пак както в § 1 се вижда, че базисът е ортонормиран тогава и само тогава, когато скаларното произведение се изразява чрез координатите на векторите по формулата

(2) $$< l,m >= x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_n\bar{y}_n\,.$$

2. Неравенство на Коши – Буняковски – Шварц. *За всеки два вектора* l_1,l_2 *в унитарно пространство е в сила неравенството*

$$|< l_1,l_2 >| \le |l_1||l_2|\,.$$

Равенството се достига точно тогава, когато векторите са линейно зависими (колинеарни).

Доказателство. При $l_1 = 0$ твърдението е очевидно. Нека $l_1 \neq 0$ и да запишем скаларното произведение на векторите в тригонометричен вид: $< l_1,l_2 >=|< l_1,l_2 >|\,\varepsilon$, където $\varepsilon = \cos\varphi + i\sin\varphi$ за някакъв ъгъл φ. За всяко реално число t имаме

$$0 \le |tl_1 + l_2|^2 = <tl_1 + l_2, tl_1 + l_2> = t^2\,|l_1|^2 + t(<l_1,l_2> + \overline{<l_1,l_2>}) + |l_2|^2$$

$$= |l_1|^2\, t^2 + 2\,\mathrm{Re}<l_1,l_2>t + |l_2|^2\,,$$

където $\mathrm{Re}\,\alpha$ означава реалната част на комплексното число α. Равенството в най-лявата страна е изпълнено за някое $t = t_0$ точно тогава, когато $t_0 l_1 + l_2 = 0$. В най-дясната страна стои квадратен тричлен с реални коефициенти на реалната променлива t. За всички стойности на променливата той приема само неотрицателни стойности. Това условие е налице тогава и само тогава, когато дискриминантата на квадратния тричлен е неположителна, т. е. когато

$$(\mathrm{Re}<l_1,l_2>)^2 \le |l_1|^2 |l_2|^2\,.$$

Равенството (дискриминантата е равна на нула) е в сила точно тогава, когато тричленът има реален корен t_0, т. е когато $t_0 l_1 + l_2 = 0.$ Горното неравенство е вярно за всеки два вектора. Като го приложим за векторите $\varepsilon^{-1} l_1, l_2$, имаме:

$$(\mathrm{Re}<\varepsilon^{-1} l_1, l_2>)^2 = (\mathrm{Re}\,\varepsilon^{-1} <l_1,l_2>)^2 = (\mathrm{Re}\,\varepsilon^{-1}\,|<l_1,l_2>|\,\varepsilon)^2$$

$$= |<l_1,l_2>|^2 \le |l_1|^2 |l_2|^2\,.$$

Неравенството в най-дясната страна се превръща в равенство точно тогава, когато съществува реално число t_0, за което $t_0 \varepsilon^{-1} l_1 + l_2 = 0$, т. е. когато l_1 и l_2 са линейно зависими. След като коренуваме двете страни на доказаното неравенство, получаваме твърдението.

3. Определение. Ще казваме, че квадратната матрица U с елементи комплексни числа, е *унитарна*, ако $\overline{U}^t U = E$ - единичната матрица.

От дефиниционното равенство следва, че $\det(\overline{U}^t U) = \overline{\det U}\det U$ $= |\det U|^2 = \det E = 1$.Тъй като модулът на комплексно число е неотрицателно реално число, то $|\det(U)| = 1$. Следователно *детерминантата на всяка унитарна матрица е комплексно число, чийто модул е равен на единица.* В частност всяка унитарна матрица е неособена и от дефиниционното равенство следва, че $U^{-1} = \overline{U}^t$, а следователно имаме и равенството $U\overline{U}^t = E$.

4. Твърдение. *Нека* $U = (a_{ij})$ *е квадратна матрица от ред n с елементи комплексни числа. Следните условия са еквивалентни*: **а**) *матрицата е унитарна,* т. е. $\overline{U}^t U = E$; **б**) $U^{-1} = \overline{U}^t$; **в**) $U\overline{U}^t = E$; **г**) $U^t\overline{U} = E$; **д**) *в сила са равенствата*

(3) $$a_{1i}\overline{a}_{1j} + a_{2i}\overline{a}_{2j} + \ldots + a_{ni}\overline{a}_{nj} = \delta_{ij}\ ,$$

(4) $$a_{i1}\overline{a}_{j1} + a_{i2}\overline{a}_{j2} + \ldots + a_{in}\overline{a}_{jn} = \delta_{ij}\ , \quad i, j = 1,2,\ldots,n\ .$$

Доказателство. Твърдението е тривиално и го формулирахме само за удобство. Импликацията а) б) току-що бе доказана, а очевидно б) а). Еквивалентността б) в) също е очевидна. Равенствата а) и г) се получават едно от друго чрез комплексно спрягане на двете им страни. Твърдението д) е всъщност подробно записване съответно на равенствата $U^t\overline{U} = E$ и $U\overline{U}^t = E$.

5. Твърдение. *Нека* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *и* $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ *са два базиса на ненулево крайномерно унитарно пространство, като първият от тях е ортонормиран. Вторият базис е ортонормиран точно тогава, когато матрицата на прехода от първия базис към втория е унитарна.*

С незначителни промени доказателството повтаря разсъждението от § 1, т. 12. Сега обаче трябва да се използват равенствата (3) от този параграф.

С повторение на разсъжденията от § 1, т. 13 лесно може да се докаже, че ако U е крайномерно унитарно пространство, то за всяко негово подпространство M са в сила равенствата $U = M \oplus M^{\perp}, \quad (M^{\perp})^{\perp} = M$.

§ 3. Ортогонални и унитарни оператори

1. Определение. Ще казваме, че линейният оператор $f : L \to L$, дефиниран в *евклидово* пространство L, е *ортогонален*, ако

(1) $$< f(l), f(m) > = < l, m >$$

за всички вектори $l, m \in L$. Ако линейният оператор $f : L \to L$ е дефиниран в *унитарно* пространство L и удовлетворява условието (1), ще казваме, че операторът е *унитарен*.

За свойството (1) обикновено се казва накратко, че операторът f *запазва скаларното произведение.* Не съвсем прецизно определението може да се перифразира и така: ако операторът запазва скаларното произведение в евклидово (съотв. в унитарно) линейно пространство, ще казваме, че той е ортогонален (съотв. унитарен).

2. Твърдение. *В евклидово линейно пространство* (съотв. в *крайномерно унитарно пространство*) *линейният оператор* $f : L \to L$ *е ортогонален* (съотв. *унитарен*) *тогава и само тогава, когато матрицата му спрямо всеки оротонормиран базис е ортогонална* (съотв. *унитарна*).

Доказателство. Нека пространството L е евклидово (по определение всяко евклидово пространство е крайномерно), $e_1, e_2, \ldots, e_n$ е негов ортонормиран базис и нека операторът е ортогонален. Имаме в частност равенствата

$$< f(e_i), f(e_j) > = < e_i, e_j > = \delta_{ij}, \quad i, j = 1,2,\ldots,n ,$$

т. е. системата вектори $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ е ортонормирана, следователно тя е базис на пространството L (вж. § 1, т. 2). Това означава, че матрицата на оператора може да се интерпретира като матрица на прехода от ортонормирания базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ към ортонормирания базис $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$. Следователно тя е ортогонална (вж.§ 1, т. 12).

Нека матрицата на оператора спрямо избрания ортонормиран базис е $U = (a_{ij})$ и нека тя е ортогонална. Тя е неособена (§ 1, т. 10), следователно операторът е обратим и изобразява базис в (нов) базис. Получихме, че векторите $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ са (нов) базис на пространството. Интерпретираме матрицата $U = (a_{ij})$ на оператора като матрица на прехода от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ към новия. По условие тя е ортогонална и по твърдението от § 1, т. 12 новият базис е ортонормиран. Следователно за векторите $l = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$, $m = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n$ имаме

$$< f(l), f(m) > = < f(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i), f(\sum_{j=1}^{n} y_j e_j) > = < \sum_{i=1}^{n} f(x_i e_i), \sum_{j=1}^{n} f(y_j e_j) >$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j < f(e_i), f(e_j) > = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = < l, m > ,$$

т. е. операторът е ортогонален. Аналогично се разглежда и случаят с унитарен оператор.

3. Твърдение. *Нека* L *е крайномерно евклидово или унитарно пространство, а* $f : L \to L$ *е линеен оператор. Следните условия са еквивалентни*:

а) *операторът е ортогонален* (съотв. *унитарен*);

б) *операторът изобразява всеки ортонормиран базис в ортонормиран базис*;

в) $< f(l), f(l) > = < l, l >$ *за всеки вектор* $l \in L$;

г) *ако* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *е (произволен) базис на пространството,* $G = (< e_i, e_j >)$ *е матрицата на Грам на базиса и* $U = (a_{ij})$ *е матрицата на оператора спрямо избрания базис, то* $U^t G U = G$*, ако операторът е ортогонален, и* $U^t G \overline{U} = G$*, ако операторът е унитарен.*

Доказателство. Еквивалентността а) б) се съдържа в доказателството на твърдението от т. 2. Импликацията а) в) следва от определенията на ортогонален и на унитарен оператор. Ще докажем, че в) а). Нека пространството е евклидово и е в сила условието в). Тогава за всеки два вектора $l, m \in L$ имаме равенството

$$(2) \qquad < f(l+m), f(l+m) > = < l+m, l+m > .$$

Като използваме това равенство, свойството линейност на оператора и приложим няколко пъти условието в), имаме

$$< f(l) + f(m), f(l) + f(m) >$$

$$= < f(l), f(l) > + < f(l), f(m) > + < f(m), f(l) > + < f(m), f(m) >$$

$$= < l, l > +2 < f(l), f(m) > + < m, m > = (l+m, l+m >$$

$$= < l, l > +2 < l, m > + < m, m >,$$

откъдето получаваме равенството $< f(l), f(m) > = < l, m >$ за всеки два вектора $l, m \in L$, т. е. операторът е ортогонален. Случаят, когато пространството е унитарно, се разглежда аналогично, но пресмятанията са малко повече и ги пропускаме. Освен равенството (2) сега следва да се използва и равенството $< f(l+im), f(l+im) > = < l+im, l+im >$.

Дотук доказахме а) б) в). Ще докажем, че а) г). Нека за определеност операторът е ортогонален. Тъй като всеки ортогонален оператор е обратим, той изобразява базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в нов базис $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$. Матрица на прехода от (стария) базис към новия е матрицата $U = (a_{ij})$ на оператора спрямо стария базис. Скаларното произведение е билинейна форма и матрицата на Грам спрямо новия базис е

$U^t GU = (< f(e_i), f(e_j) >)$ (вж. гл. 1, § 1, т. 4; равенството е по определение на матрица на Грам). Тъй като операторът е ортогонален, то

(3) $$< f(e_i), f(e_j) > = < e_i, e_j >, \quad i, j = 1,2,\dots,n,$$

следователно $U^t GU = G$. Обратно, нека е налице последното равенство. От него следва, че $(\det U)^2 \det G = \det G$. Нека пространството е евклидово. Тъй като скаларното произведение е неособена билинейна форма, то матрицата на Грам G е неособена (гл. 1, § 1, т. 8). Следователно $\det U \neq 0$, т. е. линейният оператор f с матрица U е обратим и изобразява базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ в нов базис $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)$. Току-що видяхме, че матрицата на Грам на новия базис е $U^t GU = (< f(e_i), f(e_j) >)$. По условие е изпълнено равенството $U^t GU = G$, което е еквивалентно на равенствата (3). От тях лесно следва, че операторът е ортогонален – достатъчно е да се модифицират пресмятанията от края на т. 2. Случаят с унитарно пространство се разглежда аналогично, но сега трябва да се използва, че скаларното произведение е неособена ермитова форма.

Забележка. Еквивалентността а) г) е особено полезна когато скаларното произведение е зададено чрез матрицата на Грам на базис, който не е ортонормиран. Тя дава възможност да "разпознаваме" кога произволна матрица U е матрица на ортогонален (унитарен) оператор.

4. Твърдение. *Характеристичните корени на ортогонална матрица с реални елементи и на унитарна матрица са числа с модул, равен на единица.*

Следствия. а) *Всяка собствена стойност на ортогонален оператор (ако има такава), дефиниран в ненулево (крайномерно) евклидово пространство, е равна на* 1 *или* –1;

б) *Всяка собствена стойност на унитарен оператор, дефиниран в ненулево крайномерно унитарно пространство, е (комплексно) число с модул, равен на единица.*

Доказателство. Тъй като всяка ортогонална матрица A с реални елементи е унитарна ($A = \overline{A}, \quad AA^t = E$), достатъчно е да разгледаме случая, когато матрицата A е унитарна. Нека матрицата е от ред *n,* а L е n-мерно унитарно пространство. Избираме ортонормиран базис на пространството и дефинираме линеен оператор $f : L \to L$ така, че матрицата му спрямо избрания базис да бъде дадената матрица A. Операторът f е унитарен (т. 2). Тъй като пространството L е комплексно, всеки характеристичен корен λ на матрицата A е собствена стойност на оператора. Нека $e \neq 0$ е съответен собствен вектор: $f(e) = \lambda e$. Тъй като операторът f е унитарен, имаме

$$< f(e), f(e) > = < e, e > = < \lambda e, \lambda e > = \lambda\overline{\lambda} < e, e > .$$

Но $< e, e > \neq 0$ и от горните равенства следва $\lambda\overline{\lambda} = 1$, т. е. $|\lambda| = 1$.

Следствията са почти непосредствени. Ще напомним, че всяка собствена стойност на линеен оператор е корен на характеристичния му полином, който не зависи от базиса. Ако базисът е ортонормиран, матрицата на унитарен (съотв. ортогонален) оператор е унитарна (съотв. ортогонална) и характеристичният полином на оператора е всъщност характеристичен полином на унитарна (съотв. ортогонална) матрица. В евклидовия случай линейното пространство е над полето на реалните числа, следователно собствените стойности на ортогонален оператор задължително са реални числа, и то с модул, равен на 1, т. е. те са равни на 1 или –1.

5. Твърдение. *Всеки два собствени вектора на ортогонален или унитарен оператор, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални.*

Доказателство. Нека операторът f е унитарен, $f(e_1) = \lambda_1 e_1$, $f(e_2) = \lambda_2 e_2$, като по условие собствените стойности λ_1 и λ_2 са различни. Имаме последователно

$$< e_1, e_2 > = < f(e_1), f(e_2) > = < \lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2 > = \lambda_1\overline{\lambda_2} < e_1, e_2 > .$$

Първото равенство е в сила, защото операторът е унитарен; от най-лявата и най-дясната страна следва

$$(\lambda_1\overline{\lambda_2} - 1) < e_1, e_2 > = 0 .$$

Тъй като $|\lambda_2|^2 = \lambda_2\overline{\lambda_2} = 1$, то $\overline{\lambda_2} = \lambda_2^{-1}$. По условие $\lambda_1 \neq \lambda_2$, следователно $\lambda_1\overline{\lambda_2} - 1 = \lambda_1\lambda_2^{-1} - 1 \neq 0$ и от равенството по-горе получаваме $< e_1, e_2 > = 0$, т. е. собствените вектори са ортогонални. Ако операторът е ортогонален, разсъждението е аналогично, но съгласно т. 4, а) сега можем просто да предполагаме, че $\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$.

6. Ортогонални оператори в едномерно или в двумерно евклидово пространство. а) За всеки линеен оператор f, дефиниран в едномерно линейно пространство L с базис *e*, имаме $f(e) = \lambda e$ при подходящо число , т. е. всеки базисен вектор е собствен вектор на оператора. Ако пространството е евклидово, а операторът ортогонален, то $\lambda = \pm 1$ (т. 4, а). Всеки вектор има вида $l = xe$, следователно $f(l) = f(xe) = xf(e) = \pm xe = = \pm l$. Окончателно: или $f(l) = l$, или $f(l) = -l$ за всички вектори $l \in L$.

б) Нека евклидовото пространство L е двумерно. Ако e_1, e_2 е ортонормиран базис, нека спрямо този базис матрицата на произволен ортогонален оператор f е $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Тя е ортогонална, следователно

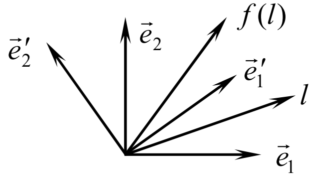
$$a^2 + c^2 = 1, \quad b^2 + d^2 = 1, \quad ab + cd = 0.$$

За детерминантата имаме допълнително $\Delta = ad - bc = \pm 1$. При подходящ избор на ъгъла α всяко решение на първото от трите уравнения може да се запише във вида $a = \cos\alpha$, $c = \sin\alpha$, $0 \le \alpha < 2\pi$. Оттук за решенията на останалите две уравнения следва $b = -\varepsilon \sin\alpha$, $d = \varepsilon \cos\alpha$, $\varepsilon = \pm 1$, т. е.

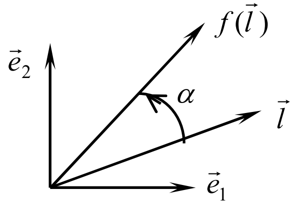
$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\varepsilon \sin\alpha \\ \sin\alpha & \varepsilon \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Ясно е, че $\Delta = \varepsilon$, а за характеристичния полином на матрицата имаме

$$\varphi_A(t) = t^2 - (\cos\alpha + \varepsilon \cos\alpha)t + \varepsilon .$$



Черт. 4



Черт.5

При $\varepsilon = -1$ полиномът е $t^2 - 1$ и има два реални корена $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2.} = -1$. Двата корена са собствени стойности на оператора и може да се намерят собствени вектори e_1', e_2' (даже с дължини, равни на единица), за които $f(e_1') = e_1'$, $f(e_2') = -e_2'$. Двата вектора автоматично са ортогонални (вж. т. 5) и образуват ортонормиран базис, спрямо който матрицата на оператора е $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Действието на оператора се интерпретира геометрично като симетрия относно "абсцисната" ос, определена от вектора e_1' (черт. 4).

Нека $\varepsilon = 1$. Дискриминантата на характеристичния полином сега е $4(\cos^2\alpha - 1)$. Ако ъгълът α е различен от 0 и π, тя е отрицателна, корените на полинома не са реални числа и операторът няма собствени вектори. Действието на оператора се интерпретира като въртене на ъгъл α (черт. 5) Матрицата на оператора е

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

При $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ матрицата е съответно $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Можем да считаме, че в първия случай става дума за въртене на ъгъл 0 (единичния оператор), а във втория – за въртене на ъгъл π.

7. Теорема. *За всеки ортогонален линеен оператор, дефиниран в ненулево евклидово пространство, съществува ортонормиран базис, спрямо който матрицата на оператора има клетъчно-диагонален вид*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_k \end{pmatrix},$$

където всяка от матриците A_i, $i = 1,2,\dots,k$, *е матрица от някой от следните три вида:* (1), (-1), $\begin{pmatrix} \cos\alpha_i & -\sin\alpha_i \\ \sin\alpha_i & \cos\alpha_i \end{pmatrix}$ *и ъгълът* α_i *удовлетворява условията:* $0 < \alpha_i < 2\pi$, $\alpha_i \neq \pi$.

Доказателство. Да означим с L разглежданото евклидово пространство, а с f - ортогоналния оператор. Първо ще докажем следното: *ако* M *е подпространство на евклидовото пространство* L *и ако* M *е инвариантно относно ортогоналния оператор* $f : L \to L$, *то ортогонал-*

ното допълнение $M^{\perp}$ също е инвариантно относно оператора. Наистина вече знаем, че всеки ортогонален оператор е биективно изображение (защото е обратим). Тъй като ограничението на f върху подпространството M е ортогонален оператор $M \to M$, то всеки вектор $l \in M$ може да се запише във вида $l = f(l')$ за подходящ вектор $l' \in M$. Следователно за всеки два вектора $l \in M$, $m \in M^{\perp}$ имаме

$$< l, f(m) > = < f(l'), f(m) > = < l', m > = 0;$$

второто равенство е в сила, защото операторът е ортогонален, а последното – защото $l' \in M$, $m \in M^{\perp}$. Като сравним най-лявата и най-дясната страна, виждаме, че векторът $f(m)$ е ортогонален на всеки вектор $l \in M$, т. е. $f(m) \in M^{\perp}$.

Ще завършим доказателството с помощта на индукция по $n = \dim L$. Случаите $n = 1$ и $n = 2$ бяха разгледани в т. 6. Нека $n > 2$ и да допуснем, че теоремата е вярна за всички ненулеви пространства с размерност, по-малка от n. Както знаем (I, гл. 4, § 7, т. 6) , съществува едномерно или двумерно подпространство M, $M \subset L$, което е инвариантно относно оператора. Ще използваме, че $L = M \oplus M^{\perp}$. За подпространството $M^{\perp}$ може да се приложи индуктивното допускане, защото то е инвариантно относно оператора и размерността му е по-малка от n: ако $\dim M = s$, където $s = 1$ или 2, то $\dim M^{\perp} = n - s < n$. Нека f_1, f_2 са ограниченията на оператора f съответно в подпространствата M и $M^{\perp}$. Избираме ортонормиран базис на подпространството M така, че матрицата B_1 на оператора f_1 да има искания в заключението на теоремата клетъчно-диагонален вид. (Според т. 6 това може да се направи.) Аналогично избираме ортонормиран базис $e_{s+1}, \ldots, e_n$ на подпространството $M^{\perp}$ така, че матрицата B_2 на оператора f_2 да има спрямо избрания базис искания вид. (Според индуктивното допускане това може да се направи.) Обединението на двата базиса е ортонормиран базис на цялото пространство (вж. § 1, т. 2). Спрямо него матрицата на оператора f има клетъчния вид $\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$, защото подпространствата са инвариантни относно оператора. Ако изпишем подробно клетките B_1 и B_2, матрицата ще добие искания вид, което завършва доказателството.

8. Следствие. *За всяка реална ортогонална матрица A съществува реална ортогонална матрица T такава, че матрицата $T^{-1}AT$ да има клетъчно-диагоналния вид, описан в заключението на теоремата от* т. 7.

Доказателство.В евклидово пространство с размерност, равна на реда на дадената матрица, избираме ортонормиран базис и интерпретираме матрицата A като матрица (спрямо избрания базис) на линеен оператор. Тъй като тя по условие е ортогонална, то операторът е ортогонален и според теоремата съществува (нов) ортонормиран базис, спрямо който матрицата на оператора има посочения клетъчно-диагонален вид. Спрямо новия базис матрицата е $T^{-1}AT$, където T е матрицата на прехода от стария към новия базис. Тъй като и двата базиса са ортонормирани, матрицата T е ортогонална.

9. Теорема. *За всеки унитарен оператор, дефиниран в ненулево крайномерно унитарно пространство, съществува ортонормиран базис, състоящ се от собствени вектори на оператора* (еквивалентно: *ортонормиран базис, спрямо който матрицата на оператора е диагонална*).

Доказателство. Да означим с L разглежданото унитарно пространство, а с f – фиксиран унитарен оператор, дефиниран в пространството. Нека освен това $\dim L = n.$ Буквално, както в предишната теорема се доказва, че ако някое подпространство е инвариантно относно оператора, то ортогоналното му допълнение също е инвариантно относно оператора. По-нататък ще разсъждаваме с помощта на индукция по размерността n на пространството. При $n = 1$ твърдението е очевидно. Нека $n > 1$ и да допуснем, че твърдението е вярно за всички ненулеви унитарни пространства (и за всички унитарни оператори в тях) с размерност, по-малка от n. Тъй като пространството е комплексно, то всеки корен на характеристичния полином на оператора е собствена стойност. Нека λ_1 е една от собствените стойности на оператора и e_1 е съответен собствен вектор, т. е. $f(e_1) = \lambda_1 e_1$. Винаги можем да предполагаме, че $|e_1| = 1$. Нека $M = \{xe_1 \mid x \in \mathbf{C}\}$ е едномерното подпространство, породено от собствения вектор. То очевидно е инвариантно относно оператора f. Подпространството $M^{\perp}$ има размерност $n-1$ и е инвариантно относно оператора, следователно за $M^{\perp}$ и за ограничението на оператора в подпространството $M^{\perp}$ е приложимо индуктивното допускане, т. е. можем да изберем ортонормиран базис $e_2,\dots,e_n$ на ортогоналното допълнение, за който $f(e_i)=\lambda_i e_i$, $i=2,\dots,n$. Векторите $e_1,e_2,\dots,e_n$ са два по два ортогонални и имат дължини, равни на единица, т. е. те са базис с исканите свойства.

С разсъждение, аналогично на проведеното в т. 8, получаваме:

10. Следствие. *За всяка унитарна матрица A съществува унитарна матрица T, за която матрицата* $T^{-1}AT$ *е диагонална.*

§ 4. Симетрични и ермитови оператори

1. Определение. Нека L е евклидово или унитарно пространство. Ще казваме, че линейният оператор $f:L\to L$ е *самоспрегнат*, ако

(1) $$<f(l),m>=<l,f(m)> \quad \forall\, l,m\in L.$$

В евклидовия случай самоспрегнатите оператори най-често се наричат *симетрични*, а в унитарния – *ермитови* (в чест на френския математик Ch. Hermit, 1822 – 1901).

2. Твърдение. *Нека* L *е ненулево крайномерно евклидово или унитарно пространство. Линейният оператор* $f:L\to L$ *е симетричен* (съотв. *ермитов*) *тогава и само тогава, когато матрицата му спрямо ортонормиран базис е симетрична* (съотв. *ермитова*).

Доказателство. Избираме ортонормиран базис на пространството. Матрицата на Грам G на базиса е единичната, защото базисът е ортонормиран. Нека A е матрицата на оператора $f:L\to L$ спрямо избрания базис, а X,Y са съответно матриците-стълбове от координатите на векторите $l,m\in L.$ Стълбовете от координатите на векторите $f(l)$, $f(m)$ са съответно AX и AY. Нека пространството е евклидово. Като приложим за скаларното произведение равенството (4) от гл. 1, § 1 и вземем предвид, че $G=E$, получаваме:

$$<f(l),m>=(AX)^tGY=X^tA^tGY=X^tA^tY,$$

$$<l,f(m)>=X^tG(AY)=X^tAY.$$

Следователно равенството $<f(l),m>=<l,f(m)>$ е изпълнено за всеки два вектора $l,m\in L$ (операторът е симетричен) тогава и само тогава, когато $X^tA^tY=X^tAY$ за всеки две матрици-стълбове X,Y. Според твърдението от гл. 1, § 1, т. 2 последното е възможно точно тогава, когато $A^t=A$, т. е. когато матрицата A е симетрична. Ако пространството е унитарно, разсъждението е същото, но сега използваме равенството (5) от гл. 1, § 1, т. 1 и факта, че $\overline{AY} = \overline{A}\,\overline{Y}$ (чертата означава комплексно спрягане):

$$< f(l), m >= (AX)^t G\overline{Y} = X^t A^t G\overline{Y} = X^t A^t \overline{Y},$$

$$< l, f(m) >= X^t G(\overline{AY}) = X^t \overline{A}\,\overline{Y}.$$

Условието за ермитовост на оператора сега е еквивалентно на равенството $A^t = \overline{A}$, което е еквивалентно на $\overline{A}^t = A$ - определението на ермитова матрица.

3. Твърдение. *Характеристичните корени на всяка реална симетрична матрица и на всяка ермитова матрица са реални числа.*

Доказателство. Всяка реална симетрична матрица A е ермитова, защото $\overline{A} = A$ и $\overline{A}^t = A^t = A$. Следователно достатъчно е да разгледаме случая, когато A е ермитова матрица от ред n. Нека L е n-мерно унитарно пространство, в което избираме ортонормиран базис и дефинираме линеен оператор $f : L \to L$ така, че матрицата му спрямо избрания базис да бъде дадената матрица A. Тъй като тя е ермитова, операторът f е ермитов (вж. т. 2). Пространството L е комплексно, следователно всеки характеристичен корен λ на матрицата A е собствена стойност на оператора. Нека $l \neq 0$ е съответен собствен вектор, т. е. $f(l) = \lambda l$. Тъй като операторът е ермитов, имаме

$$< f(l), l >= \lambda < l, l >=< l, f(l) >= \overline{\lambda} < l, l >$$

и от равенството $\lambda < l, l >= \overline{\lambda} < l, l >$ следва $\lambda = \overline{\lambda}$, защото $< l, l > \neq 0$.

4. Теорема за диагонализиране на симетричен оператор. *За всеки симетричен оператор в ненулево евклидово пространство съществува ортонормиран базис, състоящ се от собствени вектори на оператора* (еквивалентно: *съществува ортонормиран базис, спрямо който матрицата на оператора е диагонална*).

Доказателство. Да означим с L разглежданото евклидово пространство и нека $\dim L = n$. Ще разсъждаваме с индукция по размерността n. При $n = 1$ твърдението е очевидно. Нека $n > 1$ и да допуснем, че теоремата е вярна за всички симетрични оператори, дефинирани в евклидови пространства с размерност $n-1$. В пространството L избираме ортонормиран базис и нека A е матрицата (спрямо този базис) на симетричния оператор $f : L \to L$. Според доказаното в т. 2 и т. 3 матрицата A е реална симетрична (защото пространството е реално) и всичките ѝ характеристични корени са реални числа, следователно собствените стойности на оператора са всичките характеристични корени на матрицата му. Нека λ_1 е собствена стойност на оператора и e_1 е съответен собствен вектор, т. е. $f(e_1)=\lambda_1 e_1$. След съответно нормиране можем да предполагаме, че $|e_1|=1$. Нека $M=\{xe_1 \mid x\in \mathbf{R}\}$ е едномерното подпространство, породено от вектора e_1. Имаме разлагането в директна сума:

$$L=M\oplus M^{\perp}.$$

Ортогоналното допълнение $M^{\perp}$ е евклидово пространство с размерност $n-1$. Ще покажем, че то е инвариантно относно оператора f. Наистина, тъй като операторът е симетричен, за всеки вектор $l\in M^{\perp}$ имаме

$$<f(l),e_1>=<l,f(e_1)>=<l,\lambda_1 e_1>=\lambda_1<l,e_1>=\lambda_1\cdot 0=0,$$

т. е. векторът $f(l)$ също е в ортогоналното допълнение $M^{\perp}$. Следователно ограничението $\bar{f}$ на оператора f върху подпространството $M^{\perp}$ (операторът f, но с дефиниционна област, стеснена до $M^{\perp}$) е симетричен линеен оператор $\bar{f}:M^{\perp}\to M^{\perp}$, за който можем да приложим индуктивното допускане: съществува ортонормиран базис $e_2,\dots,e_n$ на подпространството $M^{\perp}$, състоящ се от собствени вектори на оператора f. По-подробно: $f(e_i)=\lambda_i e_i,\quad i=2,\dots,n$. Тъй като собственият вектор e_1 по условие има дължина, равна на единица, и е ортогонален на всеки от векторите $e_2,\dots,e_n$ (защото е в подпространството M, а останалите са в ортогоналното допълнение $M^{\perp}$), векторите $e_1,e_2,\dots,e_n$ са ортонормиран базис на цялото пространство, състоящ се от собствени вектори на оператора.

5. Следствие (диагонализиране на реална симетрична матрица). *За всяка реална симетрична матрица A съществува реална ортогонална матрица T, такава, че матрицата $T^{-1}AT$ да е диагонална.*

Доказателство. Интерпретираме реалната симетрична матрица A като матрица на симетричен оператор спрямо ортонормиран базис на съответно евклидово пространство. Според теоремата в т. 4 съществува нов ортонормиран базис, спрямо който матрицата на оператора е диагонална. Спрямо новия базис матрицата на оператора е $T^{-1}AT$, където T е матрицата на прехода от стария базис към новия. Тъй като и двата базиса са ортонормирани, матрицата T на прехода е ортогонална (вж. § 1, т. 12).

Следващите две твърдения се доказват с почти буквално повторение на разсъжденията от т. 4 и т. 5 и ще се ограничим само с формулировките.

6. Теорема за диагонализиране на ермитов оператор. *За всеки ермитов оператор в ненулево крайномерно унитарно пространство съществува ортонормиран базис, състоящ се от собствени вектори на оператора* (еквивалентно: *съществува ортонормиран базис, спрямо който матрицата на оператора е диагонална*).

7. Следствие (диагонализиране на ермитова матрица). *За всяка ермитова матрица A съществува унитарна матрица T, такава, че матрицата $T^{-1}AT$ да е диагонална.*

8. Привеждане на реална квадратична форма към главни оси. Връщаме се към гл. 1, § 2. Там видяхме, че всяка квадратична форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ може да се приведе в каноничен вид с помощта на неособена линейна смяна на променливите от вида

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \dots + \alpha_{1n}y_n \\ x_2 &= \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \dots + \alpha_{2n}y_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= \alpha_{n1}y_1 + \alpha_{n2}y_2 + \dots + \alpha_{nn}y_n \ . \end{aligned}$$

Пак там показахме, че ако $A = (a_{ij})$ е матрицата на квадратичната форма, а $T = (\alpha_{ij})$ е матрицата на смяната, то матрицата на формата, получена след смяната на променливите, е равна на $T^t AT$. Ако матрицата на смяната е ортогонална, ще казваме, че сме направили *ортогонална смяна* на променливите. Ако квадратичната форма е реална, матрицата й A е реална симетрична и според твърдението в т. 5 съществува реална *ортогонална* матрица T, за която матрицата $T^{-1}AT$ да е диагонална. От друга страна, за всяка ортогонална матрица T имаме $T^{-1} = T^t$, следователно $T^{-1}AT = T^t AT$. Всичко това означава, *че всяка реална квадратична форма може да бъде приведена в каноничен вид* (еквивалентно: матрицата й да бъде диагонална) *с помощта на подходяща ортогонална смяна на променливите.* Ако една реална квадратична форма е приведена в каноничен вид с помощта на ортогонална смяна на променливите, обикновено се казва, че тя е *приведена към главни оси.* Терминът *главни оси* произхожда от геометрията и мотивите за въвеждането му ще станат разбираеми по-късно.

9. Твърдение. *Всеки два собствени вектора на ермитов или симетричен оператор, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални.*

Доказателство. Нека $f(l_1)=\lambda_1 l_1,\ \ f(l_2)=\lambda_2 l_2$, където f е ермитов или симетричен оператор. Тъй като и в двата случая собствените стойности са реални числа, то

$$\lambda_1 < l_1, l_2 > = < f(l_1), l_2 > = < l_1, f(l_2) > = \lambda_2 < l_1, l_2 > .$$

Ако $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и сравним най-лявата и най-дясната страна в тези равенства, получаваме $< l_1, l_2 > = 0$.

10. Алгоритъм за диагонализиране на реална симетрична матрица. Ще изложим процедура, с помощта на която за произволна реална симетрична матрица $A=(a_{ij})$ от ред n може ефективно да се намери реална ортогонална матрица T, такава, че матрицата $T^{-1}AT$ да бъде диагонална. Засега знаем само, че матрицата T съществува. За целта разглеждаме реалното координатно линейно пространство $L=\mathbf{R}^n$ и стандартния базис в него. (Той се състои от наредените n-торки e_i', в които на i-то място стои единица, а на останалите места – нули, $i=1,\ldots,n$.) Спрямо стандартния базис всеки вектор $l=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ има координати $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Въвеждаме скаларно произведение така, че стандартният базис да се окаже ортонормиран: ако $m=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ е още един вектор, то по определение

$$< l, m > = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n .$$

Разглеждаме такъв линеен оператор $f: L \to L$, че матрицата му спрямо стандартния базис да бъде дадената матрица A. Тъй като тя е симетрична, операторът е симетричен. Нека $e_i=(\tau_{1i},\tau_{2i},\ldots,\tau_{ni}),\ \ i=1,2,\ldots,n$, е ортонормиран базис на координатното пространство, състоящ се от собствени вектори на симетричния оператор. Спрямо стандартния базис (стария базис) новите базисни вектори e_i имат координати $\tau_{1i},\tau_{2i},\ldots,\tau_{ni}$, следователно матрицата $T=(\tau_{ji})$, в която стълбовете са координатите (компонентите) на векторите e_i, е матрица на прехода от стария базис към новия. Тя е ортогонална, защото векторите e_i, $\ i=1,2,\ldots,n$, са ортонормирана система. От тези пояснения, надяваме се, вече е ясно, че проблемът за намирането на матрицата T е всъщност проблем за пресмятането на собствените вектори на оператора и последващото ортогонализиране на подходящо подбрана система от линейно независими собствени вектори. Тъй като матриците A и $T^{-1}AT$ са подобни, те имат едни и същи характеристични корени, следователно върху главния диагонал в диагоналната матрица $T^{-1}AT$ стоят характеристичните корени на матрицата A, като всеки корен е изписан толкова пъти, колкото е кратността му. Това означава следното: ако $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ са различните корени на характеристичния полином, съответно с кратности $k_1, k_2, \ldots, k_r$, то в ортонормирания базис, състоящ се от собствени вектори на оператора, има точно k_i на брой собствени вектори, съответстващи на собствената стойност λ_i, $i = 1,2,\ldots,n$. Нека

$$L_{\lambda_i} = \{l \in L \mid f(l) = \lambda_i l\}.$$

Доказателството, че L_{λ_i} е подпространство, което е инвариантно относно оператора, е рутинно упражнение. *Неговата размерност е* k_i *- кратността на корена* λ_i. Наистина размерността не може да бъде по-малка от k_i, защото в ортонормирания базис на цялото пространство, състоящ се от собствени вектори на оператора, има k_i на брой вектори, съответстващи на собствената стойност λ_i, те са линейно независими и принадлежат на подпространството L_{λ_i}, т. е. $\dim L_{\lambda_i} \geq k_i$. Строгото неравенство е невъзможно по следната причина. От твърдението в т. 9 лесно следва, че

$$L_{\lambda_1} + L_{\lambda_2} + \ldots + L_{\lambda_r} = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_r}.$$

Тъй като $k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n$, за размерността на директната сума имаме

$$\dim L = n \geq \dim(L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_r}) = \dim L_{\lambda_1} + \dim L_{\lambda_2} + \ldots + \dim L_{\lambda_r}$$
$$\geq k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n,$$

откъдето следва, че за никоя стойност на i не е възможно $\dim(L_{\lambda_i}) > k_i$. Следователно

(1) $$L = \mathbf{R}^n = L_{\lambda_1} \oplus L_{\lambda_2} \oplus \ldots \oplus L_{\lambda_r}.$$

Ако λ_i е характеристичен корен, всички собствени вектори на оператора, съответстващи на собствената стойност λ_i, са ненулевите решения на хомогенната система

$$
(2)\qquad
\begin{array}{l}
(a_{11}-t)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\
a_{21}x_1 + (a_{22}-t)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-t)x_n = 0
\end{array}
$$

при $t = \lambda_i$ (вж. Ч. I, гл. 4, § 6). Заедно с нулевото решение те образуват подпространството L_{λ_i} . Избираме фундаментална система от решения на системата (2) и я ортогонализираме по метода на Грам – Шмидт. По този начин ще получим ортонормиран базис на подпространството L_{λ_i} , състоящ се от k_i на брой вектори. От разлагането (1) и от твърдението в т. 9 следва, че обединението на така построените ортонормирани базиси на подпространствата $L_{\lambda_1},\ldots,L_{\lambda_r}$, е ортонормиран базис на пространството L, състоящ се от собствени вектори на симетричния оператор. Вече казахме как се изписва матрицата T .

§ 5. Спрегнати оператори в евклидови пространства

1. Определение. Нека L е евклидово пространство със скаларно произведение $<,>$, а $f : L \to L$ е линеен оператор, дефиниран в L. Ще казваме, че линейният оператор $f^* : L \to L$ е *спрегнат на* f , ако

$$(1)\qquad < f(l), m > = < l, f^*(m) > \qquad \forall\ l, m \in L.$$

Ако $f = f^*$, то очевидно става дума за симетричен оператор. От определението се вижда, че ако f^* съществува, то f е спрегнат на f^*, т. е. $(f^*)^* = f$. Дали за произволен оператор f може да се дефинира негов спрегнат оператор и по колко начина може да се направи това? Отговорът се дава от следното:

2. Твърдение. *Ако $f : L \to L$ е произволен линеен оператор в евклидово пространство, то спрегнатият оператор f^* съществува и е еднозначно определен. Ако A е матрицата на f спрямо ортонормиран базис, то матрицата на f^* спрямо същия базис е A^t .*

Доказателство. Нека $e_1,\ldots,e_n$ е ортонормиран базис и

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

са координатите на векторите l, m, записани съответно като матрици-стълбове, а A е матрицата на оператора f. Координатите на вектора $f(l)$ са AX. Тъй като базисът е ортонормиран, то

$$< f(l), m > = (AX)^t \cdot Y = X^t \cdot A^t Y.$$

Най-дясната страна може да се интерпретира като $< l, f^*(m) >$, където f^* е линеен оператор, зададен с матрицата A^t спрямо разглеждания базис. Очевидно е, че f^* е спрегнат на f.

Нека операторите f_1^*, f_2^* са спрегнати на f и са различни. По определение имаме

$$< f(l), m > = < l, f_1^*(m) > = < l, f_2^*(m) >,$$

следователно

$$< l, (f_1^* - f_2^*)(m) > = 0 \quad \forall \; l, m \in L.$$

Тъй като $f_1^* \neq f_2^*$, то съществува вектор m_0, за който $(f_1^* - f_2^*)(m_0) = $ $= m_0' \neq 0$. От равенството $< l, m_0' > = 0$, изпълнено за всеки вектор $l \in L$, следва в частност $< m_0', m_0' > = 0$, откъдето получаваме $m_0' = 0$. Полученото противоречие завършва доказателството.

Ще отбележим, че ако f, g са произволни линейни оператори в евклидово пространство, то

(2) $$(fg)^* = g^* f^*.$$

Наистина: $< fg(l), m > = < g(l), f^*(m) > = < l, g^* f^*(m) >$.

Ако операторът f е обратим, то

$$(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}.$$

Това следва непосредствено от забележката, че спрегнат на единичния оператор id (идентитета) е единичният оператор id, от тъждеството (2) и от тъждеството $ff^{-1} = f^{-1}f = id$. Ясно е, че ако операторът е обратим, то спрегнатият му оператор също е обратим.

Ортогоналните оператори се характеризират със следното свойство: *в евклидово пространство линейният оператор f е ортогонален точно* *тогава, когато* $f^* = f^{-1}$. Наистина, ако f е ортогонален, операторът f^{-1} също е ортогонален и

$$< f(l), m > = < f^{-1} f(l), f^{-1}(m) > = < l, f^{-1}(m) >,$$

следователно $f^* = f^{-1}$. Нека $f^* = f^{-1}$. Имаме $f^* f = id$ и

$$< f(l), f(m) > = < l, f^* f(m) > = < l, m >,$$

т. е. операторът е ортогонален.

3. Теорема (полярно разлагане на линеен оператор)**.** *За всеки обратим линеен оператор* $f : L \to L$ *в евклидово пространство съществуват еднозначно определени симетрични оператори* h_1, h_2 *и ортогонални оператори* g_1, g_2*, удовлетворяващи следните условия:*

а) $f = h_1 g_1 = g_2 h_2$;

б) собствените стойности на симетричните оператори h_1, h_2 *са положителни числа.*

Доказателство. Разглеждаме оператора $f^* f$. Той е симетричен, защото според тъждеството (2) $(f^* f)^* = f^* (f^*)^* = f^* f$. Както видяхме в предишния параграф, всеки симетричен оператор в n-мерно евклидово пространство има n собствени стойности (реални числа). Ще покажем, че собствените стойности на симетричния оператор $f^* f$ са положителни числа. Действително, нека μ е собствена стойност и $x_0 \neq 0$ е съответен собствен вектор: $f^* f(x_0) = \mu x_0$. Имаме:

$$\mu < x_0, x_0 > =< \mu x_0, x_0 > = < f^* f(x_0), x_0 > = < f(x_0), f(x_0) > > 0.$$

В третото равенство използвахме, че $(f^*)^* = f$, а строгото неравенство е защото $f(x_0) \neq 0$ (всеки обратим оператор изобразява ненулев вектор в ненулев). Тъй като $< x_0, x_0 >$ и $< f(x_0), f(x_0) >$ са строго положителни, то очевидно $\mu > 0$.

Според т. 4 от предишния параграф съществува ортонормиран базис на пространството, спрямо който матрицата на симетричния оператор $f^* f$ е диагонална. Нека тя е $A = diag(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, където $\mu_i > 0$ са собствените стойности на оператора. Означаваме $\lambda_i = \sqrt{\mu_i}$, $i = 1, \ldots, n$ и дефинираме линеен оператор $h_2 : L \to L$ така, че матрицата му спрямо избрания ортонормиран базис да е $B = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Тъй като $A = B^2$, то очевидно $f^* f = h_2^2$. Операторът h_2 е симетричен, защото матрицата му спрямо избрания ортонормиран базис е симетрична. Собствените му стойности са $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и очевидно са положителни. Нека $g_2 = (f^*)^{-1} h_2$. Очевидно $f = g_2 h_2$. Ще покажем, че операторът g_2 е ортогонален. Достатъчно е да проверим, че $g_2^* = g_2^{-1}$. Но $g_2^* = [(f^*)^{-1} h_2]^* = h_2^* f^{-1}$ $= h_2 f^{-1}$ и вече е ясно, че $g_2 g_2^* = id$. Ако за оператора ff^* повторим горните разсъждения, ще стигнем до разлагането $f = h_1 g_1$.

За да докажем единствеността на разлагането от теоремата, е необходима следната

Лема. *Нека* h *и* h' *са симетрични оператори в* n*-мерно евклидово пространство и нека собствените им стойности са положителни числа. Тогава операторът* hh' *има* n *собствени стойности и те са положителни числа.*

Доказателство. От проведените по-горе разсъждения се вижда, че щом като собствените стойности на симетричен оператор са положителни числа, то той може да се представи като квадрат на симетричен оператор, чиито собствени стойности също са положителни числа. Следователно $h = h_1^2$, $h' = h_2^2$, където операторите h_1, h_2 са симетрични и собствените им стойности са положителни числа. Операторите h_1, h_2 са обратими, защото собствените им стойности са различни от нула. Следователно

$$hh' = h_1^2 h_2^2 = h_1 \cdot (h_1 h_2)(h_1 h_2)^* \cdot h_1^{-1}.$$

Пак от разсъжденията по-горе следва, че операторът $(h_1 h_2)(h_1 h_2)^*$ е симетричен и собствените му стойности (те са n на брой) са положителни числа. Но точно те са собствените стойности и на оператора hh'. (Ако последното не е ясно, изберете базис, преминете към матрици на операторите и използвайте, че подобните матрици имат едни и същи характеристични корени.)

Доказателство на единствеността от теоремата. Нека $f = hg$ $= h'g'$, където h и h' са симетрични оператори и собствените им стойности са положителни числа, а операторите g, g' са ортогонални. Имаме $h'^{-1} h = g' g^{-1}$. Двата оператора от лявата страна удовлетворяват условията на лемата, следователно операторът $h'^{-1} h$ има n собствени стойности и те са положителни числа. Тъй като произведението на ортогонални оператори е ортогонален оператор, то от дясната страна на равенството стои ортогонален оператор, чиито собствени стойности са положителни числа и броят им е равен на размерността на пространството. Оттук следва, че операторът е единичният: ако изберем ортонормиран базис, спрямо който матрицата на оператора е в каноничен вид (вж. § 3, т. 4 и т. 7), тя ще бъде единичната матрица. Следователно $g = g'$ и $h = h'$. Еднозначността на представянето $f = g_2 h_2$ се доказва аналогично.

Както ще видим в следващата глава, доказаната теорема има важно приложение в геометрията.

С оглед на приложенията ще дадем матрична интерпретация на теоремата. Нека A е произволна реална неособена матрица от ред n. Нека в n-мерно евклидово пространство изберем ортонормиран базис и да разгледаме линейния оператор f с матрица A спрямо избрания базис. Той е обратим (защото A е неособена), следователно може да се представи във вида $f = hg$, където h е симетричен оператор с положителни собствени стойности, а g е ортогонален оператор. Нека H и G са матриците, съответно на h и g спрямо избрания ортонормиран базис. Очевидно $A = HG$. Матрицата H е симетрична с положителни характеристични корени, а G е ортогонална. Знаем, че съществува ортогонална матрица T, за която $T^{-1}HT = H_1$ е диагонална матрица. В случая по диагонала стоят положителни числа – характеристичните корени на матрицата H. Имаме

$$T^{-1}AT = T^{-1}(HG)T = T^{-1}HT \cdot T^{-1}GT = H_1 G_1,$$

където матрицата $G_1 = T^{-1}GT$ е ортогонална, защото е произведение на ортогонални матрици. Доказахме:

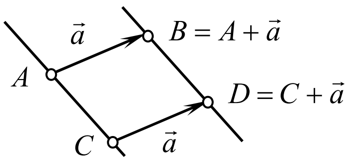
4. Следствие от теоремата. *За всяка реална неособена матрица A от ред n съществува ортогонална матрица T, такава, че матрицата $T^{-1}AT$ е произведение на диагонална матрица с положителни елементи по диагонала и ортогонална матрица.*

Глава 3

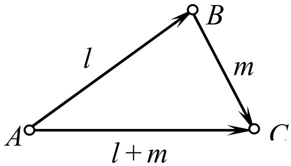
Афинни пространства

§1. Афинни пространства и афинни подпространства

1. Мотивировка. В Ч. I, гл. 5 въведохме линейното пространство на свободните вектори. Идеята беше, че всяка наредена двойка точки (A, B) в тримерното пространство определя насочена отсечка $\overrightarrow{AB}$, а множеството от всички насочени отсечки, които са равни на $\overrightarrow{AB}$, определя нов обект, който нарекохме *свободен вектор*. Факта, че свободният вектор $\vec{a}$ е определен от насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$, записвахме кратко като $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$. Обратно, нека е даден векторът $\vec{a}$. Тогава за произволно избрана точка C съществува еднозначно определена точка D, за която $\overrightarrow{CD} \in \vec{a}$. Казано понеформално, както и да изберем точката C, винаги можем да нанесем представител $\overrightarrow{CD}$ на вектора $\vec{a}$ с начало точката C.



Черт. 6



Черт. 7

Удобно е и по-образното мислене: векторът $\vec{a}$ *премества* точката C в точка D. Полезна е и следната интерпретация: всеки вектор $\vec{a}$ задава изображение на множеството от точките в тримерното пространство в себе си по правилото: точката C се изобразява в единствената точка D, за която насочената отсечка $\overrightarrow{CD}$ е представител на вектора $\vec{a}$. Очевидно става дума за познатата ни *транслация* (успоредно пренасяне) с помощта на вектора $\vec{a}$, при която всяка права се изобразява в успоредна на себе си.

При такава интерпретация е полезно да се въведе и подходящо означение, например, $B = A + \vec{a}$. Без да се задълбочаваме повече, ще подчертаем, че в анализираната ситуация са налице две множества, чиито елементи имат различна природа – от една страна, множеството на точките, а от друга – множеството на свободните вектори, които в някакъв смисъл действат на точките. Ситуацията се аксиоматизирира от следното

2. Определение. *Афинно пространство над полето* N се нарича всяка тройка $(\mathrm{D} \ / \ L, +)$, в която D е множество, чиито елементи ще наричаме *точки*, L е линейно пространство над полето N, а $+$ е външна бинарна операция $\mathrm{D} \times L \to \mathrm{D}$ / която на всяка наредена двойка (A, l), където A е точка от D, а l е вектор от L, съпоставя точка $A + l$ (т. е. $(A, l) \to A + l$) и са в сила следните аксиоми:

а) $(A + l) + m = A + (l + m)$ за всички точки A и за всички вектори $l, m \in L$ (черт. 7);

б) $A + 0 = A$ за всяка точка A и за нулевия вектор 0;

в) за всеки две точки A, B съществува, и то единствен, вектор $l \in L$, за който $B = A + l.$

Договаряме се, че единствения вектор l от аксиома в) ще бележим с $B - A$ или най-често с $\overrightarrow{AB}$, т. е $\overrightarrow{AB} = l$. Ако операцията + се подразбира, или се подразбира от контекста и линейното пространството L, то афинно пространство ще наричаме двойката $(\mathrm{D} \ / \ L)$ или даже само множеството D. Навсякъде точките от D ще означаваме с големи латински букви, а векторите от L - с малки латински.

З а б е л е ж к а. Думата пространство, предшествана от прилагателно, вече означава най-различни неща: линейно пространство, евклидово пространство, афинно пространство и т. н. Ще говорим и за онова тримерно пространство, което е изучавано още от Евклид, и е обект на училищната геометрия. За да избегнем недоразуменията, ще си позволяваме да го наричаме *пространството от училищната геометрия*. Съзнаваме, че терминът не е съвсем удачен, но употребата е принудителна.

П р и м е р и. 1) Нека L е линейно пространство над полето N. Тогава тройката $(L, L, +)$, където събирането + е събирането на вектори в L, е афинно пространство над полето N 1Условията а) – в) очевидно са изпълнени. Подчертаваме, че в случая е налице известна двойственост: от една страна разглеждаме елементите на L като точки, а от друга страна ги разглеждаме като вектори, които транслират точките. Този пример най-често ще бъде използван във варианта, когато $L = \mathrm{N}^n$ е координатното линейно пространство над полето N.

2) Нека D_3 е тримерното пространство от точки от училищната геометрия, а L е тримерното линейно пространство на свободните вектори. След коментара в т. 1 е очевидно, че D_3 е афинно пространство. Аксиомата а) е илюстрирана на черт. 7. В случая можем да я запишем и като $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

3) Да изберем в D_3 някаква равнина ε и да означим с D_2 множеството от точките ѝ. Нека V е множеството на всички свободни вектори, които са компланарни с равнината ε. Знаем, че V е двумерно линейно пространство, и ако + има същия смисъл, както в т. 1, то очевидно тройката $(\mathrm{D}_2, V, +)$ е афинно пространство.

4) Нека g е някаква права в D_3. Ако D_1 означава множеството от точките ѝ, а V е едномерното линейно пространство на свободните вектори, колинеарни с правата g, то D_1 е афинно пространство.

С л е д с т в и я о т а к с и о м и т е. Предполагаме, че $(\mathrm{D} / L, +)$ е афинно пространство над поле N. В сила са:

1) Ако $\overrightarrow{AB} = l$, то $\overrightarrow{BA} = -l$. Наистина, от аксиомите имаме

$$A = A + 0 = A + (l - l) = (A + l) + (-l) = B + (-l).$$

Равенството на най-лявата и на най-дясната страна означава, че векторът $-l$ премества точката B в точката A, т. е. $\overrightarrow{BA} = -l$.

2) Да изберем и фиксираме някаква точка O. Според аксиомите за всяка точка M съществува еднозначно определен вектор $l = \overrightarrow{OM}$, за който $M = O + \overrightarrow{OM}$; ще го наричаме *радиус-вектор на точката* M. Обратно, всеки вектор l е радиус-вектор на еднозначно определена точка, а именно на $O + l$. По този начин се реализира биективно съответствие между точките на пространството и векторите на линейното пространство L. В частност, *при фиксирана точка* O *множеството от радиус-векторите на всички точки от пространството* D *съвпада с линейното пространство* L.

3) За всеки три точки A, B, C имаме

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

Наистина, според аксиома а)

$$A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C .$$

Според аксиома в) векторът l, за който $A + l = C$, е еднозначно определен и го бележим с $\overrightarrow{AC}$. Оттук следва исканото равенство.

4) От равенството в 3), приложено за точките O, A, B, имаме

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}, \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} .$$

Последното равенство може да се прочете така: *векторът* $\overrightarrow{AB}$*, определен от точките* A, B*, е равен на радиус-вектора на "края", минус радиус-вектора на "началото"* – израз, в който си позволихме аналогия с насочените отсечки в пространството от училищната геометрия.

Горните непосредствени следствия от аксиомите създават чувството, че в абстрактните афинни пространства "всичко е както в пространството от училищната геометрия". Това в значителна степен е така, но една от съществените новости е, че не сме обвързани с тримерната размерност на училищната геометрия.

3. Определение. *Размерност* на афинното пространство $(\mathrm{D} \ / \ L, +)$ ще наричаме размерността на линейното пространство L.

Вече знаем, че ако е дадено някакво поле и произволно естествено число n, то съществува линейно пространство L (над даденото поле) с размерност n. Пример 1) от т. 2 показва, че съществува и афинно пространство с размерност n. Разбира се съществуват и безкрайномерни линейни пространства (например, $L = \mathrm{N}\ [x]$ - линейното пространство на полиномите на x с коефициенти от полето N). Следователно съществуват афинни пространства с всякакви възможни размерности. Фактът, че абстрактното понятие "афинно пространство" е освободено от оковите на размерността, е първото стъпало за изграждането на многомерни геометрии. Както се вижда от горните примери 2) – 4), училищната геометрия се занимава само с афинни пространства с размерности 1 (правите), 2 (равнините) и 3 – цялото пространство.

4. Подпространства. Естествено е в определението на афинно подпространство да се постави изискването то самото да е афинно пространство. Точното определение обаче е по-сложно.

Нека $(\mathrm{D} \ / \ L, +)$ е афинно пространство над полето N . Ще казваме, че подмножеството $\mathrm{E} \subset \mathrm{D}$ е *афинно подпространство* на D , ако или E е празното множество, или ако са изпълнени следните условия: а) $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$; б) множеството $V = \{l = \overrightarrow{AB} \mid A, B \in \mathcal{E}\}$ е подпространство на линейното пространство L; в) тройката ($\mathcal{E}$, V,+) е афинно пространство относно същата операция + , дефинирана в $\mathcal{D}$. Размерността на линейното пространство V ще наричаме *размерност на афинното подпространство* и ще я бележим с $\dim \mathcal{E}$. (Ако $\mathcal{E}$ е празното множество, размерността не е дефинирана.)

Това формално определение не е съвсем удобно за приложенията. Не е съвсем ясно, например, как трябва да изберем множеството от точки $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}$ и линейното подпространство $V \subset L$, че наистина да получим афинно пространство (по отношение на операцията + няма избор – тя е зададена). Ще забележим обаче, че ако $\mathcal{E}$ е афинно подпространство и M_0 е произволно избрана точка от $\mathcal{E}$, то

(1) $$\mathcal{E} = \{M \mid M = M_0 + l,\ l \in V\}.$$

(*Всички точки от афинното подпространство* $\mathcal{E}$ / *и само те, се получават, ако на фиксирана точка* M_0 *от* $\mathcal{E}$ *действаме с всички вектори от линейното подпространство* V .) Наистина, ако M е точка от $\mathcal{E}$, то по определение съществува (единствен) вектор $l \in V$, за който $M = M_0 + l$. Обратно, ако $l \in V$, то пак по определението на афинно пространство имаме $M = M_0 + l \in \mathcal{E}$.

В сила е и следното: ако ($\mathcal{E}$, V,+) е афинно подпространство, то

(2) $$V = \{l \mid l = \overrightarrow{M_0 M},\ M \in \mathcal{E}\}.$$

Това е просто следствие от аксиомите на афинно пространство. За него стана дума в т. 2: при фиксирана точка M_0 *линейното пространство се състои от радиус-векторите на всички точки.*

Горните наблюдения подсказват начин за построяване на афинни подпространства.

5. Твърдение. *Нека* $(\mathcal{D} \,/\, L, +)$ *е афинно пространство,* M_0 *е точка, а* V *е подпространство на линейното пространство* L. *Тогава, ако*

$$\mathcal{E} = \{M \mid M = M_0 + l,\ l \in V\},$$

то ($\mathcal{E}$, V, + *) е афинно подпространство на* $\mathcal{D}$.

Доказателство. Аксиомите а) и б) не се нуждаят от проверка, защото са изпълнени в цялото афинно пространство D . Трябва да проверим само две неща: първо, ако A е точка от E , то $A+l$ също е точка от E за всеки вектор $l \in V$ и, второ, ако A, B са точки от E , то векторът $l = \overrightarrow{AB}$ е от линейното подпространство V. Първото е налице, защото ако A е точка от E /то $A = M_0 + l_1$ за някакъв вектор $l_1 \in V$, следователно $A + l = = (M_0 + l_1) + l = M_0 + (l_1 + l)$, където $l_1 + l \in V$. Второто следва от доказания по-горе факт, че $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_0B} - \overrightarrow{M_0A}$. Тъй като векторите от дясната страна са от линейното подпространство V , то и $l = \overrightarrow{AB}$ също е от V.

Ще забележим, че *всяко афинно подпространство, което не е празно множество, може да се получи по начина, описан в твърдението*, защото ако (E, $V, +$) е подпространство, то е в сила равенството (1). Линейното подпространство V се нарича *направляващо* (директорно) за афинното подпространство E .

Всяко афинно подпространство с размерност нула се състои само от една точка (в случая V е нулевото подпространство). Афинните подпространства с размерност 1 се наричат *прави*, а подпространствата с размерност 2 – *равнини*. Аналогичен термин се използва, ако $\dim V = k$ и $k \geq 2$. Тогава се говори за k*-мерна равнина*. Ако афинното пространство (D / $L, +$) има размерност n, равнините с размерност $n-1$ обикновено се наричат *хиперравнини*.

Понятието *права*, което дефинирахме въз основа на абстрактните афинни пространства, добре се съгласува с представите ни от геометрията. Ще покажем, че *всеки две различни точки определят единствена права* (през две точки минава единствена права). Наистина, нека точките A, B са различни. Следователно векторът $l_0 = \overrightarrow{AB}$ е ненулев и поражда едномерно линейно пространство $V = \{\lambda l_0 \mid \lambda \in \mathrm{N}\}$. Нека $\mathrm{E} = \{M \mid M = A + l, l \in V\}$. Тогава тройката $(\mathrm{E}, V, +)$ е едномерно афинно пространство (права), което съдържа точките A, B, защото $A = A + 0$ и $A + l_0 = B$. Нека $(\mathrm{E}', V', +)$ е още една права, която съдържа точките A, B. Ненулевият вектор $l_0 = \overrightarrow{AB}$ задължително принадлежи на V' , следователно за едномерните линейни пространства V, V' имаме $V = V'$. Тъй като точката A лежи както в E , така и в E' , равенството $\mathrm{E} = \mathrm{E}'$ следва от (1).

Нека (E, $V, +$) е k -мерна равнина, а M_0 е точка от нея. Да изберем базис $p_1, p_2, \ldots, p_k$ на подпространството V. Всеки вектор $l \in V$ се представя еднозначно във вида $l = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_k p_k$, $\lambda_i \in \mathrm{N}$. Тогава според (1) точката M лежи в E тогава и само тогава, когато

$$M = M_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \ldots + \lambda_k p_k . \tag{3}$$

Това уравнение се нарича *векторно параметрично уравнение* на равнината. В тримерното афинно пространство от училищната геометрия видовете афинни подпространства са: празно множество, точки, прави, двумерни равнини и цялото пространство. Векторните параметрични уравнения на правите и равнините бяха изведени в Ч. I, гл. 6.

6. Афинни координатни системи и афинни координати. Нека (D / $L, +$) е крайномерно афинно пространство. *Афинна координатна система* ще наричаме всяко множество $\{O, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, състоящо се от точката $O \in \mathrm{D}$ (*начало* на координатната система) и базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ на линейното пространство L. Ако l е вектор от линейното пространство L, то той се записва еднозначно във вида $l = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$. Коефициентите $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (те са от полето N) се наричат *координати* на вектора l спрямо *дадената афинна координатна система*. Това понятие е добре познато от Ч. I, гл. 3 и гл. 4. Координати на *точката* $M \in \mathrm{D}$ се наричат координатите на нейния радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$. *Ако точките* M_1, M_2 *имат координати, съответно* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$, за вектора $\overrightarrow{M_1 M_2}$ имаме векторното равенство $\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$, следователно *векторът* $\overrightarrow{M_1 M_2}$ *има координати* $y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n$ (“координатите на края минус съответните координати на началото”).

Нека A, B са точки, а l е вектор. Ще покажем, че *координатите на точката* $B = A + l$ *са равни на координатите на точката* A *плюс съответните координати на вектора* l. Наистина, от даденото равенство следва $\overrightarrow{AB} = l$. Тъй като $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, получаваме векторното равенство $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + l$ и твърдението вече е очевидно, защото по определение координатите на точките A, B са координатите на векторите $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$.

Нека $\{O, e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и $\{O', e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ са две афинни координатни системи, които за удобство ще наричаме съответно “стара” и “нова”. Тъй като координатите на векторите зависят само от базисите на линейното пространство L и не зависят от точките O и O', то как ще се сменят координатите на векторите при смяна на старата афинна координатна система с нова вече знаем от Ч. I. Интересно е само как се сменят координатите на точките. Нека

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

е матрицата на прехода от стария базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ към новия $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$. Знаем, че $\det T \neq 0$ и ако X е матрицата-стълб от старите координати на някакъв вектор, а X' е матрицата-стълб от новите координати на същия вектор, то

(4) $$X = TX'$$

(вж. Ч. I, гл. 3, § 4). Нека M е произволна точка, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ са съответно старите и новите ѝ координати (това са координатите на вектора $\overrightarrow{OM}$ спрямо старата координатна система и на вектора $\overrightarrow{O'M}$ спрямо новата). Нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са старите координати на новото начало и да означим

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Имаме векторното равенство

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OO'}$$

и от него се вижда, че старите координати на вектора $\overrightarrow{O'M}$, записани като матрица-стълб, са $X - a$, а новите са X'. Като приложим за координатите на вектора $\overrightarrow{O'M}$ равенството (4), получаваме $X - a = TX'$, следователно

(5) $$X = TX' + a\,.$$

Получихме, че координатите на точките при смяна на една афинна координатна система с друга се сменят с помощта на матричната формула (5). Тя е еквивалентна на равенствата

$$(5')\qquad \begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x_1' + \alpha_{12}x_2' + \ldots + \alpha_{1n}x_n' + a_1 \\ x_2 &= \alpha_{21}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \ldots + \alpha_{2n}x_n' + a_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \alpha_{n1}x_1' + \alpha_{n2}x_2' + \ldots + \alpha_{nn}x_n' + a_n\,. \end{aligned}$$

8. Афинна независимост на точки. Ще казваме, че точките A_0, A_1, $\ldots, A_k$, $k \geq 1$, от афинното пространство $\mathbb{D}$ са *афинно независими*, ако векторите $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ са линейно независими.

В определението първата точка A_0 играе особена роля. Ще покажем, че афинната независимост на дадените точки не зависи от това, коя от точките е първа. При $k = 1$ имаме $\overrightarrow{A_1A_0} = -\overrightarrow{A_0A_1}$ и няма какво да се доказва. Нека $k > 1$ и да изберем за първа точката с номер $j > 0$. Да предположим, че за векторите $\overrightarrow{A_jA_i}$, $0 \leq i \leq k, \quad i \neq j$, е изпълнено

$$\sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{A_jA_i} = 0\,, \quad \lambda_i \in \mathbb{N}\quad .$$

Ако умножим с λ_i двете страни на равенството $\overrightarrow{A_0A_j} + \overrightarrow{A_jA_i} = \overrightarrow{A_0A_i}$ и сумираме по $i = 0, \ldots, k, \quad i \neq j$, получаваме

$$\left(\sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_j} \right) + 0 = \sum_{i \neq j} \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}\,,$$

откъдето веднага следва, че всички коефициенти λ_i са равни на нула, защото векторите $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_j}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$ са линейно независими. Следователно линейно независими са и векторите $\overrightarrow{A_jA_i}$, $0 \leq i \leq k, \quad i \neq j$.

Нека за нагледност си мислим, че $\mathbb{D}$ е тримерното афинно пространство от училищната геометрия. Знаем, че система от един свободен вектор е линейно независима точно тогава, когато той е ненулев, система от два свободни вектора е линейно независима точно тогава, когато те не са колинеарни, а система от три вектора – точно тогава, когато те не са компланарни. В съответствие с това две точки са афинно независими точно тогава, когато са различни, три точки – точно тогава, когато не лежат на една права (не са *колинеарни*), а четири точки са афинно независими точно тогава, когато не лежат в една равнина (не са *компланарни*).

§ 2. Афинни изображения

1. Определение. Нека (D_1, L_1) и (D_2, L_2) са две афинни пространства над едно и също поле. *Афинно линейно* или просто *афинно изображение* на първото пространство във второто се нарича всяка двойка изображения (f, Df), където $f : \mathrm{D}_1 \to \mathrm{D}_2$, $Df : L_1 \to L_2$ и са изпълнени следните условия:

а) Df е линейно изображение;

б) за всеки две точки $A, B \in \mathrm{D}_1$ е в сила равенството

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = Df(\overrightarrow{AB}).$$

Забележка. Означението Df изглежда малко странно. Оправдание може да се намери в курсовете по математически анализ: в понятийния апарат на анализа Df е диференциала на изображението f.

Пример. Нека $(\mathrm{D} \,/\, L, +)$ е афинно пространство, l е избран и фиксиран вектор от L, а изображението $t_l : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ е дефинирано с правилото $t_l(A) = A + l$. Нека E е единичният линеен оператор, дефиниран в L, т. е. $\mathrm{E}(m) = m$ за всеки вектор $m \in L$. Твърдим, че двойката (t_l, E) е афинно изображение на пространството D в себе си. Необходимо е да проверим само условието б). Нека $\overrightarrow{AB} = m$, т. е. $B = A + m$. Тогава $t_l(A) + m = (A + l) + m = (A + m) + l = B + l = t_l(B)$. Като сравним най-лявата и най-дясната страна, получаваме, че $\overrightarrow{t_l(A)t_l(B)} = m = \overrightarrow{AB} = \mathrm{E}(\overrightarrow{AB})$. Афинното изображение t_l се нарича *транслация* (успоредно пренасяне) *с помощта на вектора* l. В хода на доказателството получихме, че

$$\overrightarrow{(A + l)(B + l)} = \overrightarrow{AB}$$

за всеки вектор $l \in L$.

От определението на афинно пространство имаме, че всеки две точки A, B определят еднозначно вектор $l = \overrightarrow{AB}$, за който $B = A + l$. Смисълът на условието б) е, че образите $f(A), f(B)$ на точките A, B определят същия вектор, в който се изобразява векторът $l = \overrightarrow{AB}$ при линейното изображение Df. Условието б) може да се запише и като

$$f(B) = f(A) + Df(\overrightarrow{AB}). \tag{1}$$

Тъй като дясната страна в това равенство е еднозначно определена от образа $f(A)$ на една конкретна точка A и от линейното изображение Df, възниква подозрение, че за да "построим" афинно изображение, е достатъчно да зададем образа на една конкретна точка и да изберем линейно изображение $L_1 \to L_2$. Както показва следващият резултат, това наистина е така.

2**. Твърдение.** *Нека* $(\mathtt{D}_1, L_1)$ *и* $(\mathtt{D}_2, L_2)$ *са две афинни пространства над едно и също поле. Тогава за всеки две точки* $A_1 \in \mathtt{D}_1$ *и* $A_2 \in \mathtt{D}_2$ *и за всяко линейно изображение* $g : L_1 \to L_2$ *съществува единствено афинно изображение* $f : \mathtt{D}_1 \to \mathtt{D}_2$*, за което* $f(A_1) = A_2$ *и* $Df = g$.

Доказателство. Нека B е произволна точка от афинното пространство $\mathtt{D}_1$.Дефинираме $f(B)$ с равенството

$$f(B) = A_2 + g(\overrightarrow{A_1B}).$$

Дясната му страна е еднозначно определена, защото за всяка точка B векторът $\overrightarrow{A_1B}$ е еднозначно определен. Ще покажем, че изображението $f : \mathtt{D}_1 \to \mathtt{D}_2$ е афинно и удовлетворява исканите условия. Преди това ще забележим, че с помощта на равенството $\overrightarrow{(A+l)(B+l)} = \overrightarrow{AB}$, доказано в т. 1, лесно се получава равенството

$$\overrightarrow{(A+l)(B+m)} = \overrightarrow{A(B+m-l)}.$$

Нека $g(\overrightarrow{A_1A}) = l'$ и $g(\overrightarrow{A_1B}) = l''$. Тъй като $\overrightarrow{A_1B} - \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{AB}$, от линейността на изображението g следва, че $l'' - l' = g(\overrightarrow{AB})$. Имаме

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{(A_2+l')(A_2+l'')} = \overrightarrow{A_2(A_2+l''-l')} = g(\overrightarrow{AB}).$$

Следователно изображението f наистина е афинно и линейната му част е g . От определението на f се вижда, че $f(A_1) = A_2 + g(\overrightarrow{A_1A_1}) = A_2 + 0 =$ $= A_2$.

3. Твърдение. *Нека* (D_1, L_1) *и* (D_2, L_2) *са две афинни пространства над едно и също поле. Нека пространството* D_1 *има размерност* n *и нека* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *са* $n+1$ *афинно независими точки от* D_1*, а* $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n$ *са произволни точки от пространството* D_2*. Тогава съществува единствено афинно изображение* $f : \mathrm{D}_1 \to \mathrm{D}_2$*, за което* $f(A_i) = A'_i$ *при* $i = 0, \ldots, n$.

Доказателство. Нека $e_i = \overrightarrow{A_0A_i}$, а $g_i = \overrightarrow{A'_0A'_i}$, $i = 1, \ldots, n$. В случая линейно независимите вектори $e_1, \ldots, e_n$ са базис на n-мерното линейно пространство L_1 . От Ч. I, гл. 3, § 1 знаем, че съществува единствено линейно изображение $Df : L_1 \to L_2$, за което $Df(e_i) = g_i$, $i = 1, \ldots, n$. Дефинираме изображението $f : \mathrm{D}_1 \to \mathrm{D}_2$ с равенството

$$f(M) = A'_0 + Df(\overrightarrow{A_0M}) .$$

Според твърдението в т. 2 то е афинно изображение и очевидно има исканите свойства.

Понятието *просто отношение* (A, B, C) на три точки можем да пренесем буквално от Ч. I, гл. 5, § 2, т. 13: ако точките B, C са различни и $\overrightarrow{AC} = \lambda_1 \overrightarrow{BC}$, то $(A, B, C) = \lambda_1$.

4. Твърдение. *При инективно афинно изображение всеки три точки, които лежат на една права, се изобразяват в три точки, които също лежат на една права, като се запазва и простото отношение на точките.*

Доказателство. Ако някои две от точките съвпадат, то няма какво да се доказва. Нека A, B, C са три различни точки върху една права. Тогава според равенството (3) от т. 5, § 1 (сега $k = 1$) правата се състои от всички точки M от вида

$$M = A + \lambda \overrightarrow{BC} ,$$

или еквивалентно: $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{BC}$. Тъй като трите точки лежат на една права, при подходяща стойност на λ , например $\lambda = \lambda_1$, имаме

(2) $$\overrightarrow{AC} = \lambda_1 \overrightarrow{BC} .$$

Ако f е афинно изображение, получаваме

$$\overrightarrow{f(A)f(C)} = Df(\overrightarrow{AC}) = Df(\lambda_1 \overrightarrow{BC}) = \lambda_1 Df(\overrightarrow{BC}) = \lambda_1 \overrightarrow{f(B)f(C)} ,$$

където последователно използвахме определението, равенството (2) и факта, че Df е линейно изображение. Тъй като изображението f е инективно, точките $f(B), f(C)$ са различни. Равенството на най-лявата и на най-дясната страна в последните равенства означава, че точките $f(A)$, $f(B)$, $f(C)$ лежат на една права и простото им отношение също е равно на λ_1.

Запазването на простото отношение при инективни афинни изображения има важен геометричен смисъл. Нека, например, D_3 е реалното тримерно афинно пространство от училищната геометрия. Тогава, ако точките A, B са различни, то простото отношение (A, B, C) на трите точки A, B, C е отрицателно число точно тогава, когато точката C лежи във вътрешността на отсечката AB, т. е. когато точката C лежи *между* точките A, B. Нека $f : \mathrm{D}_3 \to \mathrm{D}_3$ е инективно афинно изображение и за удобство $f(M) = M'$. При горните условия имаме $(A, B, C) = (A', B', C')$, т. е. точката C' лежи между точките A', B'. Следователно *при инективно афинно изображение на* D_3 *в* D_3 *се запазва релацията "между".* От тук получаваме още, че при инективно афинно изображение *точките от отсечката* AB *се изобразяват в точките от отсечката* $A'B'$. Ще отбележим и следния факт: точката C е среда на отсечката AB точно тогава, когато $(A, B, C) = -1/2$. Следователно *при инективно афинно изображение средата на отсечката* AB *се изобразява в средата на отсечката* $A'B'$.

5. Изоморфизъм на афинни пространства. Нека (D_1, L_1) и (D_2, L_2) са две афинни пространства над едно и също поле. Ако афинното изображение $f : \mathrm{D}_1 \to \mathrm{D}_2$ е биективно, ще казваме, че то е *изоморфизъм*. Ако съществува поне един изоморфизъм $f : \mathrm{D}_1 \to \mathrm{D}_2$, ще казваме, че афинното пространство D_1 е *изоморфно* на афинното пространство D_2.

Ще покажем, че *афинното изображение* f *е биективно (изоморфизъм) тогава и само тогава, когато линейната му част* $Df : L_1 \to L_2$ *е* *изоморфизъм на линейните пространства* L_1 *и* L_2 (еквивалентно: Df е биективно линейно изображение). Наистина, нека f е биективно изображение. Да изберем и фиксираме точка $A_1 \in \mathrm{D}_1$. Ако точката B описва (пробягва) множеството D_1, векторът $\overrightarrow{A_1B}$ описва линейното пространство L_1. Тъй като f е биективно, то когато точката B описва множеството D_1, точката $f(B)$ описва множеството D_2, а векторът $\overrightarrow{f(A_1)f(B)}$ описва линейното пространство L_2. Но изображението f е афинно, следователно $\overrightarrow{f(A_1)f(B)} = Df(\overrightarrow{A_1B})$. От това равенство вече е очевидно, че Df е сюрективно изображение; неговата инективност следва от инективността на f. Ако Df е биективно, с аналогично разсъждение се вижда, че f е биективно. В случая е удобно да се използва равенството (6).

З а б е л е ж к а. Нека афинното изображение $f : \mathrm{D}_1 \to \mathrm{D}_2$ е изоморфизъм. Тогава съществуват теоретико-множествените обратни изображения $f^{-1} : \mathrm{D}_2 \to \mathrm{D}_1$ и $(Df)^{-1} : L_2 \to L_1$, които също са биективни. Нека $f(A_1) = A_2$. Лесно е да се провери, че $f^{-1}(B') = A_1 + (Df)^{-1}(\overrightarrow{A_2B'})$, където $B' \in \mathrm{D}_2$. Тъй като обратното изображение на линейно изображение също е линейно, то според твърдението от т. 8 f^{-1} е афинно изображение, следователно също е изоморфизъм на афинни пространства. Получихме, че ако афинното пространство D_1 е *изоморфно* на афинното пространство D_2, то D_2 е *изоморфно* на D_1. Това оправдава израз като "двете пространства са изоморфни".

Оказа се, че *две афинни пространства* (D_1, L_1) и (D_2, L_2) *над едно и също поле са изоморфни тогава и само тогава, когато са изоморфни линейните пространства* L_1 и L_2. Вече знаем, че две крайномерни линейни пространства над едно и също поле са изоморфни точно тогава, когато имат една и съща размерност. Следователно *две крайномерни афинни пространства над едно и също поле са изоморфни точно тогава, когато имат една и съща размерност.*

Нека (D, L) е n-мерно афинно пространство над поле N. От Ч. I знаем, че n-мерното линейно пространство L е изоморфно на координатното линейно пространство N^n. По-точно, видяхме, че ако $e_1, \ldots, e_n$ е базис на пространството L, то изображението $g : L \to \mathtt{N}^n$, при което на произволен вектор $l \in L$ съответстват координатите му $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ спрямо избрания базис, е изоморфизъм на линейните пространства. Нарекохме го *координатен изоморфизъм*. Да изберем в афинното пространство $(\mathtt{D}\ , L)$ афинна координатна система $\{O; e_1, \ldots, e_n\}$ с начало точката O и на всяка точка $M \in \mathtt{D}$ с координати $(x_1, \ldots, x_n)$ да съпоставим точката $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathtt{N}^n$. С това дефинирахме изображение $f : \mathtt{D} \to \mathtt{N}^n$. Почти очевидно е, че то е афинно с биективна линейна част изображението g. Това наистина е така, защото точката O има координати $(0, \ldots, 0)$, $f(O) = (0, \ldots, 0)$, следователно $f(M) = f(O) + g(\overrightarrow{OM})$ за всяка точка M. Тъй като линейното изображение g е биективно, то f е изоморфизъм, който се нарича *координатен изоморфизъм* на афинните пространства.

Както вече коментирахме, пространството, което е обект на училищната геометрия (и не само на нея), е тримерно афинно пространство над полето $\mathbf{R}$ на реалните числа. Според доказаното то е единствено с точност до изоморфизъм. Съответното линейно пространство – в случая линейното пространство на свободните вектори – е изоморфно на координатното пространство $\mathbf{R}^3$. Като имаме предвид пример 1) от т. 2, получаваме, че *пространството* $\mathtt{D}_3$ *от училищната геометрия е изоморфно на афинното пространство* $(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3, +)$. Аналогично: всяка (двумерна) равнина $\mathtt{D}_2$ в пространството $\mathtt{D}_3$ е изоморфна на афинното пространство $(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2, +)$. Без опасност от недоразумение вече можем да говорим за реалната равнина $\mathbf{R}^2$ и за реалното пространство $\mathbf{R}^3$, като ползваме съответната нагледност, с която сме свикнали.

От твърдението в т. 3 лесно получаваме следното

6. Твърдение. *Нека* $(\mathtt{D}_1, L_1)$ *и* $(\mathtt{D}_2, L_2)$ *са две* n*-мерни афинни пространства над едно и също поле. Тогава, както и да изберем афинно независими точки* $A_0, A_1, \ldots, A_n$ *от пространството* $\mathtt{D}_1$ *и афинно независими точки* $A'_0, A'_1, \ldots, A'_n$ *от пространството* $\mathtt{D}_2$, *съществува точно един изоморфизъм* $f : \mathtt{D}_1 \to \mathtt{D}_2$, *за който* $f(A_i) = A'_i$ *при* $i = 0, \ldots, n$.

Доказателство. Съществуването на точно едно афинно изображение с исканите свойства е ясно от т. 3. Остава да се убедим, че то наистина е биективно. В случая векторите $e_i = \overrightarrow{A_0 A_i}$ и $g_i = \overrightarrow{A_0' A_i'}$, $i = 1, \ldots, n$, са базиси, съответно на L_1 и на L_2. Линейното изображение $Df : L_1 \to L_2$, за което $Df(e_i) = g_i$, $i = 1, \ldots, n$, сега изобразява базис в базис, следователно е изоморфизъм на линейните пространства и в частност е биективно. Това означава, че афинното изображение

$$f(M) = A_0' + Df(\overrightarrow{A_0 M})$$

е биективно.

7. Автоморфизми и афинна еквивалентност на геометрични фигури. Изоморфизмите $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ на афинното пространство D в себе си ще наричаме *автоморфизми* на D.

Тук няма да дефинираме понятието "геометрична фигура". В училищната геометрия "фигури" са например правите в равнината, триъгълниците, разните видове многоъгълници в равнината, различните тела в пространството (пирамиди, многостени, конуси, сфери и т. н.). Обикновено под "фигура" в афинното пространство D се подразбира някакво подмножество от точки на D. Ще считаме, че две фигури F, F' в D са *афинно еквивалентни*, ако съществува автоморфизъм $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ (биективно афинно изображение), за който $f(F) = F'$. Основна задача е класификацията на фигурите с точност до афинна еквивалентност. Интерес представляват и онези свойства на фигурите, които се запазват при афинна еквивалентност. Такива свойства се наричат накратко *афинни*. Онази част от геометрията, която се занимава с изучаването на афинната класификация на фигурите и на техните афинни свойства, е част от така наречената *афинна геометрия*.

Ще отбележим, че *релацията "афинна еквивалентност" е релация на еквивалентност в множеството на геометричните фигури*. Наистина, всяка фигура F е афинно еквивалентна на себе си, защото идентитетът на D е афинен автоморфизъм (релацията е рефлексивна). Ако $f(F) = F'$ (фигурата F е афинно еквивалентна на F'), то f^{-1} също е афинен автоморфизъм и $f^{-1}(F') = F$ (фигурата F' е афинно еквивалентна на F), т. е. релацията е симетрична. Нейната транзитивност следва непосредствено от факта, че композицията на афинни автоморфизми е афинен автоморфизъм. Проверете го самостоятелно. Всяка релация на еквивалентност, дефинирана в дадено множество, разделя това множество на две по две непресичащи се подмножества, наречени *класове на еквивалентност*. Два елемента са в един и същи клас точно тогава, когато са еквивалентни.

П р и м е р и. 1) *В реалната двумерна равнина всеки два триъгълника са афинно еквивалентни*. Ще уточним, че под ΔABC, определен от трите неколинеарни точки A, B, C, ще разбираме частта от равнината, която се състои от отсечките AB, BC, CA и частта от равнината, която те “ограждат”. Нека е даден и $\Delta A'B'C'$. Точките A, B, C (съответно A', B', C') са афинно независими, защото не лежат на една права, и твърдението следва от твърдението в т. 6 и бележките от края на т. 4.

2) *В реалното тримерно афинно пространство всеки два тетраедъра са афинно еквивалентни.* Доказателството е аналогично на предходното.

Използването на афинната еквивалентност често предоставя редица удобства. Ето една съвсем елементарна илюстрация.

Да се докаже, че *във всеки триъгълник медианите му се пресичат в една точка*. За равностранен триъгълник ΔABC твърдението е почти очевидно. Нека $\Delta A'B'C'$ е произволен. Съществува афинен автоморфизъм f на равнината, при който точките A, B, C се изобразяват съответно в A', B', C'. Тъй като изображението е афинно, средите на страните на ΔABC се изобразяват в средите на съответните страни на $\Delta A'B'C'$, а следователно и медианите се изобразяват в съответните медиани. Общата точка на трите медиани в ΔABC ще се изобрази в обща точка на трите медиани в $\Delta A'B'C'$ и твърдението е доказано.

8. Афинитети и изоморфизми на афинни пространства. Нека (D_1, L_1) *и* (D_2, L_2) са две афинни пространства над едно и също поле, а изображението $f : D_1 \to D_2$ е *биективно* изображение на множеството D_1 върху множеството D_2. Ако f изобразява всеки три точки, които лежат на една права, в три точки, които също лежат на една права, ще казваме, че f е *афинитет*.

Резултатът от т. 4 показва, че всяко биективно афинно изображение е афинитет. Забележително е, че е в сила следната

9. Теорема. *Нека афинните пространства* D *и* D' *са или реални равнини, или са изоморфни на реалното тримерно афинно пространство, а* $f : D \to D'$ *е биективно изображение. Изображението* f *е афинитет тогава и само тогава, когато е (биективно) афинно изображение*.

Доказателството е относително сложно и не е сред целите на тази книга. (То може да бъде намерено, например, в книгата на П. С. Моденов и А. С. Пархоменко “Геометрические преобразования”, изд. на Московския университет, 1961 г.) В едната посока твърдението вече беше доказано. Ще се опитаме да обясним къде са основните трудности, ако е даден афинитет

f. Всичко се свежда до построяване на линейно изображение g, такова, че

$$\overrightarrow{f(A)f(B)} = g(\overrightarrow{AB})$$

за всеки две точки A, B. Дясната страна трябва да се разбира така: ако насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ определя свободен вектор $\vec{a}$, то $g(\overrightarrow{AB}) = g(\vec{a})$. (Напомняме, че насочена отсечка беше дефинирана като наредена двойка точки.) Следователно, ако $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (равенство на насочени отсечки), то $g(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)} = g(\overrightarrow{CD}) = \overrightarrow{f(C)f(D)}$. Ясно е, че за да дефинираме коректно линейното изображение g, необходимо е предварително да докажем импликацията

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{f(A)f(B)} = \overrightarrow{f(C)f(D)}$$

(при афинитет равните насочени отсечки се изобразяват в равни). Точно тук започват трудностите, с които са се занимавали математици като Мьобиус, Понселе, Шал и др. Ключов момент се оказало доказаното (през 1880 г.) от Дарбу

Твърдение. *При афинитет на реална равнина в реална равнина всяка точка C от вътрешността на отсечката AB (т. е. лежаща между точките A, B) се изобразява в точка, която лежи между образите на точките A, B.*

Горната теорема има редица обобщения в разни посоки. Например, ако предположим само, че двете афинни пространства D и D' са над полето на реалните числа и имат една и съща крайна размерност $n \geq 2$, то заключението на теоремата е вярно за всяко естествено число n (вж. например М. Берже. Геометрия. М., “Мир”, 1984, т. I, стр. 73; там тази теорема е наречена “основна теорема на афинната геометрия”).

10. Представяне на афинните изображения чрез координати. Дадени са две крайномерни афинни пространства D и D' над едно и също поле и афинно изображение $f: D \to D'$. Избираме във всяко от пространствата афинни координатни системи, съответно $\{O; e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и $\{O'; e'_1, e'_2, \ldots e'_m\}$. Нека афинното изображение е

$$f(M) = f(O) + Df(\overrightarrow{OM}),$$

или записано като равенство на вектори:

$$\overrightarrow{f(O)f(M)} = Df(\overrightarrow{OM}).$$

Последното означава, че при линейното изображение Df векторът $\overrightarrow{OM}$ се изобразява във вектора $\overrightarrow{f(O)f(M)}$. От Ч. I, гл. 3, § 3, т. 8 знаем как се изразява действието на линейно изображение чрез координатите – остава само да фиксираме означенията. Нека точката $M \in \mathrm{D}$ има координати $x_1, x_2, \dots, x_n$, точките $f(M), f(O) \in \mathrm{D}'$ имат координати, съответно $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$ и $a_1, a_2, \dots, a_m$, а линейното изображение има матрица A спрямо избраните базиси. Нека

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_m \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Стълбът от координатите на вектора $\overrightarrow{f(O)f(M)}$ е $X' - a$, а стълбът от координатите на вектора $\overrightarrow{OM}$ е матрицата X. Следователно имаме $X' - a = AX$, или

(3) $$X' = AX + a.$$

Това матрично равенство е еквивалентно на следните m равенства:

(4) $$\begin{aligned} x'_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + a_1 \\ x'_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + a_2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + a_m. \end{aligned}$$

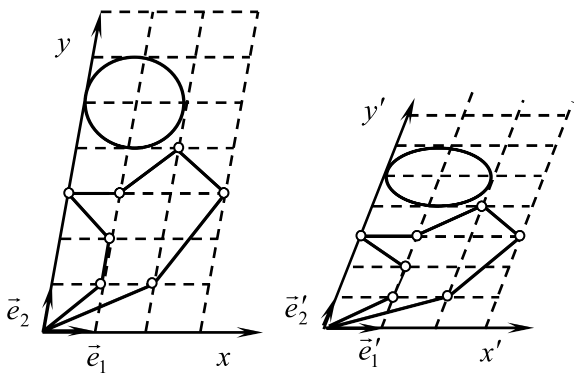
Доста автори ги приемат за определение на афинно изображение (по формулите (4) на точка с координати X се съпоставя точка с координати X'). От формулите (4) още веднъж се вижда, че *афинното изображение f е биективно тогава и само тогава, когато $m = n$ и* $\det A \neq 0$. Полезно е да отбележим, че ако $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}'$ е произволно изображение, което чрез координатите се изразява с помощта на равенствата (4), то f е афинно изображение.

При същите означения нека $D = D'$ (следователно $m = n$). Да предположим допълнително, че $\det A \neq 0$. Сега равенствата (4) много напомнят формулите за смяна на координатите на точките (вж. § 1, т. 6), но са разменени ролите на старите и новите координати. Възможна е следната интерпретация: $A = (a_{ij})$ е матрицата на смяната от стария базис $e_1, \ldots, e_n$ към новия базис; *афинното изображение съпоставя на всяка точка* M *със стари координати* $x_1, \ldots, x_n$ *точка* M'*, чиито координати спрямо новата координтна система са също* $x_1, \ldots, x_n$*. Тогава старите координати* $x'_1, \ldots, x'_n$ *на точката* M' *се определят по формулите* (4).

При чертожни работи тази интерпретация е доста полезна. Ето един п р и м е р. В равнината на чертожния лист е начертана някаква фигура (вж. черт. 8). Предполага се, че $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ е дадена афинна координатна система и е даден афинитет f, който чрез координатите се изразява с формулите

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + x_0$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + y_0 .$$

Разполагаме с набор от мащабни линийки и правоъгълен триъгълник и искаме да начертаем образа при афинитета f. Очевидно $f(O)(x_0, y_0)$, а векторите $\vec{e}_1(1,0)$ и $\vec{e}_2(0,1)$ ще се изобразят съответно във векторите $\vec{e}\,'_1(a_{11}, a_{21})$ и $\vec{e}\,'_2(a_{12}, a_{22})$. Построяваме новата координатна система $\{f(O); \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$. Трябва да си даваме сметка, че по двете оси $O\vec{e}_1$, $O\vec{e}_2$ мащабът е различен – върху първата ос отсечка с дължина единица е насочената отсечка, представител на вектора $\vec{e}_1$, а върху втората – представителят на $\vec{e}_2$. Същото важи и за системата $\{f(O); \vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2\}$. На чертежа с пунктир са показани няколко от



Черт. 8

координатните линии спрямо първата координатна система и спрямо втората, т. е. изчертани са няколко прави, които спрямо $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ имат уравнения $x=k,\ y=l$, и няколко прави, които спрямо $\{f(O);\vec{e}_1',\vec{e}_2'\}$ имат уравнения $x'=k,\quad y'=l$, където $k,l=1,2,3,\dots$ Надяваме се, че всичко останало е ясно от чертежа – върховете на многоъгълника са пренесени, като сме държали сметка, че новите им координати са равни на старите; тъй като отсечка се изобразява в отсечка, страните на новия многоъгълник са начертани без каквито и да било пресмятания.

11. Примери на афинни изображения. Установяването, че изображенията от следващите примери са афинни, може да стане бързо, ако се позовем на теоремата от т. 9. Тъй като тя не беше доказана, предпочитаме да изложим и доказателства, които се основават на изразяването на изображението чрез координатите.

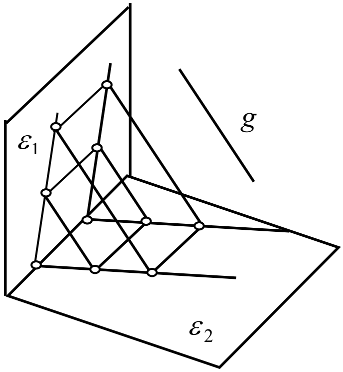
1) Нека $D_3=\mathbf{R}^3$ е познатото тримерно афинно пространство от училищната геометрия, $D_2=\varepsilon$ е дадена равнина в него, а g е дадена права, която не е успоредна на равнината. Дефинираме изображение $f:D_6\to D_2$ с правилото: през произволна точка M от пространството построяваме права g', успоредна на дадената права g; пресечната точка на правата g' с равнината ε е образ на точката M (*проектиране, успоредно на правата* g). Изображението очевидно е сюрективно, но не е инективно – всички точки от правата g' се изобразяват в единствена точка. Лесно е да се убедим, че изображението е афинно. За целта избираме афинна координатна система $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ така, че осите $O\vec{e}_1$ и $O\vec{e}_2$ да лежат в равнината ε, а оста $O\vec{e}_3$ да е успоредна на правата g. При този избор точка с координати (x,y,z) се изобразява в точка с координати (x,y) спрямо координатната система $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$. Изображението се задава с равенствата

$$x'=x+0\cdot y+0\cdot z,\quad y'=0\cdot x+y+0\cdot z$$

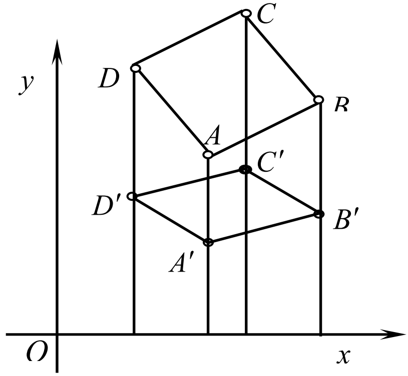
и според т. 9 е афинно. В случая матрицата A на изображението е

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

2) Нека $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ са две равнини, които не се сливат (или са успоредни, или се пресичат в права линия), а g е права, която не лежи в никоя от двете равнини, нито е успоредна на някоя от тях. С помощта на прави, успоредни на дадената права g, *проектираме* точките от равнината ε_1 в точки от равнината ε_2 (черт. 9). Така дефинираното изображение очевидно е биективно. Нека f е изображението, което проектира цялото пространство



Черт. 9



Черт. 10

върху равнината ε_2 , успоредно на правата g . То е афинно (вж. предишния пример). От определението на афинно изображение се вижда, че ограничението му върху афинно подпространство също е афинно изображение. Нека $\bar{f}:\varepsilon_1 \to \varepsilon_2$ е ограничението на f върху равнината ε_1 (за всяка точка $M \in \varepsilon_1$ имаме $\bar{f}(M) = f(M)$, т. е. $\bar{f}$ е проектирането на ε_1 върху ε_2, успоредно на правата g .

3) Нека в равнината е дадена декартова координатна система Oxy и k е положително число. Разглеждаме афинното изображение на равнината в себе си, зададено с равенствата

$$x' = x, \quad y' = ky .$$

При $k < 1$ то се нарича *свиване с коефициент* k *, успоредно на оста* Oy , а при $k > 1$ - *разтягане* с коефициент k , успоредно на оста Oy . Геометричният смисъл на това биективно афинно изображение се състои в следното. Точката $M(x, y)$ се премества успоредно на ординатната ос в точка

$M'(x', y')$; тъй като $k > 0$, то и двете точки са в една и съща полуравнина, определена от абсцисната ос. Разстоянието от точката M до абсцисната ос е равно на $|y|$, а от точката M' е $k|y|$. Ясно е, че при $k > 1$ точката M' (образът на точката M) е по-далеко от абсцисната ос (*разтягане*), а при $k < 1$ - по-близо (*свиване*). При $k = 1$ очевидно $M' = M$. На черт. 10 квадратът $ABCD$ е подложен на свиване с коефициент $1/2$, успоредно на ординатната ос. Образът му е успоредникът $A'B'C'D'$.

Примерът може да се обобщи, като се премахне изискването координатната система да бъде декартова, т. е. да се предположи, че тя е произволна афинна $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, а останалото да остане същото, т. е. $x' = x, \quad y' = ky$. Геометричната интерпретация запазва терминологията (свиване или разтягане, успоредно на оста ...), но има някои нюанси. В случая не можем да говорим за дължини и разстояния, а само за “отношение на отсечки” от типа на равенството $\overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{CD}$. През точката M прекарваме права, успоредна на оста Oy (оста, определена от точката O и вектора $\vec{e}_2$), и нека тя пресича оста Ox в точка P. Условието, което определя точката M', е $\overrightarrow{M'P} = k\overrightarrow{MP}$.

4) В пространството е дадена декартова координатна система $Oxyz$ и положително число k. Биективното афинно изображение, зададено с равенствата $x' = x, \ y' = y, \ z' = kz$, се нарича *свиване* (*разтягане*) с коефициент k, успоредно на оста Oz. Геометричната интерпретация е аналогична на пример 3). Нека по-общо са дадени три положителни числа k_1, k_2, k_3. Убедете се самостоятелно, че всяко биективно афинно изображение, дефинирано с равенствата

$$x' = k_1 x, \quad y' = k_2 y, \quad z' = k_3 z ,$$

може да се представи като композиция на свиване (разтягане) с коефициент k_1, успоредно на оста Ox, свиване (разтягане) с коефициент k_2, успоредно на оста Oy, и свиване (разтягане) с коефициент k_3, успоредно на оста Oz. Убедете се, че в случая композицията не зависи от реда на “множителите”.

12. Афинни подпространства и системи линейни уравнения. Системите линейни уравнения са удобен инструмент за описание на подпространствата на произволно крайномерно афинно пространство. Ще дадем малко по-подробни разяснения.

В Ч. I, гл. 2, § 5 беше въведено понятието *линейно многообразие* в $\mathbf{R}^n$. Ставаше дума за множества от вида $x + V$, където x е фиксиран вектор от

$\mathbf{R}^n$, а V е подпространство на линейното пространство $\mathbf{R}^n$. Тъй като линейното пространство $\mathbf{R}^n$ може да се разглежда и като афинно пространство, то от § 1, т. 5 е ясно, че линейните многообразия са афинни подпространства. Цитираният текст от Ч. I е теорема, която всъщност твърди, че *решенията на всяка система от линейни уравнения с* n *неизвестни образуват афинно подпространство на* $\mathbf{R}^n$ *и обратно, всяко подпространство на афинното пространство* $\mathbf{R}^n$ *е множеството от решенията на подходяща система линейни уравнения с* n *неизвестни*. Ако се прочете отново цитираният текст от Ч. I, ще се види, че резултатът е в сила не само за афинното пространство $\mathbf{R}^n$, а и за всяко афинно пространство N^n, където N е произволно поле.

Аналогично стоят нещата и в абстрактните афинни пространства. Нека $(\mathrm{D}, L, +)$ е произволно n-мерно афинно пространство над поле N. Нека е избрана афинна координатна система $\{O; e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ и е дадена системата линейни уравнения

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m ,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

където всички коефициенти a_{ij}, b_j са от полето N. Знаем, че решенията на съответната ѝ хомогенна система, принадлежащи на N^n, образуват линейно подпространство $V \subset \mathrm{N}^n$. Като използваме координатния изоморфизъм на афинни пространства (вж. т. 5), можем да отъждествим линейното пространство V с подпространство на линейното пространство L и даже да считаме, че $V \subset L$. Нека системата (6) е съвместима и $x' = (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ е едно нейно конкретно решение, а $M_0 \in \mathrm{D}$ е точката с координати $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$. От една страна, множеството от всичките решения на системата е

$$x' + V = \{x' + l \mid l \in V\}$$

и е подпространство на афинното пространство N^n, а от друга, то се отъждествява с подпространството $\mathrm{E} = M_0 + V = \{M_0 + l \mid l \in V\}$. Следователно *подпространството* $\mathrm{E} \subset \mathrm{D}$ *се състои точно от онези точки на*

D *, чиито координати удовлетворяват системата уравнения*. Обратно, нека $E \subset D$ е афинно подпространство, което не е празното множество. Отъждествяваме го с подпространство на афинното пространство N^n. Според цитираната теорема от Ч. I *съществува съвместима система уравнения от вида* (6)*, такава, че множеството от решенията й е подпространството* E .

Ще направим едно уточнение. Нека системата (6) е съвместима и има ранг r . От общата теория на системите линейни уравнения (Ч. I, гл. 2, § 5) знаем, че системата е еквивалентна на система от r уравнения с ранг r . Линейното пространство V от решенията на съответната хомогенна система има размерност $n-r$, следователно афинното пространство $x'+V$, което тя определя, има размерност $n-r$.

Като пропускаме поясненията, резултататът от проведените разсъждения може да се резюмира по-прецизно като

12. Твърдение. *Нека* $(D, L, +)$ *е* n*-мерно афинно пространство над поле* N *. Ако се избере афинна координатна система, то всяко* k *-мерно афинно подпространство* E $(E \neq \;)$ *може да се дефинира като множеството от решенията на подходяща съвместима система от* $n-k$ *линейни уравнения с* n *неизвестни и ранг* $n-k$ *. Обратно: всяка съвместима система от* $n-k$ *линейни уравнения с* n *неизвестни и ранг* $n-k$ *дефинира афинно подпространство* $E \subset D$ *с размерност* k *.* (Коефициентите в системата задължително принадлежат на полето N .)

Ще приложим твърдението към два конкретни случая.

а) Нека $N = \mathbf{R},\ n = 2$, т. е. D е двумерното афинно пространство на познатата от училище равнина. Всяка права g (едномерно афинно подпространство) може да се зададе със система, състояща се от едно единствено уравнение и с ранг 1 ($k=1,\ n-k=1$) , т. е.

$$g: \quad Ax + By + C = 0 .$$

Тъй като рангът е равен на 1, то $|A|+|B| \neq 0$. Стигнахме до познатото от Ч. I общо уравнение на правата g .

б) Нека $N = \mathbf{R},\ n = 3$, т. е. D е познатото от училище тримерно пространство. Всяка равнина ε (двумерно афинно подпространство; $k=2$) се задава с единствено уравнение $(n-k=1)$:

$$\varepsilon: \quad Ax + By + Cz + D = 0 .$$

Тъй като рангът трябва да бъде единица, то $|A|+|B|+|C|\neq 0$. Всяка права ($k=1$) се задава със система от две уравнения ($n-k=2$):

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

където матрицата

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$$

има ранг 2. И двата факта са познати от Ч. I, гл.6.

§3. Евклидови афинни пространства

В този параграф ще разглеждаме само крайномерни пространства (афинни и линейни) над полето $\mathbf{R}$ на реалните числа.

1. Определение. Ще казваме, че крайномерното афинно пространство $(D, L, +)$ над полето $\mathbf{R}$ е *евклидово афинно пространство*, ако са изпълнени следните две условия:

а) линейното пространство L е евклидово, т. е. в L е въведено скаларно произведение $<,>$;

б) за всеки две точки $A, B\in D$ е дефинирано разстояние $|AB|$ по правилото: ако $B=A+l, \quad l\in L,$ то $|AB|=|l|=\sqrt{<l,l>}$.

Пример. Нека D_3 е тримерното реално афинно пространство от училищната геометрия, а L е реалното тримерно пространство на свободните вектори заедно с познатото определение на скаларно произведение на свободни вектори: $<\vec{a},\vec{b}>=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$. Ако насочената отсечка $\overrightarrow{AB}$ определя свободния вектор $\vec{a}$, т. е. $\overrightarrow{AB}\in\vec{a}$, то $|AB|=|\vec{a}|$.

Ако в афинната координатна система $\{O; e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ векторите $e_1, e_2, \ldots, e_n$ са ортонормиран базис на евклидовото линейно пространство L, прието е да се говори за *декартова* (или за *ортонормирана*) *координатна система.*

2. Определение. Ще казваме, че изображението $f: D\to D$, дефинирано в евклидовото афинно пространство D, е *еднаквост*, ако то запазва разстоянието между точките, т. е. ако $|\overrightarrow{f(A)f(B)}|=|\overrightarrow{AB}|$ за всеки две точки $A,B\in \mathbb{D}$.

Лесно е да се провери, че *всяко афинно изображение* $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ *, чиято линейна част е ортогонален линеен оператор, е еднаквост*. Наистина, нека $f(B)=f(A)+Df(\overrightarrow{AB})$, или еквивалентно: $\overrightarrow{f(A)f(B)}$ $=Df(\overrightarrow{AB})$ за всеки две точки $A,B\in \mathbb{D}$. Тъй като по условие линейният оператор $Df:L\to L$ е ортогонален, то $|Df(\overrightarrow{AB})|=|\overrightarrow{AB}|$, следователно и $|\overrightarrow{f(A)f(B)}|=|\overrightarrow{AB}|$.

Главната ни цел е да докажем обратното твърдение.

Ще отбележим, че всяка транслация (вж. § 2, т.1) е еднаквост, защото е афинно изображение, в което линейната част е единичният оператор, а той очевидно е ортогонален.

3. Лема. *Нека* L *е евклидово линейно пространство, а* $g:L\to L$ *е произволно изображение, което запазва скаларното произведение на векторите. Тогава* g *е ортогонален линеен оператор*.

Доказателство. Достатъчно е да докажем, че изображението g е линейно. Тъй като g запазва скаларното произведение на векторите, то запазва и техните дължини. Нека l,m са произволни вектори и $n=l+m$. Тогава

$$0=|0|^2=|n-l-m|^2=<n-l-m,n-l-m>=$$

$$=|n|^2+|l|^2+|m|^2-2<n,l>-2<n,m>+2<l,m>=$$

$$=|g(n)|^2+|g(l)|^2-+|g(m)|^2-2<g(n),g(l)>-2<g(n),g(m)>+$$

$$+2<g(l),g(m)=|g(n)-g(l)-g(m)|^2 .$$

Тъй като най-дясната страна е равна на нула, то $g(n)=g(l)+g(m)$, т. е. $g(l+m)=g(l)+g(m)$.

Нека $m=\lambda l,\ \lambda\in\mathbf{R}$, $l\in L$. Имаме аналогично

$$0=|m-\lambda l|^2=|m|^2+\lambda^2|l|^2-2\lambda<m,l>=$$

$$=|g(m)|^2+\lambda^2|g(l)|^2-2\lambda<g(m),g(l)>=|g(m)-\lambda g(l)|^2 .$$

Тъй като най-дясната страна е равна на нула, то $g(m)=\lambda g(l)$, или $g(\lambda l)=\lambda g(l)$. Доказахме, че изображението е линейно, което завършва доказателството на лемата.

4. Теорема. *Нека* D *е евклидово афинно пространство. Изображението* $f:\mathrm{D}\to\mathrm{D}$ *е еднаквост тогава и само тогава, когато е афинно изображение, чиято линейна част е ортогонален оператор.*

Доказателство. В едната посока твърдението беше доказано погоре. Нека f е еднаквост. Да изберем в D точка A_0 и да я фиксираме. Всеки вектор l от съответното линейно пространство определя еднозначно точка A, за която $A=A_0+l$, и обратно: ако е дадена точката A, векторът l е еднозначно определен. Като имаме предвид тази бележка, дефинираме

$$g:L\to L$$

с правилото: ако $A=A_0+l$, векторът $g(l)$ се определя от равенството $f(A)=f(A_0)+g(l)$. От определението се вижда, че $g(0)=0$. Ясно е, че изображението g запазва дължините на векторите, защото

$$|l|=|\overrightarrow{A_0A}|=|\overrightarrow{f(A_0)f(A)}|=|g(l)|,$$

където във второто равенство използвахме, че f е еднаквост, а в следващото – определението на вектора $g(l)$. Нещо повече: за всеки два вектора l,m имаме

$$|l-m|=|g(l)-g(m)|. \tag{1}$$

Наистина, нека $l=\overrightarrow{A_0A}$, $m=\overrightarrow{A_0B}$. Следователно $g(l)=\overrightarrow{f(A_0)f(A)}$, $g(m)=\overrightarrow{f(A_0)f(B)}$, $m-l=\overrightarrow{AB}$, а $g(m)-g(l)=\overrightarrow{f(A)f(B)}$ и равенството (1) следва от условието, че f е еднаквост.

Ще покажем, че изображението g запазва скаларното произведение. Наистина, за всеки два вектора $l,m\in L$ имаме

$$|l|^2-2<l,m>+|m|^2=|l-m|^2=|g(l)-g(m)|^2=$$

$$=|g(l)|^2-2<g(l),g(m)>+|g(m)|^2.$$

От равенството на най-лявата и на най-дясната страна следва равенството $<l,m>=<g(l),g(m)>$, защото $|l|=|g(l)|$, $|m|=|g(m)|$.

Като се позовем на лемата от т. 3, получаваме, че изображението $g : L \to L$ е ортогонален оператор, дефиниран в евклидовото линейно пространство L. Тъй като $f(A) = f(A_0) + g(l)$, то очевидно еднаквостта $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ е афинно изображение, чиято линейна част е ортогоналният оператор g. Теоремата е доказана.

Ще напомним, че по определение всяко евклидово линейно пространство е крайномерно, а от друга страна, всеки ортогонален оператор изобразява ортонормиран базис в ортонормиран. Следователно всеки ортогонален оператор е обратим, а това според резултат от § 2 означава в частност, че *всяка еднаквост е биективно изображение.*

§ 4. Класификация на еднаквостите в равнината и в тримерното пространство

Целта ни е да дадем възможно най-нагледно описание на еднаквостите в равнината и в тримерното евклидово афинно пространство.

1. Геометрично описание на еднаквостите в равнината. Нека D е множеството от точките на познатата ни от училище равнина, а L_2 е двумерното евклидово линейно пространство, състоящо се от свободните вектори, компланарни с равнината. От § 3 знаем, че ако $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ е еднаквост, то

(1)
$$f(M) = f(O) + Df(\overrightarrow{OM}),$$

където M е произволна точка, O е фиксирана точка, а Df е ортогонален линеен оператор, дефиниран в L_2. От гл. 2, § 3, т. 6 знаем, че за матрицата T на произволен ортогонален оператор (спрямо подходящ ортонормиран базис на L_2) има три възможности:

а) $T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, $0 < \alpha < \pi$; б) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ще анализираме последователно трите случая.

а) Нека подходящият ортонормиран базис е $\vec{e}_1, \vec{e}_2$. Лесно се вижда, че матрицата T няма реални характеристични корени (вж. гл. 2, § 3, т. 6), в частност 1 не е характеристичен корен, следователно матрицата $T - E$ (E е единичната матрица от втори ред) е неособена, т. е. обратима. Ще покажем, че съществува точка O^*, за която $f(O^*) = O^*$ (съществува неподвижна точка). Нека спрямо декартовата координатна система $O;\vec{e}_1,\vec{e}_2$ точките имат координати съответно $M(x,y)$, $f(M)(x',y')$, $f(O)(x_0,y_0)$. При тези означения изразяваме разглежданата еднаквост чрез координатите:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0\,.$$

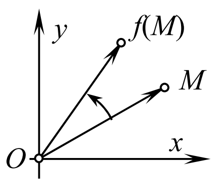
Координатите на търсената неподвижна точка трябва да удовлетворяват системата уравнения

$$x = x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0$$
$$y = x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0\,. \tag{2}$$

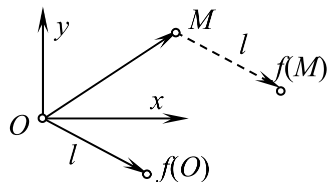
Системата има единствено решение, защото матрицата $T - E$ е неособена. Ако за начало O на координатната система бяхме избрали неподвижната точка O^*, точката $f(O)$ би имала координати $(0,0)$, защото $f(O) = O$. Нека си мислим, че всичко това е направено. Следователно разглежданата еднаквост се изразява чрез координати с помощта на равенствата

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha\,.$$

Става дума за *ротация на ъгъл* α *около точката* O (вж. черт. 11).



Черт. 11



Черт. 12

б) Матрицата на линейния оператор Df е единичната матрица, следователно операторът е единичният, т. е. $Df(l) = l$ за всеки вектор l. Равенството (1) сега се записва като $f(M) = f(O) + \overrightarrow{OM}$, или еквивалентно $\overrightarrow{f(O)f(M)} = \overrightarrow{OM}$. Оттук лесно следва, че $f(M) = M + \overrightarrow{Of(O)}$.

Наистина, нека за удобство за произволна точка X вместо $f(X)$ пишем само X'. Имаме $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'}$. От най-лявата и най-дясната страна получаваме

$$f(M) = M + \overrightarrow{Of(O)}.$$

Следователно разглежданата еднаквост е *транслация* с помощта на вектора $l = \overrightarrow{Of(O)}$ (вж. черт. 12).

При означенията от а) за координатите на точките, разглежданата еднаквост сега се изразява чрез координатите с помощта на равенствата

$$x' = x + x_0$$
$$y' = y + y_0.$$

в) Пак при означенията от а) равенството (1) се записва чрез координатите:

$$x' = x + x_0$$
$$y' = -y + y_0.$$

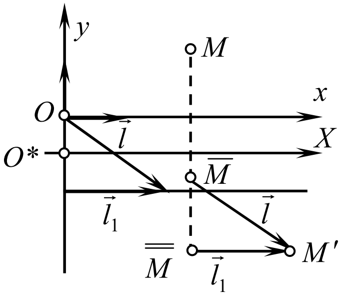
Геометрично тези равенства означават, че точката $M(x, y)$ първо се изобразява в симетричната си $\overline{M}$ спрямо абсцисната ос , след което се транслира с вектор $\vec{l}(x_0, y_0)$ (черт. 13). Ако транслираме координатната система в ново начало точката $O^*(0, \frac{1}{2}y_0)$ и X, Y са новите координати на точката M , а X', Y' са новите координати на точката $f(M)$, то

$$x = X, \quad y = Y + y_0/2$$
$$x' = X', \quad y' = Y' + y_0/2$$

и в новите координати еднаквостта f се записва като равенствата

$$X' = X + x_0, \quad Y' = -Y.$$

Геометрично те означават, че всяка точка M се изобразява първо в симетричната си $\overline{\overline{M}}$ спрямо правата g (новата абсцисна ос), а след това се транслира с вектор $\vec{l}_1(x_0, 0)$, колинеарен на правата g. Такава еднаквост се нарича *транслационна* (*плъзгаща*) *симетрия*. Ако векторът $\vec{l}_1$ е нулев, еднаквостта се нарича *осева симетрия* или *отражение относно права*. Правата g се нарича *ос* на симетрията. Тя се характеризира като множеството от неподвижните точки на еднаквостта.



Черт. 13

Нека обърнем внимание, че ротацията и транслацията запазват ориентацията в равнината, докато плъзгащата симетрия я нарушава – заменя я с противоположната. Във връзка с това обикновено разделят еднаквостите на *собствени* (запазващи ориентацията) и *несобствени*. Аналитично те се различават по това, че за собствените еднаквости $\det T = 1$, докато за несобствените $\det T = -1$. Разбира се матрицата T зависи от базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, но както знаем от Ч. I, гл. 3, § 4, детерминантата й зависи само от оператора Df, следователно тя е индивидуално (инвариантно) свойство на еднаквостта f. Доказахме

2. Теорема (Шал). *Всяка еднаквост в двумерната евклидова афинна равнина е една от следните: въртене (ротация) около неподвижна точка, транслация, транслационна симетрия. Само ротацията и транслацията запазват ориентацията.*

3. Геометрично описание на еднаквостите в тримерното пространство. Разсъжденията са аналогични на проведените по-горе и ще си позволяваме да пропускаме някои детайли. Нека сега D е реалното тримерно евклидово афинно пространство (познато ни от училище), съответното линейно пространство е тримерното линейно пространство L_3 на свободните вектори и нека $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ е еднаквост. Тя отново може да бъде записана във вида (1), където Df е ортогонален оператор, дефиниран в линейното пространство L_3. Пак от гл. 2, § 3, т. 6 знаем, че при подходящ избор на ортонормирания базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ на пространството L_3, за матрицата T (спрямо този базис) на оператора Df има следните възможности:

$$\text{а)}\ T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{б)}\ T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

в) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, г) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$,

където $0 < \alpha < 2\pi$.

Ще анализираме последователно четирите случая. Навсякъде ще предполагаме, че O е начало на ортонормирана координатна система, в която базисните вектори са избраните по-горе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Ще се придържаме към следната уговорка за означенията: ако $A, B, \ldots$ са точки, то $A', B', \ldots$ означават съответно точките $f(A), f(B), \ldots$ (тя е само за удобство при изписването). Да уточним означенията за координатите: $M(x, y, z)$, $M'(x', y', z')$, $O'(x_0, y_0, z_0)$.

а) В този случай равенството (1) се записва чрез координатите спрямо $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ като

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + x_0 \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + y_0 \\ z' &= z + z_0 \, . \end{aligned}$$

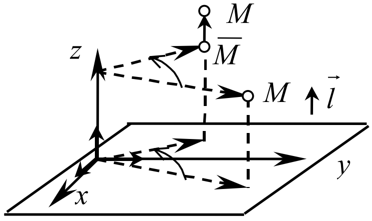
Ако $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, т. е. ако $f(O) = O,$ горните равенства показват, че еднаквостта може да се интерпретира като *въртене* (*ротация*) на ъгъл α около оста $O\vec{e}_3$. По-общо, ако $x_0 = y_0 = 0$, еднаквостта може да се интерпретира като ротация на ъгъл α около оста $O\vec{e}_3$ и след това транслация с вектор $\vec{l}\,(0,0,z_0)$, колинеарен на оста $O\vec{e}_3$. Такава еднаквост се нарича *винтова* (винтово движение). Ще покажем, че в разглеждания случай а) за матрицата T еднаквостта винаги е винтова. За целта ще потърсим точка O^* с координати $(x^*, y^*, 0)$, за която точката $f(O^*)$ да има координати (x^*, y^*, z_0). Очевидно е, че x^*, y^* трябва да удовлетворяват системата уравнения (2). Вече видяхме, че при $0 < \alpha < 2\pi$ тя има точно едно решение. Да транслираме координатната система в точка O^*, т. е. сменяме $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ с $\{O^*, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Ако X, Y, Z са новите координати на точката M , формулите за смяната са

$$x = X + x^*, \quad y = Y + y^*, \quad z = Z.$$

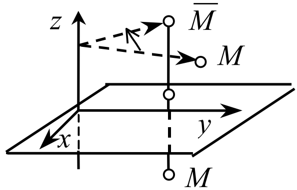
От тях се вижда, че новите координати на точката $f(O^*)$ са $(0,0,z_0)$. Нека новите координати на точката M' са (X',Y',Z'). Тъй като матрицата T на линейния оператор не зависи от началото на координатната система, то без каквито и да било пресмятания можем да напишем равенствата:

$$X' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha$$
$$Y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha$$
$$Z' = Z \ + z_0 \, .$$

От тях се вижда, че еднаквостта е винтова (черт. 14).



Черт. 14



Черт. 15

б) Сега матрицата T няма характеристичен корен 1, следователно $T - E$ (тук E е единичната матрица от трети ред) е обратима и може да се намери (единствена) точка O^*, за която $f(O^*) = O^*$. Ако в качеството на начало O изберем неподвижната точка O^*, то

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha$$
$$y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$
$$z' = z \ + z_0 \, .$$

От тези формули се вижда, че еднаквостта f е композиция на две еднаквости $f = f_2 \circ f_1$, където $f_1 : M(x,y,z) \mapsto \overline{M}(x',y',z)$ е въртене около оста $O\vec{e}_3$, а $f_2 : \overline{M}(x',y',z) \mapsto M'(x',y',-z)$ е симетрия относно равнината $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ (черт.15). Този тип еднаквост – въртене около ос и симетрия относно равнина, перпендикулярна на оста – се нарича *огледална ротация*.

в) Сега $x' = x + x_0$, $y' = y + y_0$, $z' = z + z_0$. Очевидно става дума за *транслация* с постоянен вектор $\vec{l}\,(x_0, y_0, z_0)$ (черт. 16).

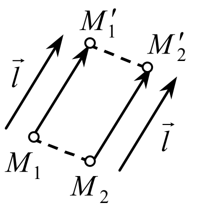
г) Ако транслираме координатната система $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ в точката O^* с координати $(0,0, z_0/2)$, спрямо новите координати ще имаме

$$X' = X + x_0, \qquad Y' = Y + y_0, \qquad Z' = \quad -Z .$$

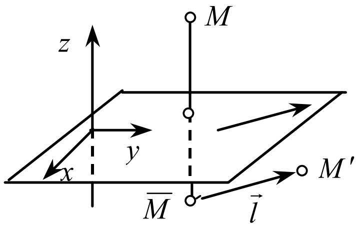
Следователно

$$M(X,Y,Z) \mapsto \overline{M}(X,Y,-Z) \mapsto M'(X + x_0, Y + y_0, -Z),$$

което означава, че всяка точка M първо се трансформира в симетричната си спрямо равнина (в случая $O\vec{e}_1\vec{e}_2$), след което се транслира с постоянен вектор $\vec{l}\,(x_0, y_0, 0)$ успоредно на равнината. Такава еднаквост се нарича *транслационна* (*плъзгаща*) *симетрия* (черт. 17).



Черт. 16



Черт. 17

Еднаквостите в пространството също се подразделят на *собствени* и *несобствени* според това, дали запазват, или нарушават ориентацията. Собствени са винтовата еднаквост и транслацията. За тях $\det Df = \det T = 1$. Огледалната ротация и транслационната симетрия са несобствени – за тях $\det T = -1$. Напомняме, че $\det T$ зависи само от съответната еднаквост и не зависи от координатната система. В литературата на руски език вместо еднаквост се използва терминът “движение”, който е заимстван от механиката. Там (в механиката) той, опростено казано, означава преместване на тяло в пространството. Естествено, че при преместване на твърдо тяло в пространството разстоянията между неговите точки се запазват. При механични движения, обаче, ориентацията винаги се запазва. Следователно механична реализация допускат само онези еднаквости, които не променят ориентацията, т. е. само винтовата еднаквост и транслацията. Доказахме

4. Теорема (Шал)**.** *Всяка еднаквост в тримерното евклидово афинно пространство е една от следните четири вида: винтова, огледална ротация, транслация и транслационна симетрия. Само винтовата еднаквост и транслацията запазват ориентацията*.

§ 5. Афинни автоморфизми на евклидови афинни пространства

В този параграф всички линейни пространства са над полето **R** на реалните числа и са крайномерни.

1. Резултатът от гл. 2, § 5 заедно с резултатите от предишния параграф позволяват лесно да класифицираме автоморфизмите на произволно евклидово афинно пространство. Става дума за биективните афинни изображения на пространството в себе си, които тук накратко ще наричаме *афинни преобразувания*.

Нека D е евклидово афинно пространство, а $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ е произволно афинно преобразувание. Нека изберем координатна система и за удобство да предположим, че тя е декартова (ортонормирана). Преобразуванието може да се изрази чрез координатите във вида

$$f: \quad X' = AX + a,$$

където A е квадратна матрица от ред n, а X, X', a са съответно матриците - стълбове от координатите на точките M, $f(M)$, $f(O)$ (M е произволна точка, а O е началото на координатната система). Тъй като f е биективно, матрицата A е неособена. Според резултата от края на § 5, гл. 2 съществува ортогонална матрица T, такава, че $T^{-1}AT = H_1G_1$, където $H_1 = diag(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ е диагонална матрица и $\lambda_i > 0,\ i = 1, \dots, n$, а матрицата G_1 е ортогонална. Ако сменим координатната система с нова ортонормирана, без да сменяме началото, така че T да е матрицата на смяната, то както показва зад. 7 от упражненията, матрицата в линейната част на изображението ще се смени с $T^{-1}AT = H_1G_1$ и чрез координатите спрямо новата координатна система ще имаме

$$f: \quad Y' = H_1 G_1 \cdot Y + b .$$

(От цитираната задача следва, че $b = T^{-1}a$, но тук това не е съществено за разсъждението.) Нека M е произволна точка от пространството с координати, записани като матрица-стълб Y. Можем да си представяме изображението f като композиция на няколко изображения, които чрез координатите се записват така:

$$Y \mapsto G_1 Y \mapsto H_1(G_1 Y) = Y' - b \mapsto (Y' - b) + b = Y' .$$

Тъй като матрицата G_1 е ортогонална, най-лявото изображение е еднаквост с неподвижна точка (началото на координатната система). Тъй като матрицата H_1 е диагонална с положителни елементи по диагонала, следващото изображение (от ляво на дясно) може да се интерпретира като композиция на n свивания (или разтягания) по направление на координатните оси, които са две по две перпендикулярни. При размерности $n = 2$ и $n = 3$ това беше обяснено в § 2, т. 11. Най-дясното изображение очевидно е транслация с вектор с координати матрицата-стълб b. Резултатът от проведените разсъждения може да се формулира като

2. Теорема. *Всяко афинно преобразувание в крайномерно афинно пространство може да се представи като композиция на следните изображения: еднаквост с неподвижна точка (действа първа), n последователни свивания (разтягания), успоредно на оси, които са две по две перпендикулярни, и транслация.*

Упражнения

1. В тетраедър всеки връх е съединен с пресечната точка на медианите на срещуположната стена. Докажете, че получените по този начин четири отсечки се пресичат в една точка. (Упътване. Разгледайте първо правилен тетраедър, в който всички ръбове са равни отсечки, после използвайте, че всички тетраедри са афинно еквивалентни.)

2. Като използвате твърдението на Дарбу, докажете теоремата от § 2, т. 9.

3. Ако разполагате с компютър и искате да видите анимация на примера 3) от § 2, т. 11, направете следното: отворете Word, след командите Insert $\rightarrow$ Picture $\rightarrow$ Clip Art щракнете върху някоя картинка, за да я изберете, а върху появилия се панел натиснете Insert. Картинката ще се появи на екрана, заедно с манипулаторите си (малки квадратчета, които очертават въображаем правоъгълник, в който е разположена картинката). Като дърпате с мишката манипулаторите, картинката се променя. Всъщност тя е подложена на афинитет. Защо? В терминологията на цитирания пример какво представлява изтеглянето на манипулатор, който е среден за някоя страна? А ако се изтеглят манипулатори от върховете на правоъгълника? Кога изтеглянето на манипулатори от върховете е подобие?

4. Докажете, че два трапеца са афинно еквивалентни тогава и само тогава, когато основите им са пропорционални. (Упътване. Нека $ABCD$ е трапец с основи AB и CD, а O е пресечната точка на диагоналите му. Нека е даден още един трапец $A'B'C'D'$ и O' е пресечната точка на диагоналите му. Съществува единствен афинитет f, който изобразява точките A,B,C съответно в A',B',C'. Убедете се, че условието $f(D)=D'$ е еквивалентно на следните две равенства за простите отношения: $(ACO)=(A'C'O')$ и $(BDO)=(B'D'O')$. Използвайте и подобието на триъгълниците ABO и CDO.)

5. Докажете, че всеки два успоредника са афинно еквивалентни. Кога два изпъкнали четириъгълника са афинно еквивалентни?

6. Като използвате афинна еквивалентност, докажете, че:

а) диагоналите в успоредника се разполовяват от пресечната си точка;

б) средната отсечка в триъгълника е успоредна на основата и дължината й е половината от дължината на основата;

в) средната отсечка в трапеца е успоредна на основите и дължината й е полусумата от дължините на основите;

г) във всеки трапец правата, която минава през пресечната точка на продълженията на бедрата му и през пресечната точка на диагоналите, разполовява основите;

д) успоредните прави отсичат от страните на всеки ъгъл пропорционални отсечки.

(Упътване. а) разгледайте квадрат; б) разгледайте равностранен триъгълник; в) и г): според зад. 4 всеки трапец е афинно еквивалентен на равнобедрен трапец; д) нека g_1, g_2 са правите, определени от страните на ъгъла; успоредното проектиране е биективно афинно изображение на афинното пространство g_1 върху афинното пространство g_2, следователно запазва простото отношение.)

7. Нека D е крайномерно афинно пространство, а $f:\mathrm{D}\to\mathrm{D}$ е афинно изображение. Нека спрямо афинната координатна система

$O;\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n$ изображението f се изразява чрез координатите по формулата $X' = AX + a$, където A е квадратна матрица от ред n, а X, X', a са съответно матриците-стълбове от координатите на точките M, $f(M)$, $f(O)$. Нека $O';\vec{e}'_1,\dots,\vec{e}'_n$ е още една афинна координатна система и нека спрямо нея същото афинно изображение се изразява чрез новите координати по формулата $Y' = BY + b$ (означенията са аналогични). Ако смяната на координатите е по формулата $X = TY + c$, докажете, че

$$B = T^{-1}AT, \quad b = T^{-1}(Ac + a - c).$$

Това означава в частност, че при смяна на координатите матрицата A на линейната част на афинното изображение се трансформира в подобна.

8. Нека D е крайномерно афинно пространство и са дадени две афинни изображения $f : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$ и $g : \mathrm{D} \to \mathrm{D}$. Нека $f:\ Y = AX + a$ и $g:\ Z = BY + b$ са техните изрази чрез координатите спрямо една и съща афинна координатна система. Докажете, че

$$g \circ f:\ Z = BA \cdot X + (Ba + b).$$

В частност имаме, че матрицата в линейната част на композицията $g \circ f$ е произведението на матриците в линейните части на g и f.

9. Нека f е еднаквост в равнината. Докажете, че:

а) ако f е ротация или транслация, то f може да се представи като композиция на две осеви симетрии;

б) ако f е транслационна симетрия, но не е осева симетрия, то f може да се представи като композиция на три осеви симетрии.

10. Нека f е еднаквост в (тримерното) пространство. Докажете, че:

а) ако f е винтова еднаквост, или транслация, то f може да се представи като композиция на две или четири симетрии относно равнини;

б) ако f е огледална ротация, или транслационна симетрия, но не е симетрия относно равнина, то f може да се представи като композиция на три симетрии относно три равнини.

Глава 4

Криви от втора степен

§ 1. Общи понятия

1. Що е равнинна линия? Ясен отговор няма да дадем, но ще се опитаме да обясним причината. Еднозначна дефиниция на понятията *равнинна линия* (равноправно се употребяват и термините *крива линия* и *крива*) и на *повърхнина* в пространството няма. В различните области на математиката се подбират специални определения, които задават само отделни класове от линии. Подборът се прави така, че обектите от съответния клас да се поддават на изучаване със специфичните за дадената област средства, например с методите на анализа в диференциалната геометрия, с апарата на комутативната алгебра в алгебричната геометрия, със средствата на топологията и алгебрата в алгебричната топология и т. н.

Траекторията на материална точка, движеща се в равнината, като че ли добре се съгласува с интуитивната ни представа за линия. Следователно изглежда разумно да дефинираме равнинна линия (крива) като множество от точки в равнината с координати (x, y), удовлетворяващи формулите

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t), \tag{1}$$

където φ и ψ са дадени функции на "времето" t, $a \le t \le b$. Уравненията (1) се наричат *параметрични уравнения* на кривата. Естествено е да поискаме φ и ψ да бъдат непрекъснати навсякъде в дефиниционната си област. Точно това определение въвел през 1862 г. френският математик К. Жордан. (Като си спомним за параметричните уравнения на права в равнината от Ч. I, гл. 6, става ясно, че правите са линии в жорданов смисъл.) Оказало се обаче, че класът на жордановите линии е твърде широк: Пеано показал с пример, че непрекъснатите функции φ и ψ могат да се подберат така, че точките с координати $(\varphi(t), \psi(t))$, $0 \le t \le 1$ да запълват квадрата $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$. С цел да се избягнат подобни патологични примери, на функциите φ и ψ обикновено налагат някои допълнителни условия за диференцируемост. При подходящи условия от подобен тип е възможно от уравненията (1) да се изключи t и да стигнем до уравнение от вида

$$y = f_1(x), \text{ или } x = f_2(y),$$

което подсказва, че линия би могло да се дефинира, грубо казано, като графика на функция. Трудностите отново започват след въпроса: каква функция, от какъв клас?

Разглежданата ситуация е частен случай от следната: нека $F(x,y)$ е функция, дефинирана в някакво множество в равнината. *Крива* с уравнение

$$F(x,y)=0 \tag{2}$$

понякога наричат множеството от точките с координати (x,y), удовлетворяващи (2). Добре е да се има предвид обаче следната теорема на Уитни: за всяко затворено множество C от точки в равнината съществува такава непрекъсната функция $F(x,y)$, че множеството от решенията на уравнението (2) да бъде точно множеството C. Това показва, че без допълнителни условия е невъзможно да се построи смислена теория на решенията на уравнението (2).

Ако $F(x,y)$ е полином на променливите x,y с реални коефициенти и степен $k>0$, множеството от точките с координати (x,y), удовлетворяващи (2), се нарича *реална алгебрична крива от степен* k. Подразбира се, че в равнината е избрана някаква афинна координатна система.

Не е трудно да се съобрази, че степента на алгебричната линия не зависи от координатната система. Действително, нека изберем "нова координатна система" и нека (x',y') са новите координати на точката със стари координати (x,y). Както знаем, връзката между стари и нови координати е от вида

$$x=\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y'+x_0\,,\quad y=\alpha_{21}x'+\alpha_{22}y'+y_0\,,$$

където $\det(\alpha_{ij})\neq 0$. Като заместим тези изрази в уравнението (2), то ще добие вида

$$F^*(x',y')=0\,, \tag{2*}$$

където F^* е полином на x',y'. Неговата степен l не е по-висока от степента k на полинома F, т. е. $l\le k$, защото замествахме с полиноми от първа степен. Следователно при смяна на координатите степента на полинома не може да се увеличи. Но $l<k$ е невъзможно, защото, връщайки се от координатите (x',y') към (x,y), ще трансформираме (2*) в (2), т. е. ще трябва да увеличим степента на полинома, а както видяхме, това е невъзможно.

В тази глава ще съсредоточим вниманието си върху съвсем частния случай, когато $F(x,y)$ е полином на две променливи от втора степен.

2. Защо са необходими комплексни елементи? Да изберем в равнината афинна координатна система е все едно да зададем биективно съответствие между точките в равнината и елементите на афинното пространство $\mathbf{R}^2$: на всяка точка съответства (и то взаимно еднозначно!) наредена двойка реални числа (x, y). Вече видяхме, че на всяка права в равнината съответства уравнение от вида $ax+by+c=0$, $|a|+|b|\neq 0$, като тройката коефициенти a, b, c е определена еднозначно с точност до пропорционалност. И в двата примера съответствието "геометричен обект" (точка, права) $\to$ "алгебричен обект" (наредена двойка реални числа, уравнение) е твърде добро. Опитите да се установи подобно съответствие между полиномите $F(x, y)$ с реални коефициенти и фиксирана степен $k \geq 2$ и геометричните обекти "множеството от точките в равнината, удовлетворяващи уравнението $F(x, y)=0$", се натъкват на сериозни трудности. Така например уравнението $x^2+y^2+1=0$ изобщо не задава геометричен обект (поточно: задава празното множество от точки), $x^4+y^4=0$ задава само точката $(0,0)$, но същата точка задава и $x^2+y^2=0$ и т. н. Причината за толкова незадоволителното съответствие тук между алгебрата и геометрията е свързана, най-общо казано, с обстоятелството, че за вместилище на решенията на уравнението $F(x, y)=0$ сме избрали $\mathbf{R}^2$ (разглеждаме само реални решения), а то е твърде тясно за алгебрата.

Привличането на полето $\mathbf{C}$ на комплексните числа съществено променя нещата. От теоремата на Д'Аламбер (вж. Ч. I, гл. 7, § 3) може да се изведе например, че два полинома $f_1(x)$ и $f_2(x)$ с реални или с комплексни коефициенти имат едни и същи корени в $\mathbf{C}$ (като се броят и кратностите на корените) тогава и само тогава, когато полиномите са пропорционални. Това показва, че за полиноми на една променлива привличането на комплексните числа създава симетричната връзка: непропорционални полиноми – различни множества от корени. Пример: очевидно различните полиноми x^2-1 и x^4-1 са неразличими според реалните си корени (и за двата полинома те са ± 1), но в $\mathbf{C}$ различията стават явни: корените на първия са ± 1, а на втория са ± 1, $\pm i$.

От теоремата на Д'Аламбер веднага следва, че ако $F(x, y)$ е полином от степен $k>0$ с реални коефициенти, то множеството от всички комплексни решения на уравнението $F(x, y)=0$ е безкрайно подмножество на $\mathbf{C}^2$: достатъчно е на едната от променливите да даваме произволни комплексни стойности и да решаваме уравнението спрямо другата променлива. Забележителна е и следната теорема: *ако* $F_1(x,y)$ *и* $F_2(x,y)$ *са два полинома от втора степен с реални (или даже с комплексни) коефициенти и ако множествата от решенията на уравненията* $F_1(x,y)=0$ *и* $F_2(x,y)=0$ *в* $\mathbf{C}^2$ *съвпадат, то* $F_1(x,y)=\lambda F_2(x,y)$ *за някое число* λ. Най-естественото доказателство на това твърдение и на неговите обобщения се дава в курса по висша алгебра. В този елементарен курс то няма да бъде използвано.

Изложените съображения са само част от убедителните мотиви за разглеждането в геометрията и на "точки", чиито "координати" са комплексни числа. Те са въведени от френския математик Понселе още през 1822 г. При този подход проблемите, произтичащи от алгебричния апарат, се решават много добре, но възникват други трудности, на които няма да се спираме. Най-елементарната е свързана с онагледяването: как да изобразим, например, точка с координати $(1,i)$? Обикновено се прави следната уговорка: точката с координати (x,y) се нарича *реална* (видима), ако и двете числа x,y са реални, и *имагинерна* (невидима) – в противен случай.

3. Реално-комплексна равнина. Под изложените по-горе съображения може да се постави по-здрава логическа база. Да означим с L множеството на свободните вектори, компланарни с дадена равнина. Знаем, че то е двумерно реално линейно пространство. Ако изберем базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ на L, всеки вектор ще има еднозначно определени координати и даже получаваме изоморфизъм $f:L\to\mathbf{R}^2$. Да разгледаме комплексификацията $L^{\mathbf{C}}$ на линейното пространство L (Ч. I, гл. 4, § 7). Както знаем, $L\subset L^{\mathbf{C}}$ в теоретико-множествен смисъл и всеки базис на L над полето $\mathbf{R}$ е базис на $L^{\mathbf{C}}$ над полето $\mathbf{C}$ на комплексните числа. Ясно е, че ако $\vec{l}$ е произволен вектор от $L^{\mathbf{C}}$, то $l\in L$ точно тогава, когато координатите му спрямо избрания вече базис $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ са реални числа. Следователно координатите (x,y) на който и да е вектор от $L^{\mathbf{C}}\setminus L$ не могат да бъдат едновременно реални числа. Разбира се отново имаме изоморфизъм $\overline{f}:L^{\mathbf{C}}\to\mathbf{C}^2$, който отъждествява всеки вектор с координатите му. Благодарение на факта, че векторите $\vec{e}_1,\vec{e}_2$ са от L, изображението (изоморфизмът) $\overline{f}$ е продължение на изоморфизма $f:L\to\mathbf{R}^2$. Знаем обаче, че във всяко линейно пространство базисът може да се сменя по разни начини, а това води, разбира се, до смяна на координатите. Ако използваме тази свобода изцяло (всеки базис може да бъде сменен с който и да е друг), може да се случи, че спрямо някой нов базис вектор от реалното линейно пространство L (видим образ) ще получи координати, които не са реални числа (ще се превърне в невидим образ). За да не се случи такава неприятност, по традиция, наследена още от времето на Понселе, в елементарните учебници по аналитична геометрия обикновено налагат следното строго ограничение: за базиси на $L^{\mathbf{C}}$ над $\mathbf{C}$ е допустимо да се използват само базиси на L над $\mathbf{R}$. По същия начин постъпват и с точките. В разглежданата реална равнина (да я означим с ε) избират афинна координатна система $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$. Всеки свободен вектор $\vec{r}\in L$ еднозначно определя точка M по познатия ни начин: с начало точката O нанасяме представител на вектора $\vec{r}$. Координатите на $\vec{r}$ наричаме координати на точката M. Продължават тази дефиниция и за векторите $\vec{r}$ от $L^{\mathbf{C}}$: всеки от тях също определя обект, наричан точка, която се характеризира с наредена двойка комплексни числа – координатите на вектора $\vec{r}$. Така векторите от L при избрано начало O (напомняме: $O\in\varepsilon$!) определят досегашните (видими) точки от избраната равнина ε, докато векторите от $L^{\mathbf{C}}\setminus L$ определят новите “имагинерни” (невидими) точки. Тъй като $L^{\mathbf{C}}$ е двумерно линейно пространство над $\mathbf{C}$, правилата за смяна на координатите на векторите са познати от Ч. I, гл. 3, § 4. Понеже се спазва уговорката за базиси на $L^{\mathbf{C}}$ над $\mathbf{C}$ да се използват само базиси на L над $\mathbf{R}$, матрицата на прехода от стар базис към нов винаги е с реални елементи и векторите от L винаги имат реални координати, независимо от базиса. Именно по това свойство може да се различават реалните вектори от новите (“имагинерните”). Същите познати правила и бележки важат и за координатите на точките. Равнината ε, заедно с така присъединените към нея “имагинерни” точки и вектори, обикновено наричат реално-комплексна афинна равнина. От съвременна гледна точка това е всъщност комплексификацията $L^{\mathbf{C}}$ на реално двумерно линейно пространство L, разглеждана едновременно и като афинно пространство, заедно с изкуственото ограничение, че афинните координатни системи трябва да са задължително в реалната равнина ε. Последното ограничение не е съвсем в духа на съвременната математика – оказва се, че реално–комплексната равнина нито е реална, нито е комплексна в общоприетия днес смисъл (базисите не са равноправни), т. е. тя прилича на митичната сирена – нито е риба, нито е жена. Някои автори считат това понятие за доста старомодно и просто не го въвеждат. Без да е страна в дискусия, авторът предпочете логиката на театрала Станиславски: ако в първото действие на сцената виси пушка и тя не гръмне до края на третото, по-добре е да се махне. В този уводен курс реално-комплексната равнина няма да се използва.

§ 2. Окръжност, елипса, хипербола, парабола

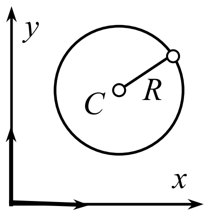
1. Окръжност. *Окръжност* с център точката C и радиус R наричаме множеството от всички точки в равнината, за които разстоянието им до точката C е равно на R.

Да изберем в равнината ортонормирана (декартова) координатна система $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ (ще използваме и по-удобното означение Oxy). Въвеждаме координати: $C(a,b)$, $M(x,y)$. Тогава

$$|MC|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}\,.$$

Тъй като $|MC|=R \;\Leftrightarrow\; |MC|^2=R^2$, точката $M(x,y)$ е точка от окръжността точно тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват уравнението

(1) $$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\,,$$



Черт. 18

което се нарича *уравнение на окръжността* (с център точката C и радиус R). Ако центърът на окръжността е началото O на координатната система, то $a=b=0$ и уравнението (1) има вида

$$x^2+y^2=R^2\,.$$

Точката $M(x,y)$ е вътре в кръга, определен от окръжността с уравнение (1), точно тогава, когато $|MC|<R$, или еквивалентно, точно тогава, когато

$$(x-a)^2+(y-b)^2<R^2.$$

От (1) следва: $x^2+y^2-2ax-2by+(a^2+b^2-R^2)=0$. Това уравнение е от вида

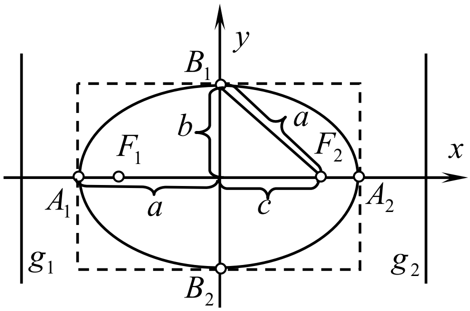
(2) $$x^2+y^2+Ax+By+C=0\,.$$

Докажете самостоятелно, че уравнението (2) е уравнение на окръжност точно тогава, когато $A^2+B^2-4C>0$.

2. Елипса. Множеството от всички точки в равнината, за които сумата от разстоянията им до две дадени точки F_1 и F_2 (в равнината) е постоянна величина, по-голяма от $|F_1F_2|$, се нарича *елипса*. Дадените точки се наричат *фокуси* на елипсата.

Ще изведем уравнение на елипсата. Като предполагаме, че точките F_1 и F_2 са различни, избираме декартова координатна система Oxy (черт.19) така, че: а) отсечката F_1F_2 лежи върху абсцисната ос Ox; б) ординатната ос Oy разполовява отсечката F_1F_2. Нека $|F_1F_2| = 2c$. Въвеждаме координати на точките: $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $M(x,y)$. Нека точката M е точка от елипсата и

(3) $$|MF_1| + |MF_2| = 2a .$$



Черт. 19

Ясно е, че точката M лежи върху елипсата тогава и само тогава, когато е в сила равенството (3). По определение $2a > 2c$, т. е. $a > c$. За разстоянията, изразени чрез координатите, имаме

(4) $$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} ,$$

$$|MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} .$$

Сега равенството (3) се записва като

(5) $$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a .$$

Ако пренесем единия радикал (напр. втория) в дясната страна на равенството, повдигнем двете страни на квадрат и направим приведение, ще получим

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx .$$

Ако отново повдигнем на квадрат, след очевидни преобразувания имаме

(6) $$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) .$$

Тъй като $a > c$, нека

$$b^2 = a^2 - c^2, \quad b > 0.$$

Като разделим двете страни на равенството (6) на a^2b^2, получаваме

(7) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Показахме, че ако точка с координати (x, y) е точка от елипсата, то x, y удовлетворяват уравнението (7). Обратно, нека x, y удовлетворяват уравнението (7). Ще покажем, че те са координати на точка, която е от елипсата. Наистина, ако от (7) определим y^2 и заместим в изразите от (4), то

$$|MF_1| = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|, \quad |MF_2| = \sqrt{\left(a - \frac{c}{a}x\right)^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|.$$

Числата между знаците за абсолютна стойност са положителни, защото от уравнението (7) е очевидно, че $|x| \le a$, а от друга страна, $0 < \frac{c}{a} < 1$. Вече е ясно, че равенството (3) е налице.

Доказахме, че точка M е точка от елипсата тогава и само тогава, когато координате й (x, y) удовлетворяват уравнението (7). То се нарича *канонично* уравнение на елипсата. Ще направим някои допълнителни бележки.

1) Ако фокусите F_1 и F_2 съвпадат, то $c = 0$ и следователно $a = b$. Уравнението (7) добива вида $x^2 + y^2 = a^2$, т. е. елипсата в този случай е окръжност с център началото на координатната система и радиус a.

2) Нека $x = x', \quad y = \frac{b}{a}y'$. Ако с тези изрази заместим в каноничното уравнение на елипсата, ще получим $\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$, което е уравнение на окръжност с радиус a. От аналитичния вид на направената смяна е ясно, че става дума за биективно афинно изображение $M(x, y) \mapsto M'(x', y')$ (вж. гл. 3), което преобразува елипсата в окръжност с радиус a. Геометричният смисъл на изображение от този тип е, че всяка точка M се премества успоредно на ординатната ос в точка M', като се спазват следните две условия: а) ако разстоянието на точката M до абсцисната ос е d, разстоянието на точката M' до абсцисната ос е kd, където k е

положително число, което не зависи от точките; б) точките M и M' са в една и съща полуравнина, определена от абсцисната ос. Ако $k>1$, обикновено се говори за *разтягане* с коефициент k, успоредно на ординатната ос. Ако $k<1$, - говори се за *свиване*. Видяхме, че чрез разтягане с коефициент $a/b>1$, успоредно на ординатната ос, елипсата се трансформира в окръжност.

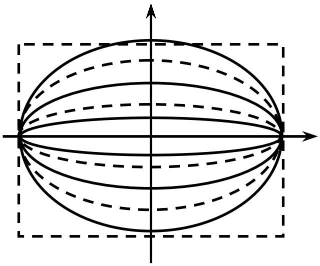
3) От уравнението (7) на елипсата се вижда, че тя пресича координатните оси съответно в точките $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$ и $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$, които се наричат *върхове* на елипсата. Отсечките A_1A_2 (с дължина $2a$) и B_1B_2 (с дължина $2b$) се наричат съответно *голяма* и *малка ос* на елипсата. Въпреки че, числата a и b нямат нищо общо с понятията "ос" и полуос", често наричат a *голяма полуос* на елипсата, а b - *малка полуос*. Пак от (7) се вижда, че за точките от елипсата имаме $-a\le x\le a$, $-b\le y\le b$, т. е. тя изцяло лежи в правоъгълника, определен от правите с уравнения $x=\pm a$, $y=\pm b$ (вж. черт. 19). В този смисъл елипсата е *ограничена* фигура.

4) Нека точка $M(x,y)$ лежи върху елипсата с уравнение (7). Очевидно е, че точката $M'(x,-y)$, симетрична на M спрямо абсцисната ос, също лежи върху елипсата. Следователно *абсцисната ос е ос на симетрия на елипсата. Ординатната ос също е ос на симетрия*: достатъчно е да се разгледат симетричните точки $M(x,y)$ и $M'(-x,y)$. Точката с координати $(-x,-y)$ е симетрична на M спрямо началото на координатната система и също лежи върху елипсата. Следователно *елипсата има център на симетрия* – началото O.

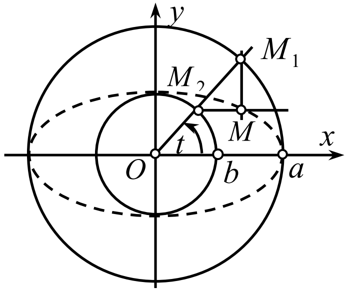
5) Числото $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$, където $2a$ е дължината на голямата ос, а $2c$ - разстоянието между фокусите, се нарича *ексцентрицитет* на елипсата. От това определение е ясно, че $0\le e<1$. Равенството $e=0$ е налице точно тогава, когато $c=0$, т. е. когато елипсата е окръжност. Ясно е също така, че ексцентрицитетът при фиксирано a расте точно тогава, когато расте разстоянието между фокусите (фокусното разстояние) $2c$. Ако разделим на a^2 равенството $b^2=a^2-c^2$ и коренуваме, получаваме равенството

$$\frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}\,.$$

От него се вижда, че когато ексцентрицитетът e расте (при фиксирана голяма ос $2a$), то b намалява и елипсата все повече се “сплесква” към абсцисната ос. На черт. 20 са показани няколко елипси с една и съща голяма ос, но с различни ексцентрицитети. Най-външната има най-малък ексцентрицитет. Фокусите не са начертани, защото за различните елипси те са различни.



Черт. 20



Черт. 21

6) Нека

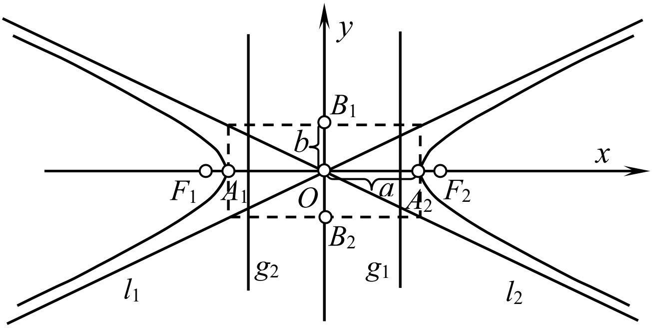
(8) $$x = a\cos t\,,\quad y = b\sin t,\quad 0 \le t < 2\pi.$$

Ако заместим така дефинираните x, y в уравнението (7), виждаме, че всяка точка, чиито координати са определени по формулите (8), е точка от елипсата с уравнение (7). Не е сложно да се съобрази и обратното: координатите на всяка точка $M(x, y)$ от елипсата с уравнение (7) може да се запишат във вида (8) при подходяща стойност на параметъра t. По тази причина равенствата (8) се наричат *параметрични уравнения* на елипсата с канонично уравнение (7).

Равенствата (8) подсказват удобен начин за построяване на елипса с линийка и пергел (вж. черт. 21). С център началото на координатната систе тема построяваме две концентрични окръжности съответно с радиуси a и b, $b < a$. Нека произволен радиус OM_1 на “голямата” окръжност пресича “малката” окръжност в точка M_2. През точката M_1 постряваме права, успоредна на ординатната ос (еквивалентно: перпендикулярна на абсцисната ос), през точката M_2 построяваме права, успоредна на абсцисната ос. Пресечната точка M на двете прави е точка от елипсата с уравнение (7). Обосновката е “ученическа задача” и я оставяме на читателя. При означенията от чертежа е достатъчно да се съобрази, че точките M_1 и M_2 имат координати съответно $(a\cos t, a\sin t)$ и $(b\cos t, b\sin t)$, а точката M има координати както в равенствата (8).

3. Хипербола. Множеството на всички точки в равнината, за които модулът на разликата от разстоянията им до две различни фиксирани точки в равнината е постоянна величина, се нарича *хипербола*. Двете фиксирани точки се наричат *фокуси* на хиперболата.

Ще опишем хиперболата с помощта на уравнение, свързващо координатите на точките й. Нека фокусите са F_1 и F_2 и $|F_1F_2| = 2c > 0$. Ако M е точка от хиперболата, нека $|MF_1| - |MF_2| = \pm 2a$. Като имаме предвид



Черт. 22

известното неравенство в триъгълника, естествено е да предполагаме, че

$2a < 2c$, т. е. $a < c$ (ако $a = c$, хиперболата ще се състои само от точките F_1 и F_2). Избираме декартова координатна система Oxy така, че абсцисната ос да съдържа отсечката F_1F_2, а ординатната ос да я разполовява (черт. 22). Нека $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$, $M(x,y)$. При тези означения имаме

(9) $$|MF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad |MF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

а равенството

(10) $$||MF_1| - |MF_2|| = 2a$$

се превръща в дефиниция на хиперболата. “Ендшпилът” е рутинен, защото почти повтаря разсъжденията от т. 2. Равенството (9) се записва като

$$\left|\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right| = 2a.$$

Ако премахнем знака за абсолютна стойност, а в дясната страна поставим знака $\pm$, след пренасяне на единия радикал (напр. втория) в дясната страна, получаваме

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2} \ .$$

След двукратно повдигане на квадрат (както в т. 2) с цел "премахване на радикалите", ще стигнем до равенството

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2) \ .$$

Тъй като по условие $a < c$, означаваме

$$b^2 = c^2 - a^2, \quad b > 0.$$

Като разделим на $a^2(a^2-c^2) = -a^2b^2$ двете страни на предишното равенство, получаваме

(11) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Дотук показахме, че ако точка $M(x,y)$ е точка от хиперболата, координатите ѝ удовлетворяват равенството (11). Ще докажем обратното: ако x, y удовлетворяват (11), то точката $M(x,y)$ лежи върху хиперболата. Наистина, нека от (11) определим y^2 и заместим в равенствата (9). След лека преработка получаваме:

$$|MF_1| = \left|\frac{c}{a}x + a\right|, \quad |MF_2| = \left|\frac{c}{a}x - a\right| .$$

От равенството (11) имаме $|x| \geq a$ и по условие $\frac{c}{a} > 1.$ Следователно

$$|MF_1| = \frac{c}{a}x + a, \quad |MF_2| = \frac{c}{a}x - a \quad \text{при } x \geq a,$$

$$|MF_1| = -\frac{c}{a}x - a, \; |MF_2| = -\frac{c}{a}x + a \quad \text{при } x \leq -a.$$

Вече е очевидно, че е налице равенството (10), т. е. точката $M(x,y)$ е от хиперболата. Ще направим някои бележки.

1) Уравнението (11) се нарича *канонично* уравнение на хиперболата. От него се вижда, че хиперболата пресича координатните оси точно в две

точки: $A_1(-a,0)$ и $A_2(a,0)$, които се наричат нейни *върхове*. Пак от уравнението (11) е очевидно, че ако точката $M(x,y)$ е от хиперболата (еквивалентно: x,y удовлетворяват (11)), то и точките с координати $(x,-y)$, $(-x,y)$, $(-x,-y)$ също са от хиперболата. Следователно *координатните оси са оси на симетрия на хиперболата*, а началото на координатната система е неин *център на симетрия*. Наричат го *център* на хиперболата. Отсечката A_1A_2 се нарича *реална ос* на хиперболата ($|A_1A_2| = 2a$). Отсечката с дължина $2b$, определена от точките $B_1(-0,b)$, $B_2(0,b)$, обикновено наричат *имагинерна ос* на хиперболата. Въпреки, че термините "ос" и "полуос" означават съвсем друго, числата a и b по традиция се наричат съответно *реална полуос* и *имагинерна полуос*.

2) Хиперболата е неограничена фигура – тя не може да бъде разположена в някакъв правоъгълник или кръг. От уравнението (11) това е очевидно: $|x|$ може да приема произволно големи стойности. Правите с уравнения

$$l_1: \; y = \frac{b}{a}x, \quad l_2: \quad y = -\frac{b}{a}x$$

се наричат *асимптоти* на хиперболата. Правоъгълникът с върхове в точките с координати (a,b), $(a,-b)$, $(-a,b)$, $(-a,-b)$ обикновено се нарича *основен правоъгълник* на хиперболата. Той се определя от четирите прави съответно с уравнения: $x = \pm a$, $y = \pm b$. Асимтотите минават през диагонално разположените върхове на основния правоъгълник (съдържат диагоналите му). Непосредствено се проверява, че асимптотите не пресичат хиперболата. При $a = b$ асимптотите са перпендикулярни (ъглополовящи са съответно на първи-трети и втори-четвърти квадранти) и хиперболата се нарича *равнораменна*.

Нека точката $M(x,y)$ е от хиперболата и лежи в първи квадрант, т. е. $x > 0, y > 0$. Ще покажем, че *когато* x *расте неограничено*, *то разстоянието от точката* M *до асимптотата* l_1 *клони към* 0. За целта ще използваме резултатите от Ч. I, гл. 6, § 7. Уравнението

$$\alpha(bx - ay) = 0, \quad \alpha = 1\Big/\sqrt{a^2 + b^2}$$

е нормално уравнение на асимптотата l_1, следователно $d = |\alpha(bx - ay)|$ е разстоянието от точката $M(x,y)$ до правата l_1. Тъй като точката е от хиперболата, то от (11) имаме $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$. След заместване в израза за d и лека преработка, получаваме

$$d=\left|\frac{\alpha a^2 b}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|.$$

Вече е очевидно, че когато x расте неограничено, $x>0$, d клони към нула. Аналогичен резултат е в сила, ако точката M е в който и да е от останалите квадранти – достатъчно е да се позовем на факта, че хиперболата е симетрична спрямо координатните оси.

3) *Ексцентрицитет* на хиперболата се нарича числото

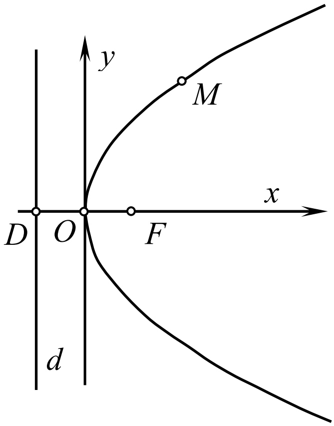
$$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}.$$

По условие $c>a$, следователно за хиперболата винаги $e>1$. От определението е ясно, че при фиксирано a ексцентрицитетът расте точно тогава, когато расте разстоянието $2c$ между фокусите, или точно тогава, когато расте разстоянието $2c$ между фокусите, или точно тогава, когато расте b. Растенето на b означава, че асимптотите постепенно се приближават към ординатната ос и хиперболата става все "по-разперена".

4) С помощта на традиционните линийка и пергел не е трудно да се построят достатъчно много точки от хиперболата, ако се предполага, че са дадени фокусите F_1, F_2 и реалната ос A_1A_2, $|A_1A_2|=2a$. Процедурата е следната: с център единия фокус, да речем F_1, построяваме окръжност с произволен радиус R, а след това с център другия фокус F_2 построяваме окръжност с радиус $R+2a$. Пресечните точки на двете окръжности са точки от хиперболата. Като меним R, ще построим толкова точки от хиперболата, колкото пожелаем.

4. Парабола. Множеството на всички точки в равнината, които са на равно разстояние до дадена права (в равнината) и до дадена точка (в равнината), нележаща на правата, се нарича *парабола*. Дадената точка се нарича *фокус* на параболата, а дадената права – *директриса*.

Разстоянието от фокуса до директрисата обикновено се означава с p и се нарича *фокален параметър* на параболата..



Черт. 23

Нека в равнината е дадена някаква парабола. Да означим с F нейния фокус, а с d -директрисата й. Нека D е ортогоналната проекция на фокуса върху директрисата, а O е средата на отсечката DF. Избираме декартова координатна система по следния начин: точката O е начало, абсцисната ос минава през фокуса (абсцисната ос съдържа отсечката DF) и посоката й съвпада с посоката на насочената отсечка $\overrightarrow{OF}$. При тези означения фокусът F има координати $(\frac{p}{2},0)$, а директрисата има уравнение $d:\ x+\frac{p}{2}=0$. То очевидно е нормално. Следователно, ако $M(x,y)$ е произволна точка в равнината, разстоянието й до директрисата d е равно на $\left|x+\frac{p}{2}\right|$. От друга страна, разстоянието от M до фокуса $F(\frac{p}{2},0)$ е равно на

$$|FM|=\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}\ .$$

Следователно точката $M(x,y)$ е точка от параболата точно тогава, когато координатите й удовлетворяват уравнението

(12) $$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|.$$

Това уравнение е равносилно на уравнението

$$(x-\frac{p}{2})^2+y^2=(x+\frac{p}{2})^2\ ,$$

което след приведение добива вида

$$(13) \qquad y^2 = 2px .$$

По условие $p > 0$, следователно от (13) имаме $x \geq 0$. Уравнението (13) се нарича *канонично уравнение на параболата*. Точката $M(x, y)$ лежи върху параболата точно тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват каноничното уравнение (13). Ще направим някои бележки.

1) Очевидно е, че ако двойката (x, y) удовлетворява уравнението (13), то двойката $(x, -y)$ също го удовлетворява. Геометрично това означава, че ако някаква точка лежи върху параболата, точката, симетрична спрямо абсцисната ос, също лежи върху параболата. Следователно правата, която минава през фокуса и е перпендикулярна на директрисата, е ос на симетрия. Тя се нарича *ос на параболата*. Може да се докаже, че параболата няма друга ос на симетрия. Пак от (13) се вижда, че параболата пресича абсцисната ос в единствена точка – началото на коорднатната система. Единствената пресечна точка на параболата с оста ѝ се нарича *връх* на параболата.

2) Нека са дадени две параболи с уравнения $y^2 = 2p_1x$ и $y^2 = 2p_2x$, където $p_1 < p_2$. Правата с уравнение $x = x_0$, $x_0 > 0$, пресича първата парабола в точките с координати $(x_0, \pm\sqrt{2p_1x_0})$, а втората – в точките с координати $(x_0, \pm\sqrt{2p_2x_0})$. Очевидно $\sqrt{2p_1x_0} < \sqrt{2p_2x_0}$. Следователно, когато фокалният параметър расте, параболата става все "по-разперена".

3) От определението на парабола непосредствено следва алгоритъм за построяване с линийка и пергел на достатъчно много точки от парабола със зададен фокален параметър p. Процедурата е следната. Построяваме произволна права d (директрисата) и точка F (фокуса) на разстояние p от правата. През точката F построяваме права, перпендикулярна на правата d. С това построихме оста на параболата. Ако тя пресича d в точка D, средата на отсечката DF е върхът на параболата. Построяваме произволна права l, успоредна на директрисата, но така, че върхът на параболата да е между директрисата и правата l. Ако разстоянието между правите d и l е равно на R, построяваме окръжност с център фокуса F и радиус R. Двете ѝ пресечни точки с правата l са точки от параболата. Като меним правата l, ще получаваме нови точки от параболата.

4) Параболата има следното важно оптично свойство: *ако във фокуса на параболата е поставен точков източник на светлина, то всеки светлинен лъч, излизащ от фокуса, след отразяването си от параболата е*

успореден на оста й. Има се предвид, че светлинният лъч се разпространява според законите на геометричната оптика и по-конкретно, че ъгълът на падането е равен на ъгъла на отражението. В случая, ако светлинният лъч попада в точка $M_0(x_0, y_0)$ от параболата, ъглите се измерват спрямо допирателната в точката M_0. С допирателните към линия от втора степен ще се занимаем по-късно. Тук ще използваме следния резултат от анализа: ако функцията $y = f(x)$ е диференцируема, производната $y'\big|_{x=x_0} = f'(x_0)$ е равна на ъгловия коефициент на допирателната към графиката на функцията в точката $(x_0, f(x_0))$.

Разглеждаме частта от параболата с уравнение (13), която е в първи квадрант, т. е. $x \geq 0, y \geq 0.$ Ако светлинният лъч попадне във върха на параболата, допирателна е ординатната ос и отразеният лъч очевидно ще се разпространява по оста на параболата. Нека $x > 0.$ Тогава

$$y = \sqrt{2px}, \quad y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}.$$

Допирателната в точката $M_0(x_0, y_0)$ ще има декартово уравнение от вида $y = kx + l$, където $k = p\big/\sqrt{2px_0}$. Както знаем от Ч. I, гл. 6, § 1, векторът $\vec{l}_1(1, k)$ е колинеарен на правата със споменатото уравнение, т. е. на допирателната. Векторът $\vec{l}_2(1,0)$ е колинеарен на оста на параболата. Тъй като $F(\frac{p}{2},0),$ то $\vec{l}_3 = \overrightarrow{FM_0}(x_0 - \frac{p}{2}, y_0)$. За да докажем твърдението, достатъчно е да покажем, че елементарно-геометричните ъгли между векторите $\vec{l}_1, \vec{l}_2$ и между $\vec{l}_1, \vec{l}_3$ или са равни, или сумата им е π. Нека тези ъгли са съответно φ_1 и φ_2. Тогава

$$\cos\varphi_1 = \frac{\vec{l}_1\vec{l}_2}{|\vec{l}_1||\vec{l}_2|}, \quad \cos\varphi_2 = \frac{\vec{l}_1\vec{l}_3}{|\vec{l}_1||\vec{l}_3|}.$$

Като се вземе предвид, че $y_0 = \sqrt{2px_0}$, а $k = p\big/\sqrt{2px_0}$, непосредствено се пресмята: $|\vec{l}_1| = \sqrt{1+k^2}$, $|\vec{l}_2| = 1,$ $|\vec{l}_3| = \frac{p}{2} + x_0$, $\vec{l}_1\vec{l}_2 = 1,$ $\vec{l}_1\vec{l}_3 = \frac{p}{2} + x_0$.

След съответното заместване получаваме: $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2 = 1\big/\sqrt{1+k^2}$. Тъй като и двата ъгъла са в интервала $[0,\pi]$, то $\varphi_1 = \varphi_2$ и твърдението е доказано.

Оптичното свойство на параболата има важни приложения в техниката при конструиране на прожектори, антени, телескопи и др. Ако параболата се завърти около оста си, получава се повърхнина, наречена *ротационен параболоид*. Нека с помощта на равнина, перпендикулярна на оста, "отсечем" част от параболоида. Частта, съдържаща върха на изходната парабола, обикновено се нарича *параболично огледало*. Ако пред това огледало точно във фокуса поставим светлинен източник, ще получим прожектор, който насочва светлинните лъчи в успореден сноп. Същото свойство се използва и при антените за приемане на електромагнитни вълни ("сателитните чинии"). Ако предавателят е твърде далеко от параболичното огледало и излъчва електромагнитни вълни с достатъчно висока честота (вълните са твърде къси), следният приближен модел е задоволителен: вълните са "светлинни лъчи", които попадат върху огледалото като успореден сноп. Ако огледалото е насочено така, че предавателят да "легне" върху оста му, всички вълни, попаднали върху огледалото-антена, след отразяването ще попаднат във фокуса му. Това сумиране на отделните вълни ще ни даде сигнал с достатъчно добра мощност.

Елипсата и хиперболата притежават аналогично оптично свойство: *всеки светлинен лъч, преминал през единия фокус на елипсата, след отразяване от елипсата минава през другия фокус.* Същото важи и за хиперболата, но е необходимо да се добави, че *продължението на отразения лъч минава през другия фокус*. Доказателството оставяме за упражнение след запознаване с § 5.

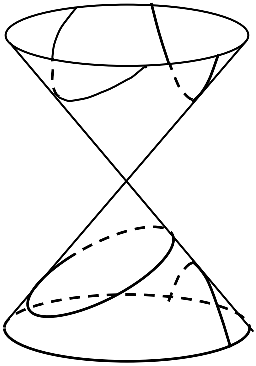
5. Фокално свойство на коничните сечения. За елипсата, хиперболата и параболата се използва общото наименование *конични сечения*, защото те може да се получат като сечения на прав кръгов конус с подходящи равнини (черт. 24). (Не споменахме окръжността, защото тя е частен случай на елипса.) Тук ще покажем едно общо свойство на коничните сечения, с помощта на което те може да бъдат дефинирани. По-точно в сила е следната

Теорема. *Нека в равнината са дадени права g и точка F, нележаща на правата. Нека C е множеството на всички точки в равнината, за които отношението на разстоянията им до дадената точка и до дадената права е постоянна величина $e > 0$, т. е. точката M принадлежи на C точно тогава, когато*

$$\frac{|MF|}{d(M,g)} = e .$$

В сила е следното: а) при $0<e<1$ множеството C е елипса; б) при $e>1$ множеството C е хипербола; в) при $e=1$ множеството C е парабола.

В случаите а) и б) числото e е всъщност ексцентрицитетът на съответната елипса и хипербола.



Черт. 24

З а б е л е ж к а. Дадената права g ще наричаме *директриса*, а дадената точка F - *фокус*. Навсякъде ще предполагаме, че разстоянието от точката F до правата g е равно на $p>0$.

Д о к а з а т е л с т в о. Случаят $e=1$ не се нуждае от разглеждане – това е определението на парабола. Ще предполагаме, че $e>0,\ e\neq 1$. Избираме декартова координатна система Oxy по следния начин: ординатна ос е директрисата, върху която избираме положителна посока; абсцисната ос минава през фокуса . При тези условия F има координати $(m,0)$, където $|m|=p$. Ако $M(x,y)$ е произволна точка, разстоянията й до фокуса и до директрисата са съответно

$$|MF|=\sqrt{(x-m)^2+y^2}\ ,\quad d(M,g)=|x|\,.$$

Следователно точката M принадлежи на множеството C точно тогава, когато

(14)
$$\frac{\sqrt{(x-m)^2+y^2}}{|x|}=e.$$

Като повдигнем двете страни на квадрат и се освободим от знаменателя, получаваме еквивалентното уравнение

$$x^2-2mx+m^2+y^2=e^2x^2,$$

откъдето имаме последователно

$$(1-e^2)x^2-2mx+y^2+m^2=0,$$

$$x^2-\frac{2m}{1-e^2}x+\frac{y^2}{1-e^2}+\frac{m^2}{1-e^2}=0,$$

(15) $$\left(x-\frac{m}{1-e^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-e^2}=\frac{e^2m^2}{(1-e^2)^2}.$$

Транслираме координатната система като

$$x'=x-\frac{m}{1-e^2}, \quad y'=y.$$

Уравнението (15) добива вида

(16) $$x'^2+\frac{y'^2}{1-e^2}=\frac{e^2m^2}{(1-e^2)^2},$$

а уравнението $x=0$ на директрисата (ординатната ос) се трансформира в

$$g: x'=-\frac{m}{1-e^2}.$$

Като напомняме уговорката, че $|m|=p$, означаваме:

$$a^2=\frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}, \quad a>0; \quad b^2=|1-e^2|\,a^2=\frac{e^2p^2}{|1-e^2|}, \quad b>0.$$

Сега от (16) веднага следва, че

(17) $$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1 \text{ при } e<1,$$

(18) $$\frac{x'^2}{a^2}-\frac{y'^2}{b^2}=1 \text{ при } e>1.$$

Повдигайки на квадрат уравнението (14), получихме еквивалентно уравнение, на което всички следващи уравнения са еквивалентни. Следователно точката M с нови координати (x', y') принадлежи на множеството C точно тогава, когато координатите й удовлетворяват или уравнението (17) (множеството C е елипса), или уравнението (18) (множеството C е хипербола).

С непосредствено пресмятане се убеждаваме, че $\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2}=e$ при $0<e<1$ и $\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}=e$ при $e>1$, т. е. числото e наистина винаги е ексцентрицитетът и доказателството е завършено.

Елипсата с уравнение (17) и хиперболата с уравнение (18) имат фокуси $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$, където

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\frac{e^2p}{1-e^2}$$

за елипсата, и

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\frac{e^2p}{e^2-1}$$

за хиперболата. Точката F, за която става дума в теоремата, има стари координати $(m,0)$, следователно новите й координати са $(\frac{-me^2}{1-e^2},0)$. Нека кривата е елипса. Вече е очевидно, че при $m=p$ точката F е фокусът F_1, а директрисата има уравнение $x'=\frac{-p}{1-e^2}$. При $m=-p$ точката F е фокусът F_2, а директрисата е $x'=\frac{p}{1-e^2}$. Ако кривата е хипербола, имаме аналогично: при $m=p$, то $F=F_2$ и директрисата е $x'=\frac{-p}{1-e^2}$, а при $m=-p$, то $F=F_1$ и директрисата е $x'=\frac{p}{1-e^2}$.

Ако елипса или хипербола са зададени с каноничните си уравнения (7) и (11) спрямо декартова координатна система Oxy, правите с уравнения

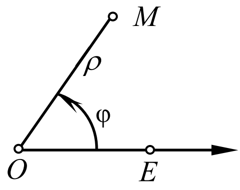
$$g_1:\ x=\frac{p}{1-e^2},\quad g_2:\ x=\frac{-p}{1-e^2}$$

се наричат *директриси* на елипсата (хиперболата). Директрисата g_i и фокусът F_j се наричат *съответни*, ако лежат в една и съща полуравнина, определена от ординатната ос. Горните разглеждания показват, че в качеството на точка F в теоремата може да се избере който и да е от двата фокуса и съответната му директриса. Ако се забележи, че $p/|1-e^2| = a/e$, уравненията на директрисите може да се запишат във вида $x = \pm a/e$.

6. Полярни координати в равнината. Нека в равнината са избрани лъч с начало точка O (ще я наричаме *полюс*) и положителна посока на въртене (черт. 25). Избрания лъч ще наричаме *полярна ос*. Ако изберем някаква точка $E \neq O$ върху полярната ос, положението на произволна точка $M \neq O$ от равнината се определя еднозначно от наредената двойка числа (ρ, φ),

$$\rho = |\overrightarrow{OM}|, \quad \varphi = \angle(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OM}),$$

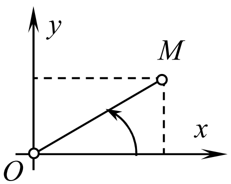
където φ е насочен ъгъл и $\varphi \in [0, 2\pi)$. Числото ρ се нарича *полярен радиус*, а ъгълът φ - *полярен ъгъл*. Ако $M = O$,



Черт. 25

полярният ъгъл не е дефиниран, но точката O се определя еднозначно от условието $\rho = 0$. Числата в наредената двойка (ρ, φ) се наричат *полярни координати* на точката M, а координатната система – *полярна* координатна система.

Да изберем декартова координатна система Oxy, като положителната посока на оста Ox съвпада с посоката на полярната ос, а ординатната ос се ориентира така, че абсцисната ос след завъртане на ъгъл $\pi/2$ в избраната положителна посока на въртене да съвпада с ординатната ос (заедно с посоката). При тези уговорки ще казваме накратко, че двете координатни системи са *съгласувани*. Връзката между декартовите координати (x, y) на произволна точка M и нейните полярни координати (ρ, φ) се дава с равенствата



Черт. 26

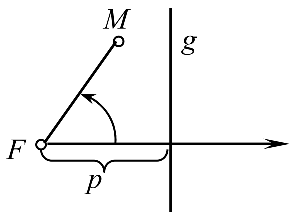
$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi.$$

От тях непосредствено следват

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \frac{x}{\rho} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{\rho} = \sin\varphi.$$

Ако x, y са дадени, от последните две равенства ъгълът φ се определя еднозначно.

7. Уравнение на коничните сечения в полярни координати. Нека C е което и да е от коничните сечения (елипса, хипербола, парабола). Избираме полярна координатна система, като полюс O е някой от фокусите, а полярната ос избираме така, че да е перпендикулярна на директрисата, съответстваща на избрания фокус, и да я пресича. Нека p е разстоянието от фокуса до директрисата. Ако точка M е на разстояние ρ до фокуса и лежи в същата полуравнина, определена от директрисата, в която лежи и полюсът (фокусът), разстоянието й до директрисата е $p-\rho\cos\varphi$ (вж. черт. 27). Това е налице за всички точки на елипсата, параболата и за точките от клона на хиперболата, който лежи в същата полуравнина, в която е фокусът. За точките M от другия клон на хиперболата (неговите точки и фокусът са в различни полуравнини) разстоянието на точката M до директрисата е $\rho\cos\varphi - p$.



Черт. 27

Следователно за всички точки $M(\rho,\varphi)$ от елипсата (параболата) и само за тях имаме

$$\frac{\rho}{p-\rho\cos\varphi}=e.$$

За точките от хиперболата (и само за тях) имаме

$$\frac{\rho}{p-\rho\cos\varphi}=\pm e,$$

където знакът плюс е за точките от единия клон на хиперболата, а минус – за другия. От горните две уравнения получаваме:

$$\rho=\frac{ep}{1+e\cos\varphi}$$

- *уравнение на елипсата и на параболата*, и

$$\rho=\frac{\pm ep}{1\pm e\cos\varphi}$$

- *уравнение на хиперболата*. Напомняме, че за елипсата $0 < e < 1$, за параболата $e = 1$ и $e > 1$ за хиперболата (вж. т. 5). Горните уравнения често се използват в механиката и в астрономията.

§ 3. Метрична класификация на кривите от втора степен

1. В предишния параграф дефинирахме елипсата, хиперболата и параболата чрез техни специални геометрични свойства. Спрямо специално подбрани декартови координатни системи в равнината изведохме уравнения на тези криви. Като се абстрахираме от конкретните особености на тези уравнения, можем да кажем, че те са от вида

$$F(x, y) = 0 , \tag{1}$$

където $F(x, y)$ е полином на x, y от втора степен с реални коефициенти. Следователно според определението от § 1 елипсата, хиперболата и параболата са *криви от втора степен*. В тази връзка принципиално важна е следната задача: ако в равнината е избрана координатна система Oxy, а $F(x, y)$ е *произволен* полином на x, y от втора степен с реални коефициенти, какво представлява от геометрична гледна точка множеството от всички точки с координати (x, y), удовлетворяващи уравнението (1)? С други думи задачата е да си изясним "геометрията" на произволна крива от втора степен. Нека

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} . \tag{2}$$

Фразата "полиномът е от втора степен" винаги предполага, че поне един от коефициентите a_{11}, a_{12}, a_{22} е различен от нула. Означенията в полинома (2) са избрани в съответствие с традиционните означения за квадратични форми: ако напишем квадратична форма на променливите x_1, x_2, x_3 с коефициенти a_{ij} ,$1 \le i, j \le 3,$ и поставим $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = 1,$ ще получим полинома (2). Ясно е, че всеки полином на x, y от втора степен е сума на квадратична форма $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$, линейна функция $2a_{13}x + 2a_{23}y$ и свободен член a_{33}.

Нека $O'x'y'$ е още една (нова) координатна система. Както знаем, връзката между старите и новите координати се дава с формулите

$$x = \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + x_0$$

$$(3) \qquad y = \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + y_0, \quad \det(\alpha_{ij}) \neq 0.$$

Ако в полинома $F(x, y)$ заместим x и y с десните страни на равенствата (3), то той ще се трансформира в някакъв полином $F^*(x', y')$, който също ще бъде от втора степен (вж. § 1, т. 1), а уравнението на кривата спрямо новите координати ще добие вида

$$(4) \qquad F^*(x', y') = 0.$$

Направените наблюдения подсказват, че би могло да се търси такава нова координатна система $O'x'y'$, спрямо която уравнението (4) на кривата да има възможно най-прост вид, и геометричните разглеждания да се проведат в термините на новите координати.

Забележка. Полезна е и следната гледна точка. Нека работим само с една координатна система, да речем Oxy, и да предположим, че в полинома $F(x, y)$ сме направили смяна на променливите с помощта на равенствата (3), в резултат на което сме получили полинома $F^*(x', y')$. Да означим с c кривата, състояща се от всички точки $M(x, y)$, чиито координати x, y удовлетворяват уравнението (1), а c' е кривата, състояща се от всички точки $M'(x', y')$, чиито координати x', y' удовлетворяват уравнението (4). Нека на всяка точка M' от равнината съпоставим точка M от равнината по правилото: координатите на точките M' и M са свързани със съотношенията (3). Съгласно резултатите от гл. 3, § 2, т. 10 това означава, че е зададено биективно афинно изображение (накратко: афинитет) на равнината в себе си, при което кривата c' се изобразява върху кривата c. Естествено е да считаме, че двете криви са *афинно еквивалентни*, т. е. съществува афинитет, който преобразува кривата c' в кривата c. Следователно възможни са две гледни точки, които условно ще наречем *активна* (една координатна система и две криви, които се трансформират една в друга) и *пасивна* (една крива и две координатни системи). В § 2, т. 2 видяхме, че при афинитет елипса може да се трансформира в окръжност. Следователно, ако желаем да запазваме и метричните свойства на кривите, необходимо е афинното изображение (3) да бъде еднаквост. Ако координатната система Oxy е декартова, това изискване е еквивалентно на условието матрицата $T = (\alpha_{ij})$ да бъде ортогонална. *Навсякъде в този параграф ще предполагаме, че всички координатни системи са декартови*. Това гарантира, че ако сменяме координатите по формулите (3), то матрицата T задължително е ортогонална. Смяната (3) с ортогонална матрица T ще наричаме накратко *метрична смяна* на променливите (координатите).

Ако полиномът $F^*(x', y')$ е получен от полинома $F(x, y)$ с помощта на *метрична смяна* на променливите, ще казваме, че двата полинома са *метрично еквивалентни*. Обосновката, че релацията “метрична еквивалентност” е релация на еквивалентност в множеството на всички полиноми от втора степен на две променливи и с реални коефициенти, оставяме за упражнение.

Преди всичко ще изясним кога два полинома са метрично еквивалентни. Ако в полинома (2) направим смяна на променливите по формулите (3), ще получим полинома

(5) $$F^*(x', y') = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x + 2a'_{23}y + a'_{33}\,.$$

Неговите коефициенти може да се пресметнат непосредствено, но много по-удобно е за целта да се използва апаратът на матриците – така ще избегнем замъгляването на някои зависимости. Нека

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

При тези означения смяната на променливите се записва като

(6) $$X = TX' + X_0\,.$$

Като си спомним как квадратична форма се записва матрично, имаме

(7) $$F(x, y) = X^t AX + 2LX + a_{33}.$$

Като вземем предвид, че $X^t = X'^t T^t + X_0^t$, заместваме равенството (6) в дясната страна на (7). Лявата страна ще се трансформира в полинома $F^*(x', y')$ и ще получим

(8) $$F^*(x', y') = (X'^t T^t + X_0^t)A(TX' + X_0) + 2L(TX' + X_0) + a_{33}.$$

Преди да преработим дясната страна, ще забележим, че матрицата $X'^{t}T^{t}AX_0$ е симетрична, защото е от тип 1×1, следователно $X'^{t}T^{t}AX_0 =$ $= (X'^{t}T^{t}AX_0)^{t} = X_0^{t}ATX'$, тъй като матрицата A е симетрична. Ще забележим още, че съгласно (7) $X_0^{t}AX_0 + 2LX_0 + a_{33} = F(x_0, y_0)$. Като вземем предвид всичко това, след непосредствена преработка равенството (8) добива вида

$$F^*(x', y') = X'^{t}(T^{t}AT)X' + 2(X_0^{t}A + L)TX' + F(x_0, y_0). \tag{9}$$

Тъй като A е реална симетрична матрица, то от гл. 2, § 4, т. 5 знаем, че съществува ортогонална матрица T (т. е. $T^{t} = T^{-1}$), за която матрицата $T^{-1}AT$ е диагонална и по диагонала стоят характеристичните корени на матрицата A. Тук няма да напомняме алгоритъма за намиране на матрицата T. От равенството (9) е ясно, че ако освен това успеем да определим x_0, y_0 така, че

$$X_0^{t}A + L = 0, \tag{10}$$

(отдясно стои нулевата матрица от тип 1×2), полиномът (9) ще добие вида

$$F^*(x', y') = s_1x'^2 + s_2y'^2 + F(x_0, y_0), \tag{11}$$

където s_1 и s_2 са характеристичните корени на матрицата A. Матричното уравнение (10) е еквивалентно на системата уравнения:

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} &= 0 \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} &= 0. \end{aligned} \tag{10′}$$

Тя може да се окаже определена, неопределена или несъвместима и е необходим по-детайлен анализ на различните възможности. С оглед на този анализ временно прекъсваме изложението и ще се заемем с въпрос, който, както ще видим, е пряко свързан с горните разглеждания.

2. Метрични инварианти на полином от втора степен на две променливи. Нека $F(x, y)$ е произволен полином от втора степен с реални кофициенти, зададен с равенството (2). Означаваме:

$$I_1 = a_{11} + a_{22}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \det\widetilde{A}, \quad \widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ще покажем, че *ако в полинома* $F(x,y)$, *зададен с равенството* (2), *сменим променливите по формулите* (3)*, където матрицата* $T=(\alpha_{ij})$ *е ортогонална* (направим *метрична смяна*) *и получим полинома* $F^*(x',y')$ *от* (5)*, то* $I_1=I_1'$, $I_2=I_2'$, $I_3=I_3'$, *където*

$$I_1'=a_{11}'+a_{22}',\quad I_2'=\begin{vmatrix}a_{11}' & a_{12}'\\ a_{12}' & a_{22}'\end{vmatrix},\quad I_3'=\det\widetilde{A}',\quad \widetilde{A}'=\begin{pmatrix}a_{11}' & a_{12}' & a_{13}'\\ a_{12}' & a_{22}' & a_{23}'\\ a_{13}' & a_{23}' & a_{33}'\end{pmatrix}.$$

(Казано накратко: числата I_1, I_2, I_3 са *метрични инварианти* на полинома $F(x,y)$ - при ортогонална афинна смяна на променливите те не се променят.)

Наистина, нека $A'=(a_{ij}')$ е матрицата на квадратичната форма в полинома $F^*(x',y')$. От равенството (9) се вижда, че $A'=T^tAT$. Тъй като матрицата T е ортогонална, то $T^t=T^{-1}$, следователно $A'=T^{-1}AT$. Това означава, че матриците A и A' са подобни, следователно имат равни характеристични полиноми. Тези полиноми са съответно

$$s^2-I_1s+I_2,\quad s^2-I_1's+I_2'$$

и вече е ясно, че $I_1=I_1'$, $I_2=I_2'$. Ще отбележим, че ако s_1,s_2 са корените на който и да е от двата полинома, то по формулите на Виет имаме

(12) $$s_1+s_2=I_1,\quad s_1s_2=I_2.$$

Ще забележим още, че поне един от характеристичните корени s_1,s_2 е различен от нула – в противен случай от $I_1=I_2=0$ лесно следва, че квадратичната форма в полинома $F(x,y)$ е нулевата, което противоречи на условието, че полиномът е от втора степен.

Ако се опитаме да докажем с непосредствена проверка, че I_3 също е инвариант, ще се наложи да правим сравнително дълги и отегчителни пресмятания. За да ги избегнем, ще използваме знанията си за квадратичните форми. За целта нека разгледаме квадратичната форма

$$f(x,y,t)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}xt+2a_{23}yt+a_{33}t^2.$$

Очевидно $f(x,y,1)=F(x,y)$. Нека в квадратичната форма направим следната смяна на променливите:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + x_0 t', \\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + y_0 t', \\ t &= \qquad\qquad\qquad\quad t'. \end{aligned}$$

Ще получим формата $f^*(x',y',t')$. Да заместим с $t'=1$: резултатът ще бъде същият, както, ако в $F(x,y)$ направим смяната на променливите (3) от началото на параграфа, т. е. $f^*(x',y',1)=F^*(x',y')$. Както знаем, за матрицата $\widetilde{A}'=(a'_{ij}),\ 1\le i,j\le 3,$ на квадратичната форма f^* е в сила равенството

(13)
$$\widetilde{A}' = \widetilde{T}^t \widetilde{A}\widetilde{T},$$

където

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & x_0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & y_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

е матрицата на смяната. Тъй като матрицата $T=(\alpha_{ij})$ е ортогонална, то $\det T = \pm 1$ и от (13) имаме

$$\det \widetilde{A}' = I'_3 = (\det \widetilde{T})^2 \det \widetilde{A} = (\det T)^2 \det \widetilde{A} = \det \widetilde{A} = I_3,$$

което завършва доказателството.

Ще забележим допълнително, че при $x_0 = y_0 = 0$ матрицата $\widetilde{T}$ е ортогонална, т. е. $\widetilde{T}^t = \widetilde{T}^{-1}$, и равенството (13) сега означава, че матриците $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}'$ са подобни. Следователно те имат равни характеристични полиноми. С непосредствено пресмятане се вижда, че характеристичният полином на $\widetilde{A}$ е

$$\varphi_{\widetilde{A}}(t) = t^3 - (a_{11}+a_{22}+a_{33})t^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}\right)t - I_3.$$

Тъй като той е характеристичен полином и на матрицата $\widetilde{A}'$, то $a_{11}+a_{22}+$ $+a_{33} = a'_{11}+a'_{22}+a'_{33}$ и аналогично за коефициента пред t. Като вземем предвид, че I_1, I_2 са инварианти при произволна ортогонална афинна смяна на променливите, стигаме до извода: ако в полинома $F(x,y)$ сменим променливите с помощта на равенствата (3), където матрицата $T=(\alpha_{ij})$ е ортогонална, то *при* $x_0=y_0=0$ *свободният член* a_{33} *на полинома не се изменя. Не се променя и*

$$\tilde{I}_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Числото $\tilde{I}_2$ се нарича *метричен полуинвариант* на полинома $F(x,y)$.

3. Теорема (метрична класификация на полиномите от втора степен)**.**

А) *Всеки полином* $F(x,y)$ *от втора степен с реални коефициенти с помощта на подходяща ортогонална афинна смяна на променливите с реални коефициенти може да се преобразува в полином, който има един от следните два вида*:

а) $s_1x'^2+s_2y'^2+a'_{33}$, *където винаги* $s_1\neq 0$ *и* $s_1\geq s_2$ *при* $s_1s_2\neq 0$;

б) $s_1x'^2+2a'_{23}y'$, $a'_{23}<0$.

И в двата случая s_1,s_2 *са характеристичните корени на матрицата на квадратичната форма в полинома* $F(x,y)$*, а реалните числа* a'_{23}, a'_{33} *зависят от дадения полином.*

Б) *Два полинома от вида а) или б) са метрично еквивалентни точно тогава, когато са равни.*

Доказателство. **А)** Запазваме горните означения. Избираме ортогоналната матрица $T=(\alpha_{ij})$ така, че матрицата T^tAT да бъде диагонална. Нека $I_2\neq 0$. При това условие системата уравнения $(10')$ има решение и то е единствено. Нека (x_0,y_0) е решението. При така определените ортогонална матрица T и реални числа x_0,y_0 сменяме променливите в полинома $F(x,y)$ по формулите (3). Както видяхме в т. 1, ще получим полином $F^*(x',y')$ от вида (11). За него имаме

$$I_3=s_1s_2F(x_0,y_0)=I_2F(x_0,y_0),\quad \text{т. е. } F(x_0,y_0)=\frac{I_3}{I_2}.$$

Следователно

$$F^*(x',y')=s_1x'^2+s_2y'^2+\frac{I_3}{I_2},$$

т. е. получихме полином от вида а).

Нека $I_2 = s_1 s_2 = 0$. Ще считаме, че $s_1 \neq 0$, $s_2 = 0$ (както отбелязахме по-горе, случаят $s_1 = s_2 = 0$ е невъзможен). Отново избираме подходяща ортогонална матрица $T = (\alpha_{ij})$ и правим смяната (3) при $x_0 = y_0 = 0$. Ще получим полином от вида

$$F^*(x', y') = s_1 x'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a_{33}.$$

Преобразуваме го във вида

$$F^*(x', y') = s_1(x' + \frac{a'_{13}}{s_1})^2 + 2a'_{23}y' + a'_{33}.$$

При $a'_{23} = 0$ правим ортогоналната смяна

$$x'' = x' + \frac{a'_{13}}{s_1}, \quad y'' = y'$$

и получаваме полинома

$$F^{**}(x'', y'') = s_1 x''^2 + a'_{33},$$

който има вида а) от теоремата. При $a'_{23} < 0$ с ортогоналната смяна

$$x'' = x' + \frac{a'_{13}}{s_1}, \quad y'' = y' + \frac{a'_{33}}{2a'_{23}}$$

получаваме полинома

$$F^{**}(x'', y'') = s_1 x''^2 + 2a'_{23}y'',$$

който има вида б) от теоремата. При $a'_{23} > 0$ с ортогоналната смяна

$$x'' = x' + \frac{a'_{13}}{s_1}, \; y'' = -y' - \frac{a'_{33}}{2a'_{23}}$$

стигаме до полинома

$$F^{**}(x'', y'') = s_1 x''^2 - 2a'_{23}y'',$$

който също е от вида б). С това доказахме частта А) от теоремата.

Б) Ще разгледаме няколко случая. 1) Нека два полинома

$$F_1 = s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + a'_{33} \quad \text{и} \quad F_2 = s'_1 x'^2 + s'_2 y'^2 + a''_{33}$$

от тип а) са метрично еквивалентни. Следователно съответните им метрични инварианти са равни:

$$I_1 = s_1 + s_2 = s_1' + s_2', \quad I_2 = s_1 s_2 = s_1' s_2', \quad I_3 = s_1 s_2 a_{33}' = s_1' s_2' a_{33}''.$$

Ако $I_2 \neq 0$, то от формулите на Виет за квадратно уравнение и от условията $s_1 \geq s_2$, $s_1' \geq s_2'$ следва $s_1 = s_1'$, $s_2 = s_2'$. Равенството $a_{33}' = a_{33}''$ е очевидно следствие от израза за I_3. Следователно при $I_2 \neq 0$ имаме $F_1 = F_2$.

Нека $I_2 = 0$. Пак от равенството на съответните метрични инварианти и условията $s_1 \neq 0$, $s_1' \neq 0$ имаме $s_1 = s_1'$, $s_2 = s_2' = 0$. Ако с метрична смяна преобразуваме единия полином в другия, би трябвало

$$s_1(\alpha_{11} x'' + \alpha_{12} y'' + x_0)^2 + a_{33}' = s_1 x''^2 + a_{33}''.$$

Но това равенство на полиноми (всички съответни коефициенти са равни) е възможно единствено, когато $\alpha_{12} = x_0 = 0$, $\alpha_{11} = \pm 1$, $a_{33}' = a_{33}''$, т. е. когато $F_1 = F_2$.

2) Нека някои два полинома от тип б) са метрично еквивалентни, т. е. нека $F_1 = s_1 x'^2 + 2a_{23}' y'$ и $F_2 = s_1' x'^2 + 2a_{23}'' y'$ са метрично еквивалентни и по условие $a_{23}' < 0$, $a_{23}'' < 0$. От равенството на съответните метрични инварианти имаме $I_1 = s_1 = s_1' \neq 0$, $I_3 = -s_1 a_{23}'^2 = -s_1' a_{23}''^2$, следователно $a_{23}' = a_{23}''$ и полиномите са равни.

3) Нека полином $F_1 = s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + a_{33}'$ от тип а) е метрично еквивалентен на полином $F_2 = s_1' x'^2 + 2a_{23}' y'$ от тип б). Пак от равенството на метричните инварианти $I_1 = s_1 + s_2 = s_1'$, $I_2 = s_1 s_2 = s_1' \cdot 0 = 0$ имаме $s_2 = 0$, $s_1 = s_1'$. Инвариантът I_3 за полинома F_1 е $s_1 \cdot 0 \cdot a_{33}' = 0$, а за F_2 той е $-s_1 a_{23}'^2 \neq 0$, следователно полиномите не са метрично еквивалентни, което завършва доказателството на теоремата.

За краткост и удобство теоремата се изказва и така: с помощта на метрична (ортогонална афинна) смяна на променливите всеки полином $F(x, y)$ от втора степен с реални коефициенти може да бъде приведен в *каноничен вид*, който е или от вида а), посочен по-горе, или от вида б). Частта Б) на теоремата показва, че каноничният вид е еднозначно определен.

Любопитно е можем ли да възстановим полинома $F(x, y)$ (с точност до метрична еквивалентност), ако знаем само метричните му инварианти. Отговорът се съдържа в зад. 2 от упражненията.

4. Метрична класификация на кривите от втора степен. С помощта на доказаната теорема вече можем лесно да решим формулираната в т. 1 основна задача на този параграф – геометрична интерпретация на множеството от точки с координати (x, y), удовлетворяващи уравнението

$$F(x, y) = 0.$$

Можем да считаме, че необходимите смени на променливите са направени, т. е. полиномът е приведен в каноничен вид по смисъла на теоремата в т. 3 и остава да детайлизираме геометричната интерпретация. Преди това ще направим някои бележки.

а) Ако $\lambda \neq 0$ е реално число, уравненията $F(x, y) = 0$ и $\lambda F(x, y) = 0$ задават една и съща крива. В т. 3 класифицирахме полиномите с точност до метрична еквивалентност. Сега предстои да *класифицираме уравненията*. Възможността да умножаваме уравненията на дадена крива с константа $\lambda \neq 0$ позволява да работим с "нормализирани уравнения": ако $F(x, y)$ има например вида а) от теоремата в т. 3, можем да предполагаме, че a_{33} има една от трите стойности $1, -1, 0$.

б) Ако $I_1, I_2, I_3, \widetilde{I}_2$ са метричните инварианти и полуинвариантът на полинома $F(x, y)$, от определението им се вижда, че метричните инварианти и полуинвариантът на полинома $\lambda F(x, y)$ са съответно $\lambda I_1, \lambda^2 I_2$, $\lambda^3 I_3, \lambda^2 \widetilde{I}_2$. Следователно, ако искаме да говорим за *инварианти на крива*, трябва да се договорим, че те са определени "с точност до пропорционалност" в следния смисъл: ако $I_1, I_2, I_3, \widetilde{I}_2$ са метричните инварианти и полуинвариантът на кривата с уравнение $F(x, y) = 0$ и $\lambda \neq 0$ е реално число, то $\lambda I_1, \lambda^2 I_2, \lambda^3 I_3, \lambda^2 \widetilde{I}_2$ също са метрични инварианти и полуинвариант на същата крива.

в) Нека $F(x, y) = 0$ е дадена крива от втора степен. *Център* на кривата ще наричаме всяка точка с координати (x_0, y_0), удовлетворяващи системата уравнения $(10')$. Ако системата има решение и то е единствено (кривата има център и той е единствен), ще казваме, че кривата е *централна*. От теорията на системите линейни уравнения знаем, че системата е определена точно тогава, когато детерминантата от коефициентите пред неизвестните е различна от нула, т. е. когато инвариантът I_2 е различен от нула. Тъй като той не се мени при смяна на една декартова координатна система с друга декартова, ясно е че *свойството на една крива да бъде централна е нейно геометрично свойство*, т. е. то не зависи от избора на координатната система. Лесно е да се убедим, че *ако кривата е централна, то центърът ѝ е неин център на симетрия*. Наистина, по-горе видяхме, че ако $I_2 \neq 0$, то спрямо подходяща координатна система $O'x'y'$ с начало $O'(x_0, y_0)$ - центърът на кривата, тя ще има уравнение от вида

$$s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + \frac{I_3}{I_2} = 0 . \tag{14}$$

Ясно е, че ако точката $M_1(x', y')$ лежи върху кривата (координатите ѝ удовлетворяват последното уравнение), то и точката $M_2(-x', -y')$ също лежи върху кривата. Двете точки очевидно са симетрични спрямо началото на координатната система.

По-нататък вместо x', y' ще пишем просто x, y.

I) <u>Централни криви, за които</u> $I_2 > 0$. За полинома $s_1 x^2 + 2a'_{23} y$ инвариантът I_2 е равен на нула, следователно трябва да разгледаме само уравненията от вида (14). За полинома от уравнението (14) имаме $I_1 = s_1 + s_2$, $I_2 = s_1 s_2$. Условието $I_2 > 0$ означава, че характеристичните корени s_1, s_2 са с еднакви знаци.

1) Нека $I_1 I_3 < 0$. Уравнението (14) може да се препише във вида

$$\frac{x^2}{\frac{-I_3}{s_1 I_2}} + \frac{y^2}{\frac{-I_3}{s_2 I_2}} = 1 . \tag{14′}$$

Двата знаменателя са положителни числа (ако и двата корена s_1, s_2 са положителни, то $I_1 > 0$, а $I_3 < 0$; ако и двата корена са отрицателни, то $I_1 < 0$, а $I_3 > 0$). Означаваме: $a = \sqrt{\frac{-I_3}{s_1 I_2}}$, $b = \sqrt{\frac{-I_3}{s_2 I_2}}$ и преписваме уравнението (14′) във вида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 . \tag{15}$$

То очевидно е канонично уравнение на *елипса* с полуоси $a > 0,\ b > 0$.

2) Нека $I_1 I_3 > 0$. Сега уравнението (14) може да се запише във вида

$$\frac{x^2}{\frac{I_3}{s_1 I_2}} + \frac{y^2}{\frac{I_3}{s_2 I_2}} = -1 .$$

Знаменателите отново са положителни и ако $a = \sqrt{\frac{I_3}{s_1 I_2}}$, $b = \sqrt{\frac{I_3}{s_2 I_2}}$, горното уравнение става

(16)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 .$$

Кривата с това уравнение не съдържа точки с реални координати, но в унисон с традицията я наричат *имагинерна елипса*.

3) Нека $I_3 = 0$. Сега уравнението (14) има вида $s_1 x^2 + s_2 y^2 = 0$. Тъй като коефициентите s_1, s_2 са с еднакви знаци, то е еквивалентно на уравнението $|s_1| x^2 + |s_2| y^2 = 0$. Ако означим $a = \sqrt{\frac{1}{|s_1|}}$, $b = \sqrt{\frac{1}{|s_2|}}$, имаме

(17)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 .$$

Кривата се състои само от точката с координати (0, 0) и често я наричат *изродена елипса*. Ако използваме комплексни числа, можем да запишем уравнението (17) във вида

$$\left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right) = 0 .$$

Като вземат повод от това разлагане, казват още, че кривата е *двойка комплексно спрегнати пресичащи се имагинерни прави* с уравнения $\frac{x}{a} + i\frac{y}{b} = 0$ и $\frac{x}{a} - i\frac{y}{b} = 0$.

Кривите от втора степен, за които $I_2 > 0$, се наричат *криви от елиптичен тип.*

I I) <u>Централни криви, за които</u> $I_2 < 0$. Отново можем да предполагаме, че уравнението на кривата има вида (14), но сега s_1, s_2 са с различни знаци.

4) Нека $I_3 \neq 0$. Ако например $s_1 > 0, \quad s_2 < 0$, $I_3 > 0$, уравнението (14) може да се запише във вида

$$\frac{x^2}{\frac{-I_3}{s_1 I_2}} - \frac{y^2}{\frac{I_3}{s_2 I_2}} = 1,$$

където знаменателите са положителни числа. Ясно е, че уравнението може да се запише във вида

(18) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Очевидно (18) е канонично уравнение на *хипербола*. Останалите възможности за знаците на s_1, s_2, I_3 се анализират аналогично. Кривата винаги е хипербола.

5) Нека $I_3 = 0$. В този случай уравнението (14) има вида $s_1 x^2 + s_2 y^2 = 0$. Тъй като характеристичните корени s_1, s_2 са с различни знаци, уравнението може да се запише по еквивалентен начин като

(19) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

- достатъчно е да означим $a = \sqrt{\dfrac{1}{|s_1|}}, \quad b = \sqrt{\dfrac{1}{|s_2|}}$. Лявата страна на (19) се разлага на два линейни множителя, следователно кривата се състои от *две пресичащи се прави* с уравнения $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$ и $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$.

Кривите, за които $I_2 < 0$, се наричат *криви от хиперболичен тип*.

III) <u>Нецентрални криви</u> ($I_2 = 0$). При това условие точно един от корените s_1, s_2 е равен на нула. Според теоремата в т. 3 полиномът от уравнението на кривата сега може да бъде както от вида $s_1 x^2 + a'_{33}$, така и от вида $s_1 x^2 + 2a'_{23} y$ при $a'_{23} \neq 0$.

6) Нека кривата има уравнение от вида $s_1 x^2 + 2a'_{23} y = 0$, където $s_1 \neq 0, \quad a'_{23} \neq 0$. Ако положим $p = \dfrac{-a'_{23}}{s_1}$, уравнението ще се запише във

вида

(20) $$x^2 = 2py\,, \quad p \neq 0\,,$$

и очевидно става дума за *парабола* с ос ординатната ос. (При $p > 0$ параболата е обърната "нагоре", а при $p < 0$ - "надолу".) Тривиално упражнение е да се пресметне, че инвариантите на кривата с уравнение (20) са: $I_1 = 1,\; I_2 = 0,\; I_3 = -p^2 \neq 0$.

Нека по-нататък уравнението на кривата е от вида $s_1 x^2 + a'_{33} = 0$. Има няколко възможности.

7) Ако $a'_{33} = 0$, уравнението на кривата има вида

(21) $$x^2 = 0$$

и тя се състои от *две прави, които се сливат* (една двойна права). Непосредственото пресмятане показва, че $I_1 = 1,\; I_2 = I_3 = 0$. Полуинвариантът $\widetilde{I}_2$ също е равен на нула.

8) Нека $s_1 a'_{33} < 0$. Ако $a = \sqrt{\dfrac{-a'_{33}}{s_1}}$, уравнението се записва като

(22) $$x^2 - a^2 = 0, \quad a > 0.$$

Кривата очевидно се състои от *две успоредни прави* с уравнения съответно $x = a$ и $x = -a$. Инвариантите са $I_1 = 1$, $I_2 = I_3 = 0$. За полуинварианта имаме $\widetilde{I}_2 = -a^2 < 0$. Тази крива има безкрайно много центрове на симетрия – точките от правата с уравнение $x = 0$ (ординатната ос).

9) Нека $s_1 a'_{33} > 0$. Ако $a = \sqrt{\dfrac{a'_{33}}{s_1}}$, уравнението се записва като

(23) $$x^2 + a^2 = 0, \quad a > 0.$$

Кривата не съдържа точки с реални координати. По традиция я наричат *двойка комплексно спрегнати успоредни имагинерни прави*. Инвариантите са същите, както в предишния случай, но сега $\widetilde{I}_2 = a^2 > 0$.

Кривите от втора степен, за които $I_2 = 0$, се наричат криви от *параболичен тип*.

Доказахме: *кривите от втора степен са девет вида и каноничните им уравнения са систематизирани в таблицата по-долу*.

На внимателния читател дължим следното пояснение. Всъщност класифицирахме (с точност до метрична еквивалентност и пропорционалност) *уравненията* $F(x,y)=0$, където $F(x,y)$ е полином от втора степен. Уравненията се оказаха девет. От друга страна, приехме определението, че крива от втора степен, зададена с уравнението $F(x,y)=0$, е *множеството от точки* с реални координати x, y, удовлетворяващи уравнението. Коректно би било да кажем, че *реалните криви от втора степен са: елипса, хипербола, парабола, двойка пресичащи се прави, двойка успоредни прави, двойка сливащи се прави, единствена точка и празното множество от точки* (осем вида). Твърдението, че са девет вида, е традиционно. То наистина е коректно, ако се бяхме уговорили, че ще разглеждаме и точки с комплексни координати (вж. § 1, т. 2 и т. 3).

№	уравнение	I_2		наименование
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$I_2>0$	$I_1 I_3<0$	елипса
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	$I_2>0$	$I_1 I_3>0$	имагинерна елипса
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	$I_2>0$	$I_3=0$	две комплексно спрегнати пресичащи се прави
4	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$I_2<0$	$I_3\neq 0$	хипербола
5	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	$I_2<0$	$I_3=0$	две реални пресичащи се прави

6	$x^2 = 2py$	$I_2 = 0$	$I_3 \neq 0$	парабола
7	$x^2 = 0$	$I_2 = 0$	$I_3 = \widetilde{I}_2 = 0$	две сливащи се прави
8	$x^2 - a^2 = 0$	$I_2 = 0$	$I_3 = 0$, $\widetilde{I}_2 < 0$	две реални успоредни прави
9	$x^2 + a^2 = 0$	$I_2 = 0$	$I_3 = 0$, $\widetilde{I}_2 > 0$	две успоредни имагинерни прави

§ 4. Афинна класификация на кривите от втора степен

1. Ще казваме, че две криви в равнината са *афинно еквивалентни*, ако съществува афинитет (биективно афинно изображение на равнината в себе си), който преобразува едната крива в другата. Целта на параграфа е да класифицираме кривите от втора степен с точност до афинна еквивалентност. В предишния параграф видяхме, че с точност до еднаквост кривите са девет вида. Тъй като всяка еднаквост е специален вид афинно изображение (ортогонално афинно), достатъчно е да се занимаем поотделно с всяка от деветте вида криви, като използваме каноничните им уравнения от таблицата в § 3.

2. Предполагаме, че в равнината е избрана декартова координатна система Oxy. Дефинираме афинитет с формулите

$$x = ax', \quad y = by', \quad a > 0, \quad b > 0.$$

Уравненията на първите пет вида криви от таблицата се преобразуват както следва:

1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \to \qquad x'^2 + y'^2 = 1;$$

2) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad \to \qquad x'^2 + y'^2 = -1;$$

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0 \qquad \to \qquad x'^2+y'^2=0;$

4) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \qquad \to \qquad x'^2-y'^2=1;$

5) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0 \qquad \to \qquad x'^2-y'^2=0.$

В десните страни на горните пет реда са изписани уравненията съответно на окръжност с радиус единица, "имагинерна окръжност с радиус i", двойка перпендикулярни спрегнати имагинерни прави, равнораменна хипербола и двойка перпендикулярни прави. Всъщност получихме, че *всички елипси са афинно еквивалентни на окръжност с радиус единица, всички имагинерни елипси са афинно еквивалентни на "имагинерна окръжност с радиус i", всяка двойка пресичащи се спрегнати имагинерни прави е афинно еквивалентна на двойка перпендикулярни спрегнати имагинерни прави, всяка хипербола е афинно еквивалентна на равнораменна хипербола и всяка двойка пресичащи се прави е афинно еквивалентна на двойка перпендикулярни прави.*

Знаем, че всяка парабола е метрично еквивалентна на парабола с уравнение $x^2=2py$ при подходяща стойност на параметъра p. Нека

$$x=px', \quad y=py'.$$

Това афинно преобразуване е всъщност подобност. Уравнението на параболата се преобразува във вида $x'^2=2y'$. Следователно всяка парабола е *подобна* на парабола с параметър 1, т. е. *всеки две параболи са подобни*.

Всеки две двойки сливащи се прави са метрично еквивалентни, следователно са и афинно еквивалентни.

За останалите две криви от таблицата нека

$$x=ax', \quad y=y'.$$

Уравненията им се трансформират съответно: $x^2-a^2=0 \ \to \ x'^2-1=0$ и $x^2+a^2=0 \ \to x'^2+1=0$. Тъй като всяка двойка реални успоредни прави е метрично еквивалентна на двойката с уравнение $x^2-a^2=0$, а тя е афинно еквивалентна на стандартната двойка с уравнение $x'^2-1=0$, получаваме, че *всеки две двойки реални успоредни прави са афинно еквивалентни*

тни. Същото важи и за всеки две двойки успоредни спрегнати имагинерни прави.

Резултатът от проведените разсъждения може да се резюмира като

3. Теорема. *Всяка крива от втора степен е афинно еквивалентна на точно една от следните девет криви, зададени с уравненията си спрямо декартова координатна система*:

1) $x^2+y^2=1$	6) $x^2=2y$
2) $x^2+y^2=-1$	7) $x^2=0$
3) $x^2+y^2=0$	8) $x^2-1=0$
4) $x^2-y^2=1$	9) $x^2+1=0$.
5) $x^2-y^2=0$	

Изразът "точно една" ни задължава да докажем, че никои две от деветте криви с посочените уравнения не са афинно еквивалентни. Първите три (кривите от елиптичен тип) не са еквивалентни помежду си, защото при афинитет реалните точки (точките с реални координати) се изобразяват в реални, а в случая елипсата съдържа безкрайно много реални точки, имагинерната елипса изобщо не съдържа реални точки, докато кривата с уравнение 3) съдържа точно една реална точка – началото $(0,0)$. Хиперболата с уравнение 4) и двойката пресичащи се прави с уравнение 5) (кривите от хиперболичен тип) също не са еквивалентни, защото при афинитет пресичащите се прави се изобразяват винаги в пресичащи се прави, а хиперболата очевидно не е двойка пресичащи се прави. Аналогични съображения са в сила и за кривите от параболичен тип с уравнения 6) – 9). Остава да се убедим , че никоя крива от даден тип не е афинно еквивалентна на крива от друг тип.

Да допуснем например, че афинитетът

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + x_0 \\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + y_0, \qquad \det(\alpha_{ij}) \neq 0, \end{aligned}$$

изобразява окръжността с уравнение $x'^2 + y'^2 = 1$ в хипербола или в парабола. За всяка точка $M'(x', y')$ от окръжността имаме $|x'| \leq 1$, $|y'| \leq 1$. Когато точката M' описва окръжността, точката $M(x, y)$, която й съответства при афинитета, описва хиперболата и

$$|x|=|\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y'+x_0|\le|\alpha_{11}|+|\alpha_{12}|+|x_0|.$$

Аналогично имаме $|y|\le|\alpha_{21}|+|\alpha_{22}|+|y_0|$. Получихме, че хиперболата (параболата) е ограничено множество от точки в равнината, което е противоречие. Същото разсъждение показва, че окръжността не е афинно еквивалентна на никоя крива, която е неограничено множество от точки.

Да допуснем, че афинитетът от предния абзац изобразява параболата с уравнение $x'^2=2y'$ в хиперболата $x^2-y^2=1$. Очевидно е, че параболата е разположена изцяло в затворената полуравнина $y\ge 0$ (в "горната полуравнина"). Както знаем от Ч. I, гл. 7, § 8, във всяка полуравнина линейният тричлен $Ax+By+C$ приема или само неотрицателни стойности, или само неположителни. Тук $x=\alpha_{11}x'+\alpha_{12}y'+x_0$ и в конкретния случай за всяка точка $M'(x',y')$ от параболата ще имаме или винаги $x\ge 0$, или винаги $x\le 0$. Получаваме, че всички точки от хиперболата $x^2-y^2=1$ имат само неотрицателни (или само неположителни) абсциси, което очевидно е противоречие.

Останалите възможности за евентуална афинна еквивалентност се разглеждат аналогично и ги оставяме за упражнение.

§ 5. Взаимно положение на крива от втора степен и права. Допирателни

1. Нека в равнината е избрана афинна координатна система. Разглеждаме произволна крива от втора степен, зададена спрямо дадената координатна система с уравнение

(1) $$F(x,y)=0,$$

където

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}$$

е полином от втора степен с реални коефициенти. Задачата е да изследваме взаимното положение на кривата с уравнение (1) и произволна права g, лежаща в равнината и зададена с параметрични уравнения

(2) $$g:\quad x=x_0+\alpha t,\quad y=y_0+\beta t.$$

Предполагаме, разбира се, че векторът $\vec{p}(\alpha,\beta)$ е ненулев. За удобство при пресмятанията нека

$$F_1(x,y)=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}\,,$$
$$F_2(x,y)=a_{12}x+a_{22}y+a_{23}\,,$$
$$F_3(x,y)=a_{13}x+a_{23}y+a_{33}\,.$$

(Коефициентите в десните страни са редовете на матрицата $\widetilde{A}$ от коефициентите на полинома $F(x,y)$ (вж. § 3, т. 2).) С непосредствена проверка се вижда, че

(3) $$F(x,y)=F_1(x,y)x+F_2(x,y)y+F_3(x,y)\,.$$

За да намерим общите точки на кривата и правата g (ако има такива), заместваме изразите (2) в уравнението (1) и след лека преработка получаваме

(4) $$(a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2)t^2+2[F_1(x_0,y_0)\alpha+F_2(x_0,y_0)\beta]t+$$
$$+F(x_0,y_0)=0\,.$$

Още тук ще се условим, че ако това уравнение е квадратно и има два *равни* реални корена ($t_1=t_2$), ще казваме, че кривата и правата се пресичат в *двойна точка* (две пресечни точки, които съвпадат).

Случаите, когато уравнението за t е квадратно или не, са геометрично различими, ето защо се въвежда следното

2. Определение. Ще казваме, че ненулевият вектор $\vec{p}(\alpha,\beta)$ е *асимптотичен* за кривата с уравнение (1), ако

(5) $$a_{11}\alpha^2+2a_{12}\alpha\beta+a_{22}\beta^2=0\,.$$

За всяка права, колинеарна с асимптотичен вектор, ще казваме, че е с *асимптотично направление*, или че *принадлежи* на асимптотично направление. *Асимптота* на кривата ще наричаме всяка права, която има асимптотично направление и не пресича кривата.

От уравнението (5) е очевидно, че ако векторът $\vec{p}$ е асипмтотичен, то за всяко $\lambda\neq 0$ векторът $\lambda\vec{p}$ също е асимптотичен.

Възниква принципиалният въпрос, доколко въведените понятия са геометрични, т. е. дали те зависят само от кривата, а не от случайния избор на координатната система. Казано по-ясно, въпросът е следният: ако сменим координатната система с нова, уравнението на кривата ще стане например $a'_{11}x'^2+2a'_{12}x'y'+a'_{22}y'^2\ldots=0$, координатите на вектора $\vec{p}$ ще станат (α',β') и дали отново ще имаме $a'_{11}\alpha'^2+2a'_{12}\alpha'\beta'+a'_{22}\beta'^2=0$? Техническата проверка, че това наистина е така, оставяме на читателя за упражнение. Знанията, как се сменят координатите и как се сменя матрицата на квадратична форма при неособена смяна на променливите, са достататъчни.

Примери. За да си представим по-нагледно нещата, ще анализираме различните видове реални криви от втора степен. Тъй като понятията “асимптотично направление” и “асимптота” не зависят от координатната система, ще използваме каноничните уравнения на кривите спрямо подходяща декартова координатна система.

а) За елипсата, зададена с уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, уравнението (5) добива вида $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=0$ и очевидно няма ненулево реално решение, т. е. *елипсата няма реални асимптотични направления, следователно няма и асимптоти.* Същото заключение важи очевидно и за кривите с уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ и $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$.

б) За хиперболата с уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ уравнението (5) сега има вида $\frac{\alpha^2}{a^2}-\frac{\beta^2}{b^2}=0$. От него следва, че или $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{a}{b}$, или $\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{a}{b}$. Следователно векторите $\vec{p}_1(a,b)$ и $\vec{p}_2(a,-b)$ са асимптотични за разглежданата хипербола и всеки асимптотичен вектор е колинеарен или на $\vec{p}_1$, или на $\vec{p}_2$. Тъй като $b\neq 0$, очевидно е, че векторите $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$ не са колинеарни. Следователно *хиперболата има точно две асимптотични направления*.

Произволна права l_1, колинеарна на вектора $\vec{p}_1$, има уравнение

$$l_1: \quad bx-ay+c=0.$$

Тя е асимптота на разглежданата хипербола точно тогава, когато системата

$$bx-ay+c=0$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

няма решение (правата не пресича хиперболата). Лесна непосредствена проверка показва, че решение не съществува точно тогава, когато $c=0$.

Следователно правата с уравнение $y = \frac{b}{a}x$ е асимптота – факт, известен от § 2. Произволна права, колинеарна с вектора $\vec{p}_2(a,-b)$, има уравнение от вида $bx + ay + c = 0$ и пак с директна проверка се вижда, че тя е асимптота точно тогава, когато $c = 0$. Следователно правата с уравнение $y = -\frac{b}{a}x$ също е асимптота на хиперболата. Окончателно получихме, че *хиперболата има точно две асимптотични направления и точно две асимптоти*. Ако тя е зададена с каноничното си уравнение, асимптотите имат уравнения

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{и} \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

в) За двойката пресичащи се прави (изродената хипербола), зададена с уравнението

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0, \quad a > 0, b > 0,$$

резултатът за асимптотичните направления е същият, както в примера б), но е по-нагледен. Кривата се разпада на две пресичащи се прави с уравнения

$$g_1: \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0, \qquad g_2: \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,$$

т. е. $g_1: \quad bx - ay = 0, \;\; g_2: \quad bx + ay = 0$. Асимптотичният вектор $\vec{p}_1(a,b)$ очевидно е колинеарен на правата g_1, докато $\vec{p}_2(a,-b)$ е колинеарен на g_2. Тук и без пресмятания е ясно, че кривата няма асимптоти, защото всяка асимптота би била успоредна на точно една от правите g_1 и g_2 и, следователно, ще пресича другата. В крайна сметка двойката пресичащи се прави има *точно две асимптотични направления, определени от правите, но няма асимптоти.*

г) За параболата с уравнение

$$y^2 = 2px, \quad p \neq 0,$$

уравнението (5) има вида $\beta^2 = 0$, следователно асимптотичен е само всеки вектор $\vec{p}(\alpha,0), \;\alpha \neq 0$, т. е. асимптотични са само векторите, колинеарни на абсцисната ос - оста на параболата, която определя единственото асимптотично направление. Всяка асимптотична права има уравнение от вида

$y = c$ и очевидно винаги пресича параболата. Следователно *параболата има единствено асимптотично направление, определено от оста й, но няма асимптоти.*

д) Двойката успоредни прави с уравнение

$$x^2 - a^2 = 0, \quad a > 0,$$

има *единствено асимптотично направление*, определено от вектора $\vec{p}(0,1)$, който е колинеарен на правите. Всяка права, успоредна на правите с уравнения $x = a$ и $x = -a$ и различна от тях, е асимптота.

е) За двойната права с уравнение $x^2 = 0$ резултатът е аналогичен на случая с двете успоредни прави – *самата двойна права определя единственото асимптотично направление; всяка права, която е успоредна на двойната права, е асимптота.*

От разгледаните примери може да се направи следният извод: *кривите от елиптичен тип (*$I_2 > 0$*) нямат асимптотични направления, кривите от хиперболичен тип (*$I_2 < 0$*) имат точно по две асимптотични направления, а кривите от параболичен тип (*$I_2 = 0$*) имат точно по едно асимптотично направление.*

Връщаме се към уравнението (4) и ще се заемем с изследването му. Ще улесним задачата, като предположим, че точката $M_0(x_0, y_0)$ лежи върху кривата, т. е. $F(x_0, y_0) = 0$. При това ограничение уравнението (4) ще добие вида

(6) $$(a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2)t^2 + 2[F_1(x_0, y_0)\alpha + F_2(x_0, y_0)\beta]t = 0.$$

Ще разгледаме два основни случая според това, дали уравнението (6) е квадратно, или не.

1) Нека уравнението (4) е квадратно, т. е. нека векторът $\vec{p}(\alpha, \beta)$ не е асимптотичен. Единият корен е $t_1 = 0$, следователно другият корен t_2 също е реално число. Ако коефициентът пред t е различен от нула, ще имаме $t_1 \neq t_2$, следователно кривата и правата имат точно две различни пресечни точки. Нека

$$F_1(x_0, y_0)\alpha + F_2(x_0, y_0)\beta = 0.$$

Сега $t_1 = t_2 = 0$ и двете пресечни точки съвпадат, т. е. кривата и правата имат *двойна пресечна точка* . При тази ситуация ще казваме, че правата с параметрични уравнения (2) е *допирателна* към кривата в точката $M_0(x_0, y_0)$ от кривата.

2) Нека векторът $\vec{p}(\alpha, \beta)$ е асимптотичен. Сега уравнението (6) добива вида

(7) $$[F_1(x_0, y_0)\alpha + F_2(x_0, y_0)\beta]t = 0$$

и или има единствено решение, или се удовлетворява за всяка (реална) стойност на t. В първия случай правата има точно една обща точка с кривата, а във втория – изцяло лежи върху нея. (Първият случай се реализира например, ако кривата е двойка пресичащи се прави g_1, g_2, а дадената права е успоредна на една от тях. Ако дадената права е една от правите g_1, g_2, налице е вторият случай. Ако кривата е две сливащи се прави, правата лежи върху кривата, защото има асимптотично направление и минава през точка от кривата.)

3. Определение. Нека е дадена крива от втора степен с уравнение $F(x, y) = 0$, $M_0(x_0, y_0)$ е точка от кривата и $g : x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t$ е права, която минава през точката M_0. Ще казваме, че правата е *допирателна* към кривата в точката M_0 (или ,че се *допира до кривата* в точката M_0), ако M_0 е двойна точка на пресичане на правата и кривата, или ако правата лежи изцяло върху кривата.

Забележка. Точката $M_0(x_0, y_0)$ от кривата с уравнение $F(x, y) = 0$ се нарича *регулярна* (обикновена, проста), ако поне едно от числата $F_1(x_0, y_0)$ и $F_2(x_0, y_0)$ е различно от нула, т. е. ако точката не е център на кривата, който лежи върху нея. (Ако и двете числа са равни на нула, точката $M_0(x_0, y_0)$ нарекохме център на кривата - § 3, т. 4, в) .) В доста учебници по аналитична геометрия допирателна се дефинира само за регулярни точки $M_0(x_0, y_0)$ от кривата. Ако точката не е регулярна, уравнението (6) има вида

$$(a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2)t^2 = 0 .$$

Ако векторът $\vec{p}(\alpha, \beta)$, колинеарен с правата, не е асимптотичен, уравнението има двоен корен $t_1 = t_2 = 0$ и правата е допирателна. Ако векторът е асимптотичен, уравнението се удовлетворява от всяка стойност на t, правата лежи изцяло върху кривата и по определение е допирателна. Следователно според даденото определение *всяка права през център на кривата,* *който лежи върху кривата (нерегулярна точка), е допирателна.* Тази пълна неопределеност на допирателната в нерегулярните точки може би смущава, но точно това е определението, което се използва в алгебричната геометрия – един от по-висшите етажи на съвременната алгебра и геометрия (вж. например И. Р. Шафаревич, Основы алгебраической геометрии, т. 1, Москва, “Наука”, 1988, стр. 108).

4. Уравнение на допирателната в регулярна точка. Нека точката $M_0(x_0, y_0)$ лежи върху кривата с уравнение $F(x, y) = 0$ и е регулярна. Очевидно е, че уравнението (6) може да има двоен корен, или пък да се удовлетворява за всяка стойност на t, точно тогава, когато

(8) $$F_1(x_0, y_0)\alpha + F_2(x_0, y_0)\beta = 0.$$

Следователно правата, колинеарна на вектора $\vec{p}(\alpha, \beta)$ и минаваща през точката $M_0(x_0, y_0)$ от кривата, ще бъде допирателна точно тогава, когато α, β, x_0, y_0 удовлетворяват уравнението (8) и $F(x_0, y_0) = 0$. Тъй като $|F_1(x_0, y_0)| + |F_2(x_0, y_0)| \neq 0$, уравнението (8) се удовлетворява точно тогава, когато съществува реално число $\lambda \neq 0$, за което $\alpha = \lambda F_2(x_0, y_0)$, $\beta = -\lambda F_1(x_0, y_0)$. От друга страна, точката $M(x, y)$ ще лежи върху допирателната точно тогава, когато векторът с координати $(x - x_0, y - y_0)$ е колинеарен на вектора $\vec{p}(\alpha, \beta)$. С други думи точно тогава, когато

$$\frac{x - x_0}{F_2(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-F_1(x_0, y_0)}.$$

Оттук очевидно следва

$$F_1(x_0, y_0)(x - x_0) + F_2(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Тъй като $F(x_0, y_0) = 0 = F_1(x_0, y_0)x_0 + F_2(x_0, y_0)y_0 + F_3(x_0, y_0)$ според тъждеството (3), уравнението на допирателната получава окончателния вид

(9) $$F_1(x_0, y_0)x + F_2(x_0, y_0)y + F_3(x_0, y_0) = 0.$$

5. Допирателни към някои криви. а) Нека $M_0(x_0, y_0)$ е точка от елипсата с уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Тъй като сега $F_1(x_0, y_0)=\frac{x_0}{a^2}$, $F_2(x_0, y_0)=\frac{y_0}{b^2}$, $F_3=-1$, уравнението на допирателната през M_0 е

(10) $$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}=1.$$

б) За допирателната към хиперболата с уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ получаваме аналогично:

(11) $$\frac{x_0 x}{a^2}-\frac{y_0 y}{b^2}=1.$$

в) За параболата с уравнение $y^2=2px$ имаме $F_1(x_0, y_0)=-p$, $F_2(x_0, y_0)=y_0$, $F_3(x_0, y_0)=-px_0$, следователно уравнението на допирателната в точка $M_0(x_0, y_0)$ от параболата е

$$-px+y_0 y-px_0=0,$$

или

(12) $$y_0 y=p(x+x_0).$$

г) За двойката реални пресичащи се прави с уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ формалното пресмятане за допирателната води до уравнението

(13) $$\frac{x_0 x}{a^2}-\frac{y_0 y}{b^2}=0.$$

Ако точката $M_0(x_0, y_0)$ е различна от пресечната точка $O(0,0)$ на правите, уравнението (13) е уравнение на права, която минава през различните точки O и M_0. Тъй като кривата се състои от правите $g_1: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ и $g_2: \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, то правата с уравнение (13) е една от правите g_1, g_2; ако точката $M_0 \neq O$ лежи върху правата g_1, допирателна е правата g_1, а ако M_0 лежи върху g_2 - допирателна е правата g_2.

Анализирайте самостоятелно случая, когато кривата е двойка успоредни прави g_1 и g_2. Резултатът е аналогичен: допирателната е или правата g_1 (ако точката M_0 лежи върху g_1), или правата g_2.

§ 6. Диаметри на криви от втора степен. Спрегнати диаметри

1. Нека спрямо афинна координатна система в равнината е зададена крива от втора степен с уравнение

(1) $$F(x,y)=0,$$

където

$$F(x,y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}.$$

Хорда ще наричаме всяка отсечка, чиито краища лежат върху кривата. От училищната геометрия знаем, че ако кривата е окръжност, то средите на всички успоредни хорди лежат на една права. Непосредствената ни цел е да получим аналогичен резултат за произволна крива от втора степен.

Нека g е права с параметрични уравнения $x=x_0+\alpha t,\quad y=y_0+\beta t$. За да изключим възможността правата или ненулева отсечка от нея да лежи изцяло върху кривата, ще предположим, че векторът $\vec{p}(\alpha,\beta)$ *не е асимптотичен* за кривата. Това гарантира, че правата или не пресича кривата, или я пресича в две точки (различни или съвпадащи) – вж. § 5.

2. Лема. *Нека правата g пресича кривата с уравнение* (1) *в две точки M_1 и M_2. Точката M_0 е среда на хордата M_1M_2 точно тогава, когато*

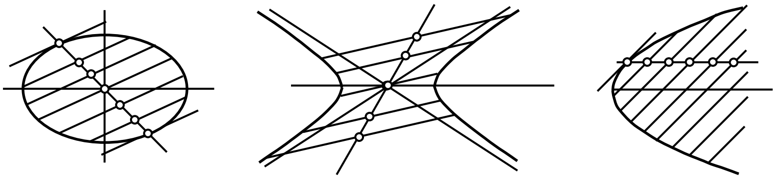
(2) $$F_1(x_0,y_0)\alpha+F_2(x_0,y_0)\beta=0.$$

Доказателство. Нека точката $M_0\,(x_0,y_0)$ е върху отсечката M_1M_2. Ако M_1 е с координати $(x_0+\alpha t_1, y_0+\beta t_1)$, а M_2 - с координати $(x_0+\alpha t_2, y_0+\beta t_2)$, средата на отсечката има координати $(\frac{2x_0+\alpha(t_1+t_2)}{2},\frac{2y_0+\beta(t_1+t_2)}{2})$. Следователно точката $M_0\,(x_0,y_0)$ е среда на отсечката M_1M_2 точно тогава, когато $t_1+t_2=0$. Тъй като краищата на отсечката са върху кривата, то t_1, t_2 са корени на квадратното уравнение (4) от § 5. От формулите на Виет следва, че корените на това уравнение удовлетворяват условието $t_1 + t_2 = 0$ точно тогава, когато е изпълнено условието (2).

3. Твърдение. *Средите на всички хорди, колинеарни на неасимптотичен вектор* $\vec{p}(\alpha, \beta)$ *, лежат на една права, която има уравнение*

(3) $$F_1(x, y)\alpha + F_2(x, y)\beta = 0.$$

(Ще я наричаме *диаметър* на кривата.)



Черт. 28

Доказателство. Ако точката $M(x, y)$ е среда на произволна хорда от разглеждания вид, то според лемата координатите ѝ трябва да удовлетворяват условието (3). Остава да покажем, че уравнението (3) е уравнение на права, т. е. че коефициентите пред x, y не са едновременно равни на нула. Тъй като $F_1(x, y) = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}$, $F_2(x, y) = a_{12}x + a_{22}y + a_{23}$ (вж. § 5), уравнението (3) се записва като

(4) $$(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)y + (a_{13}\alpha + a_{23}\beta) = 0.$$

Ако допуснем, че едновременно $a_{11}\alpha + a_{12}\beta = 0$, $a_{12}\alpha + a_{22}\beta = 0$, то след умножаване на тези равенства съответно с α, β и почленно събиране ще получим, че $a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0$, т. е. че векторът $\vec{p}(\alpha, \beta)$ е асимптотичен, противно на условието. Твърдението е доказано.

4. Следствия. а) *всеки център на кривата лежи на всеки диаметър;*

б) *ако кривата има единствен център (централна крива), то всяка неасимптотична права през центъра е диаметър;*

в) *всеки диаметър на нецентрална крива има асимптотично направление.*

Доказателство. а) Всеки център на кривата е център на симетрия, следователно разполовява всяка хорда. Оттук следва в частност, че ако кривата има поне два центъра, то тя има най-много един диаметър – правата, която съединява центровете. (Такава крива е например двойката успоредни прави.)

б) Нека кривата има уравнение (1), а точката $M_0(x_0, y_0)$ е центърът ѝ. Всяка неасимптотична права през центъра има уравнение от вида

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0, \tag{5}$$

като векторът $\vec{q}(b, -a)$, колинеарен с правата, не е асимптотичен. Твърдението ще бъде доказано, ако покажем, че уравнението (5) може да бъде записано във вида (4). Нека α, β удовлетворят системата

$$a_{11}\alpha + a_{12}\beta = a, \quad a_{12}\alpha + a_{22}\beta = b.$$

Тя има единствено решение, защото кривата е централна, следователно $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$. Векторът $\vec{p}(\alpha, \beta)$ не е асимптотичен – в противен случай, като умножим първото равенство с α, а второто с β и съберем, ще получим $0 = a\alpha + b\beta$, т. е. $\alpha = \lambda b$, $\beta = \lambda(-a)$. Последното означава, че асимптотичният вектор $\vec{p}(\alpha, \beta)$ е колинеарен на неасимптотичния вектор $\vec{q}(b, -a)$, което е противоречие. С така определените стойности на α, β да напишем уравнението (4). Сега в уравненията (4) и (5) коефициентите пред x (съотв. пред y) са равни. Следователно правите с уравнения (4) и (5) или са успоредни, или се сливат. Но те минават през центъра M_0 на кривата, следователно (4) и (5) са уравнения на една и съща права.

в) Нека правата с уравнение (4) е диаметър на нецентрална крива с уравнение (1). Векторът с координати $(a_{12}\alpha + a_{22}\beta,\ -a_{11}\alpha - a_{12}\beta)$ е колинеарен на диаметъра. Проверката, че той е асимптотичен, е непосредствена и я оставяме за упражнение. Следва да се използва, че $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$, защото кривата не е централна.

От твърдението в) следва например, че всеки диаметър на параболата е успореден на оста ѝ. Ще докажем и обратното

5. Твърдение. *Оста на параболата и всяка права, успоредна на оста, е диаметър на параболата.*

Доказателство. Оста на параболата очевидно е диаметър, защото тя е ос на симетрия, следователно разполовява всички хорди, които са перпендикулярни на оста. Остава да разгледаме правите, които са успоредни на оста.

Да предположим, че координатната система е декартова и е избрана така, че параболата да има уравнение $y^2 = 2px$. Всяка права d, успоредна на оста, има уравнение от вида $d: \ y = c, \ c \neq 0$ (оста има уравнение $y = 0$). Хордите, които би разполовявала правата d, не са перпендикулярни на оста – тях ги разполовява оста. Следователно успоредните хорди, които не са перпендикулярни на оста, са колинеарни на права с уравнение $y = kx$. Тя пресича параболата в точките $O(0,0)$ и $M(\frac{2p}{k^2}, \frac{2p}{k})$. Средата M_0 на отсечката OM има координати $(\frac{p}{k^2}, \frac{p}{k})$. Правата d ще минава през точката M_0 точно тогава, когато $c = \frac{p}{k}$. При това условие правата d ще разполовява всички хорди, успоредни на хордата OM, защото средите им лежат на една права, която според твърдението в т. 4, в) е успоредна на оста, т. е. правата d наистина е диаметър.

От доказаните твърдения следва, че *диаметрите на елипсата са правите през центъра ѝ, диаметрите на хиперболата са правите през центъра ѝ, които не са асимптоти, а диаметрите на параболата са оста и правите, успоредни на оста.*

6. Твърдение. *За всяка централна крива от втора степен е в сила следното: ако диаметърът d_1 разполовява хордите, успоредни на диаметъра d_2, то d_2 разполовява хордите, успоредни на диаметъра d_1.*

Доказателство. Предполагаме, че кривата има уравнение (1). Нека диаметърът d_1 разполовява хордите, колинеарни на вектора $\vec{p}_1(\alpha_1, \beta_1)$, а диаметърът d_2 разполовява хордите, колинеарни на вектора $\vec{p}_2(\alpha_2, \beta_2)$. При тези условия правите d_1, d_2 имат уравнения

$$d_1: \quad F_1(x,y)\alpha_1 + F_2(x,y)\beta_1 = 0,$$

$$d_2: \quad F_1(x,y)\alpha_2 + F_2(x,y)\beta_2 = 0,$$

или по-подробно:

$$d_1: \quad (a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1)x + (a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1)y + (a_{13}\alpha_1 + a_{23}\beta_1) = 0\,,$$

$$d_2: \quad (a_{11}\alpha_2 + a_{12}\beta_2)x + (a_{12}\alpha_2 + a_{22}\beta_2)y + (a_{13}\alpha_2 + a_{23}\beta_2) = 0\,.$$

По условие векторът $\vec{p}_1(\alpha_1, \beta_1)$ е колинеарен на диаметъра d_2, следователно

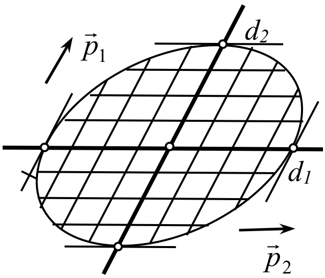
$$(a_{11}\alpha_2 + a_{12}\beta_2)\alpha_1 + (a_{12}\alpha_2 + a_{22}\beta_2)\beta_1 = 0$$

(вж. Ч. I, гл. 6, § 1, т. 4). Това равенство очевидно може да се преобразува и като

(6) $$(a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1)\alpha_2 + (a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1)\beta_2 = 0\,,$$

което означава, че векторът $\vec{p}_2(\alpha_2, \beta_2)$ е колинеарен на диаметъра d_1.

7. Определение. Ако диаметрите d_1, d_2 на крива от втора степен удовлетворяват условията на твърдението от точка 6, ще казваме, че те са *спрегнати* диаметри.



Черт. 29

Твърдението в т. 6 показва, че ако диаметърът d_1 на централна крива от втора степен е спрегнат на диаметъра d_2, то d_2 е спрегнат на d_1, т. е. релацията "спрегнатост" е симетрична. Тъй като векторите $\vec{p}_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $\vec{p}_2(\alpha_2, \beta_2)$, за които стана дума по-горе, определят еднозначно съответните диаметри (и двата диаметъра минават през центъра на кривата, като диаметърът d_1 е колинеарен на вектора $\vec{p}_2$, а диаметърът d_2 е колинеарен на вектора $\vec{p}_1$), за тях се използва понятието "спрегнати вектори": казваме, че ненулевите вектори $\vec{p}_1(\alpha_1, \beta_1)$ и $\vec{p}_2(\alpha_2, \beta_2)$ са *спрегнати* относно кривата, ако е изпълнено условието (6). То гарантира, че съответните диаметри са спрегнати. Условието (6) може да се запише и като по-удобното матрично равенство

(7) $$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0\,.$$

8. Твърдение. *Дадена е централна крива от втора степен. Тогава за всеки диаметър* d_1*, който разполовява хордите, колинеарни на неасимптотичен вектор* $\vec{p}_1(\alpha_1, \beta_1)$*, съществува и то единствен диаметър* d_2*, който е спрегнат на дадения диаметър.*

Доказателство. От разсъжденията, проведени по-горе, следва, че е достатъчно да намерим такъв ненулев вектор $\vec{p}_2(\alpha_2, \beta_2)$, за който да е изпълнено условието (6). Тъй като векторът $\vec{p}_1(\alpha_1, \beta_1)$ не е асимптотичен, числата $a_{11}\alpha_1 + a_{12}\beta_1 = \gamma_1$, $a_{12}\alpha_1 + a_{22}\beta_1 = \gamma_2$ не са едновременно равни на нула, а условието (6) се свежда до уравнението $\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\beta_2 = 0$, което очевидно има ненулево решение и с точност до пропорционалност това решение е единствено, т. е. векторът $\vec{p}_2(\alpha_2, \beta_2)$ е определен еднозначно с точност до пропорционалност. Как да напишем уравнението на търсения диаметър е ясно от твърдението в т. 3.

9. Определение. Ще казваме, че диаметърът d на крива от втора степен е *главен диаметър* (*главна ос*), ако е перпендикулярен на хордите, които разполовява.

10. Твърдение. *Всяка централна крива от втора степен, която не е окръжност, има точно два главни диаметъра (главни оси). Те са перпендикулярни. Всеки два перпендикулярни диаметъра на окръжността са главни. Параболата има точно един главен диаметър – оста ѝ.*

Доказателство. Да предположим, че координатната система е декартова. Нека кривата е централна и d_1 е някакъв диаметър, който разполовява хордите, колинеарни на ненулев вектор $\vec{p}(\alpha, \beta)$, който ще определим по-късно. Тъй като искаме диаметърът d_1 да е перпендикулярен на вектора $\vec{p}(\alpha, \beta)$, то спрегнатият диаметър d_2 трябва да разполовява хордите, колинеарни на вектора $\vec{q}(-\beta, \alpha)$, който е перпендикулярен на $\vec{p}$. Тъй като диаметрите са спрегнати, то d_2 е колинеарен на вектора $\vec{p}(\alpha, \beta)$, следователно е перпендикулярен на d_1 и също е главен. Условието (7) за спрегнатост на диаметрите добива вида

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix} = 0,$$

или

(8) $$-(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)\beta + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)\alpha = 0.$$

И така, търсенето на главен диаметър се сведе до намиране на ненулева наредена двойка реални числа (α,β), които да удовлетворяват уравнението (8). Да предположим, че такава наредена двойка (α,β) съществува. Тъй като $\det(a_{ij}) \neq 0$ (по условие кривата е централна), то $a_{11}\alpha + a_{12}\beta$ и $a_{12}\alpha + a_{22}\beta$ не са едновременно равни на нула и от (8) следва, че съществува реално число $\lambda \neq 0$, за което

(9) $$\begin{aligned} \lambda\alpha &= a_{11}\alpha + a_{12}\beta \\ \lambda\beta &= a_{12}\alpha + a_{22}\beta\,. \end{aligned}$$

Тази система линейни хомогенни уравнения има ненулево решение α,β точно тогава, когато

(10) $$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. когато λ е характеристичен корен на реалната симетрична матрица $A = (a_{ij})$. Както знаем, характеристичните ѝ корени са реални числа. (В случая това се проверява и непосредствено.) Лесно се проверява, че уравнението (10) има двоен корен точно тогава, когато $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$, т. е. когато кривата е окръжност (с положителен, нулев или имагинерен радиус). В този случай корените са $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22}$ и системата се удовлетворява за всички реални стойности на α,β, т. е. всеки диаметър е главен. (Твърдението за окръжността е известно и от училищната геометрия.)

Ако кривата не е окръжност, уравнението (10) има два различни реални корена $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ако (α,β) е ненулево решение на системата (9) при $\lambda = \lambda_1$, то $(\beta,-\alpha)$ е нейно ненулево решение при $\lambda = \lambda_2$. Този факт може да се провери непосредствено, но той е известен от гл. 2, § 4, т. 9 – всеки два собствени вектора на симетричен оператор, съответстващи на различни собствени стойности, са ортогонални. Тъй като решението (α,β) е определено еднозначно с точност до пропорционалност, ясно е че кривата има точно два главни диаметъра и те са перпендикулярни.

Ако кривата е парабола, то диаметри са само оста и правите, успоредни на оста. Тъй като всеки главен диаметър е перпендикулярен на хордите, които разполовява, ясно е, че той е ос на симетрия на кривата. Очевидно е, че оста на параболата е единственият диаметър, който е нейна ос на симетрия.

Упражнения

1. Докажете, че реалните числа I_1, I_2, I_3 са метрични инварианти на поне един полином $F(x,y)$ от втора степен с реални коефициенти точно тогава, когато $I_1^2 - 4I_2 \geq 0$.

Следващата задача изяснява до каква степен можем да възстановим полинома $F(x,y)$, ако знаем само метричните му инварианти.

2. Нека реалните числа I_1, I_2, I_3 са метрични инварианти на някакъв полином $F(x,y)$ от втора степен с реални коефициенти. Докажете, че:

а) ако $|I_2| + |I_3| \neq 0$, числата I_1, I_2, I_3 определят полинома $F(x,y)$ еднозначно с точност до метрична еквивалентност;

б) ако $I_2 = I_3 = 0$ и $\widetilde{I}_2$ е метричният полуинвариант на полинома $F(x,y)$, то числата $I_1, I_2, I_3, \widetilde{I}_2$ определят полинома $F(x,y)$ еднозначно с точност до метрична еквивалентност.

(У п ъ т в а н е. Може да се предполага, че полиномът има вида а) или б) от теоремата в § 3, т. 3.)

3. Дадена е крива от втора степен с уравнение $F(x,y) = 0$. Докажете, че правата с параметрични уравнения $x = x_0 + \alpha t$, $y = y_0 + \beta t$ е асимптота на кривата точно тогава, когато са изпълнени следните три условия:

$$a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0, \quad F_1(x_0, y_0)\alpha + F_2(x_0, y_0)\beta = 0,$$
$$F(x_0, y_0) \neq 0.$$

4. Да се докаже, че всяка крива с уравнение $y = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$, е парабола. Определете оста и върха й. (Координатната система е произволна афинна.) Кога тази парабола и параболата с уравнение $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$ са еднакви? (Отговор. Точно тогава, когато $a = \pm a_1$.)

5. В гл. 3, § 2, т. 7 дефинирахме понятието “афинно свойство”. Докажете, че: а) свойството на една точка да бъде съответно център на дадена крива от втора степен, регулярна точка на дадена крива от втора степен, особена точка на крива от втора степен, са афинни свойства на точката; б) при биективно афинно изображение всяка допирателна на дадена крива от втора степен се изобразява в допирателна на образа на кривата, а спрегнатите диаметри – в спрегнати; асимптотите се изобразяват в асимптоти.

6. Дадена е крива от втора степен с уравнение $F(x, y) = 0$. Нека кривата е елипса (хипербола, парабола), а $M_0(x_0, y_0)$ е точка от нея. Нека M_1 е още една точка от кривата. (Ако е налице хипербола, предполагаме, че точките M_0, M_1 са върху един и същи клон.) Нека g_1 е правата през точките M_0, M_1. Докажете, че допирателната към кривата в точката M_0 е граничното положение на правата g_1, когато разстоянието $|M_0M_1|$ клони към нула.

7. Да се докаже оптичното свойство на елипсата и хиперболата, формулирано в § 2, т. 4. (Упътване. Да се използват уравненията на допирателните към елипсата и хиперболата от § 5, т. 5. Ако F_1, F_2 са фокусите, а M_0 е точка върху елипсата (хиперболата), докажете, че фокалните радиуси F_1M_0 и F_2M_0 сключват равни ъгли с допирателната през точката M_0.)

8. Начертана е елипса (хипербола). Докажете, че:

а) центърът на елипсата (хиперболата) може да се построи само с линийка и пергел;

б) ако е даден диаметър d, спрегнатият му може да бъде построен с линийка и пергел (как?);

в) главните диаметри (осите) може да бъдат построени с линийка и пергел;

г) фокусите може да се построят с линийка и пергел.

(Упътване. Използвайте резултатите от § 6. За в) е удобно да се построи произволна окръжност с център – центъра на кривата, но така, че да я пресече в четири точки; докажете, че те определят правоъгълник, а осите на кривата са симетрали на успоредните му страни.)

8. В окръжност с радиус a е вписана елипса така, че голямата й ос има дължина $2a$. Нека голямата й ос е отсечката A_1A_2.

а) Нека точките M_1, M_2 и M_3, M_4 лежат върху окръжността и са краища на два перпендикулярни диаметъра на окръжността. Нека M_i' е проекцията на точката M_i, $i = 1,2,3,4,$ върху елипсата с помощта на права, перпендикулярна на отсечката A_1A_2. Докажете, че отсечките $M_1'M_2'$ и $M_3'M_4'$ са спрегнати диаметри на елипсата.

б) Ако два спрегнати диаметъра на елипса с оси $2a$ и $2b$ имат дължини съответно $2a_1$ и $2a_2$, докажете, че $a_1^2 + a_2^2 = a^2 + b^2$ (*теорема на Аполон*).

(Упътване. Ако свием окръжността по направление на малката ос на елипсата, ще получим елипсата. Това преобразување е афинно и трасформира спрегнатите диаметри в спрегнати.)

9. Начертана е парабола. Да се построят с линийка и пергел оста и фокусът й.

10. Дадена е елипса (хипербола, парабола) и произволно е избрана точка M_0 от кривата. Ако d е диаметърът през точката M_0, докажете, че допирателната в M_0 е успоредна на спрегнатия диаметър. Да се построи допирателната в произволна точка от кривата.

Глава 5

Повърхнини от втора степен

§ 1. Цилиндрични, конични и ротационни повърхнини

1. В училищната геометрия представата за повърхнина е свързана с равнините в пространството, различните видове многостени, сфери, цилиндри и конуси. Коментарът за кривите от началото на гл. 4 важи в значителна степен и за повърхнините – в различните области на математиката те се дефинират по различен начин. В рамките на тази книга ще се придържаме към следното схващане: ако в пространството е избрана координатна система $Oxyz$, а $F(x,y,z)$ е някаква функция на три променливи, *повърхнина* с уравнение

$$F(x,y,z)=0$$

ще наричаме множеството на всички точки в пространството, чиито координати (x,y,z) удовлетворяват уравнението. Това не е строго определение, защото не уточнихме какъв вид функция имаме предвид. Ако $F(x,y,z)$ е полином, казва се, че повърхнината е *алгебрична*. В тази глава $F(x,y,z)$ почти винаги ще означава полином от втора степен на три променливи, а съответната повърхнина ще наричаме *повърхнина от втора степен.* Повърхнините от първа степен са всичките равнини.

В геометрията често се използват и следните определения на повърхнина:

а) ако $f(x,y)$ е функция, дефинирана в някакво подмножество D на $\mathbf{R}^2$, повърхнина ще наричаме множеството на всички точки с координати (x,y,z) , за които

$$z=f(x,y),\quad (x,y)\in D\,;$$

б) ако $\varphi_1(u,v),\quad \varphi_2(u,v)$, $\varphi_3(u,v)$ са три функции, дефинирани в някакво подмножество D на $\mathbf{R}^2$, повърхнина ще наричаме множеството на точките с координати (x,y,z) , където

$$x=\varphi_1(u,v),\quad y=\varphi_2(u,v),\quad z=\varphi_3(u,v),\quad (u,v)\in D\,.$$

Следва да се има предвид, че определенията не са еквивалентни.

П р и м е р (*уравнение на сфера*). Нека C е точка, а R е положително число. Множеството на всички точки в пространството, които са на разстояние R до точката C, се нарича *сфера* с *радиус* R и *център* точката C.

Ако координатната система е декартова и $C(a,b,c)$, за разстоянието от произволна точка $M(x,y,z)$ до точката C имаме

$$|MC| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} .$$

Очевидно точката $M(x,y,z)$ е точка от сферата тогава и само тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват уравнението

(1) $$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2 .$$

Следователно сферата е алгебрична повърхнина от втора степен, зададена с уравнението (1).

Крива (линия) в пространството се дефинира или като сечение на две повърхнини, което не е повърхнина, или с *параметрични уравнения*

$$x=\psi_1(t), \quad y=\psi_2(t), \quad z=\psi_3(t),$$

където функциите ψ_1,ψ_2,ψ_3 са дефинирани в някакъв интервал $[a,b]$. (Сечението на две повърхнини може да се окаже повърхнина: повърхнината S_1 с уравнение $xy=0$ е обединението на двете координатни равнини Oyz и Oxz, повърхнината S_2 с уравнение $xz=0$ е обединението на координатните равнини Oyz и Oxy, а $S_1 \cap S_2$ е координатната равнина Oyz.)

Ако всички точки на кривата лежат в една равнина, говорим за *равнинна (плоска)* крива.

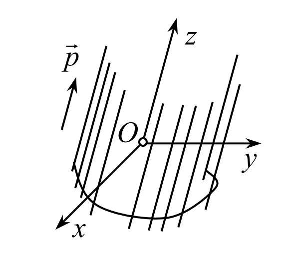
Очевидно е, че правите са линии в пространството – те са пресечници на две равнини, а може да се зададат и с тройки параметрични уравнения.

2. Цилиндрични повърхнини. *Цилиндрична повърхнина* (*цилиндър*) ще наричаме множеството от всички точки върху всички прави, които минават през точките на дадена крива c и са успоредни на фиксиран ненулев вектор $\vec{p}$. Кривата c се нарича *управителна крива* на цилиндъра, а правите – негови *образуващи*.

Ако управителната крива лежи в някаква равнина ε, уместно е да се предполага, че векторът $\vec{p}$ не е компланарен на тази равнина – в противен случай цялата цилиндрична повърхнина ще бъде някакво множество от успоредни прави, лежащи в ε.

Нека управителната крива е плоска (лежи в равнината ε). Избираме в ε афинна координатна система Oxy (черт. 30) и нека спрямо нея кривата има уравнение

(2) $$f(x, y) = 0.$$



Черт. 30

Като предполагаме, че векторът $\vec{p}$ не е компланарен на равнината ε, допълваме равнинната координатна система Oxy до координатна система $Oxyz$ на пространството, така че векторът $\vec{p}$ да е колинеарен на оста Oz. Всяка права, колинеарна на вектора $\vec{p}$, е колинеарна на вектора с координати $(0,0,1)$, следователно има параметрични уравнения от вида

(3) $$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = \lambda$$

(параметърът е λ). Очевидно е, че тази права минава през точка от управителната крива точно тогава, когато $f(x_0, y_0) = 0$. Следователно цилиндричната повърхнина има уравнение от вида (2); образуващите прави са успоредни на оста Oz.

Обратно, нека спрямо афинна координатна система $Oxyz$ е дадена повърхнина с уравнение (2). Множеството от точките в равнината Oxy с координати (x, y), удовлетворяващи уравнението (2), е равнинна крива c. Очевидно е, че ако точка с координати (x_0, y_0) лежи върху кривата c, т. е. ако $f(x_0, y_0) = 0$, то всички точки от правата с уравнения (3) също лежат върху повърхнината, следователно тя е цилиндрична.

Ако $f(x, y)$ е полином от втора степен, управителната крива е крива от втора степен. Ако тя е елипса, хипербола или парабола, говорим съответно за *елиптичен, хиперболичен и параболичен* цилиндър. Уравненията на цилиндрите от втора степен са:

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - елиптичен цилиндър (черт. 31);

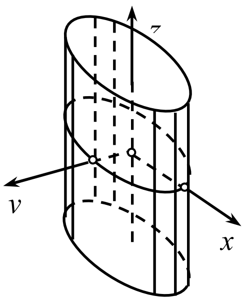
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ - хиперболичен цилиндър (черт. 32);

$y^2 = 2px$ - параболичен цилиндър (черт. 33);

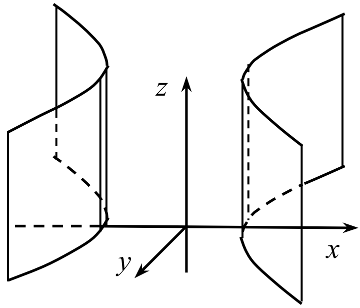
$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ - цилиндър, който се състои от две равнини, които се пресичат по оста Oz (черт. 34);

$x^2 - a^2 = 0$, $a > 0$ - цилиндър, който се състои от две успоредни равнини ;

$x^2 = 0$ - цилиндър, който се състои от две сливащи се равнини.

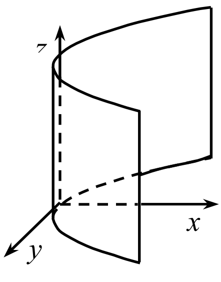


Черт. 31

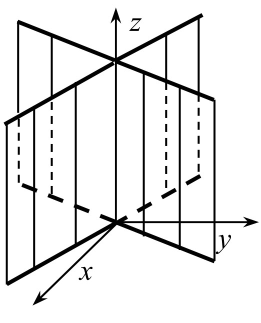


Черт. 32

3. Конични повърхнини. Нека в пространството са дадени някаква крива k и точка M_0, която не лежи върху кривата. Ако кривата е



Черт. 33



Черт. 34

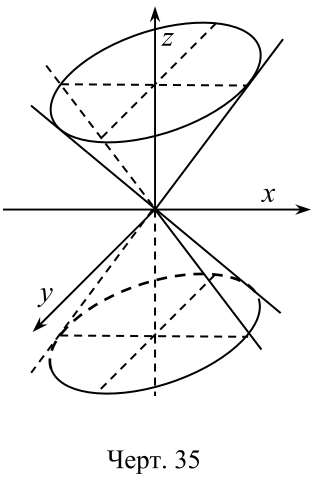
равнинна, ще предполагаме, че точката M_0 не лежи в равнината на кривата. Множеството на всички точки, които лежат върху правите, съединяващи точката M_0 с точките от кривата k, се нарича *конична* повърхнина (конус). Правите се наричат *образуващи* на конуса, точката M_0 - негов *връх*, а кривата k се нарича *управителна* крива на конуса (черт. 35).

За илюстрация ще анализираме конкретната ситуация, когато управителната крива е елипса. Този пример представлява самостоятелен интерес, но ще бъде полезен и по-късно при общата теория на повърхнините от втора степен. Нека спрямо подходяща равнинна декартова координатна система Oxy елипсата има уравнение

(4) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Допълваме координатната система до декартова $Oxyz$ (черт. 35) в пространството. Сега (4) е уравнение на елиптичен цилиндър с образуващи, успоредни на оста Oz. Равнината с уравнение $z=c$ (тя е перпендикулярна на оста Oz) пресича цилиндъра в елипса, която се задава с двойката уравнения

(5) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=c.$$



Черт. 35

Фиксираме c, като предполагаме, че $c \neq 0$, и разглеждаме конуса с връх точката O (началото на координатната система) и управителна крива елипсата k, зададена с уравненията (5). Точката $M_1(x_1, y_1, c)$ лежи върху елипсата k точно тогава, когато x_1, y_1 удовлетворяват уравнението (4). Нека това е изпълнено. Следователно правата g през точките M_1 и $O(0,0,0)$ лежи върху конуса. Тя има параметрични уравнения

(6) $\quad g: \quad x=\lambda x_1, \quad y=\lambda y_1, \quad z=\lambda c.$

Нека $M(x,y,z)$ е точка от правата g и $M \neq O$. Това означава, че $\lambda \neq 0$, а тъй като $c \neq 0$, от уравненията (6) имаме

$$\lambda = \frac{z}{c}, \quad x_1 = \frac{cx}{z}, \quad y_1 = \frac{cy}{z}.$$

По условие x_1, y_1 удовлетворяват уравнението (4). След заместване в него и лека преработка получаваме

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{7}$$

Очевидно е, че координатите на началото O също удовлетворяват уравнението (7). Следователно, ако точка $M(x, y, z)$ лежи върху конуса, то координатите й удовлетворяват уравнението (7).

Нека $M(x, y, z)$ е точка, чиито координати удовлетворяват уравнението (7). Ще покажем, че тя лежи върху конуса. Ако $z = 0$, от (7) следва $x = y = 0$, т. е. $M = O$ - върхът на конуса. Нека $z \neq 0$. Ако означим $x_1 = \frac{cx}{z}$, $y_1 = \frac{cy}{z}$, равенството (7) ще се запише във вида

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

Вече е очевидно, че точката $M_1(x_1, y_1, c)$ лежи върху елипсата k, зададена с уравненията (5), а точката $M(x, y, z)$ лежи върху правата OM_1 с уравнения (6) – достатъчно е да поставим $\lambda = \frac{z}{c}$.

Доказахме: *уравнението* (7) *е уравнение на конуса с управителна крива елипсата* k*, зададена с уравненията* (5)*, и връх – началото на координатната система.*

При $a = b$ елипсата k се превръща в окръжност и конусът се нарича *прав кръгов конус*. Неговото уравнение е

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \tag{8}$$

Очевидно е, че сечението на кръговия конус с всяка равнина $z = d$, $d \neq 0$, е окръжността $x^2 + y^2 = \frac{a^2 d^2}{c^2}$, лежаща в равнината $z = d$.

Може да се докаже, че сеченията на кръговия конус с равнини са криви от втора степен от следните видове: окръжности, елипси, хиперболи, параболи, двойка пресичащи се прави, две сливащи се прави, единствена точка (двойка имагинерни прави). Всяка от изброените криви се реализира като сечение. Както споменахме в гл. 4, § 2, т. 5, това е причината за елипсата, хиперболата и параболата да се използва общото наименование *конични сечения* (вж. там черт. 24).

4. Ротационни повърхнини. Нека в равнината ε са дадени крива k и права l. Повърхнината, която се получава след пълно завъртане на кривата около правата l, се нарича *ротационна повърхнина*; правата се нарича *ротационна ос*. При въртенето всяка точка M от кривата описва окръжност, лежаща в равнината, която минава през M и е перпендикулярна на ротационната ос. Радиусът ѝ е равен на разстоянието от точката M до ротационната ос. Окръжността, за която става дума, се нарича *паралел* (през точката M). Всяка равнина през ротационната ос отсича от повърхнината някаква крива, която се нарича *меридиан*. Тъй като кривата k може да бъде зададена аналитично по различни начини, трудно е да се посочи общо правило за извеждане на уравнението на ротационната повърхнина. Ще се ограничим само с някои илюстрации.

1) Нека координатната система е декартова, кривата лежи в координатната равнина Oxz, а ротационна ос е оста Oz. Предполагаме, че кривата е зададена с уравненията

$$x = f(z), \quad y = 0 .$$

Ще покажем, че ротационната повърхнина има уравнение

$$x^2 + y^2 = f^2(z) . \tag{9}$$

Нека $M_1(f(z_1),0,z_1)$ е точка от кривата. Равнината с уравнение $z = z_1$ е перпендикулярна на оста Oz (ротационната ос), пресича я в точката $M_0(0,0,z_1)$ и минава през точката M_1. Разстоянието на точката M_1 до оста Oz е $|M_0M_1| = |f(z_1)|$. Паралелът през точката M_1 се състои от точките $M(x,y,z_1)$, които са на разстояние $|f(z_1)|$ до точката M_0. Тъй като

$$|M_0M| = \sqrt{x^2 + y^2} ,$$

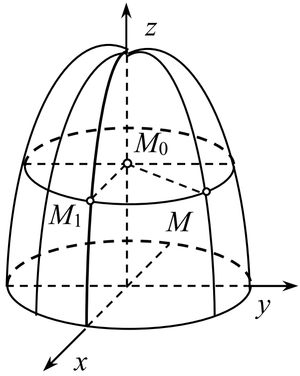
то $\sqrt{x^2 + y^2} = |f(z_1)|$, или еквивалентно $x^2 + y^2 = f^2(z_1)$. Тъй като M_1 е произволна точка от кривата, получаваме равенството (9). Получихме, че координатите (x, y, z) на произволна точка от ротационната повърхнина удовлетворяват уравнението (9). Обратното твърдение, че ако координати те удовлетворяват (9), то точката лежи върху ротационната повърхнина, оставяме за упражнение.

2) Нека кривата k е зададена с уравненията

$$F(x,z)=0, \quad y=0.$$

Ще покажем, че ако оста Oz е ротационна ос, то ротационната повърхнина има уравнение

$$F(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0. \tag{10}$$



Черт. 36

Нека $M_1(x_1,0,z_1)$ е произволна точка от кривата (черт. 36), т. е. $F(x_1,z_1)=0$. Както в предишния пример се вижда, че разстоянието от точката M_1 до оста Oz е $|x_1|$. Ако $M_0(0,0,z_1)$ е пресечната точка на равнината $z=z_1$ с оста Oz, паралелът през точката M_1 се състои от точките $M(x,y,z_1)$, за които

$$|M_0M|=\sqrt{x^2+y^2}=|x_1|.$$

Следователно $x_1=\pm\sqrt{x^2+y^2}$. Като заместим в равенството $F(x_1,z_1)=0$ и вземем предвид произвола при избора на z_1, получаваме уравнението (10).

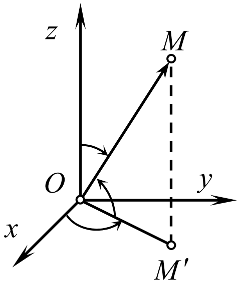
З а б е л е ж к а. Още примери и чертежи на ротационни повърхнини има в § 5.

§ 2. Полярни, сферични и цилиндрични координати в пространството

Ако в пространството е избрана афинна или декартова координатна система, положението на всяка точка се определя еднозначно от наредена тройка реални числа – координатите на точката спрямо избраната координатна система. Ще разгледаме и други начини за еднозначно определяне на точките в пространството чрез наредени тройки реални числа.

1. Полярни координати в пространството. Нека $Oxyz$ е декартова координатна система и $M(x,y,z)$ е произволна точка. Ако $M'(x,y,0)$ е ортогоналната проекция на точката M върху равнината Oxy, ясно е, че положението на точката M се определя еднозначно от следните три реални числа

$$\rho = |OM|, \quad \varphi = \angle(Ox, \overrightarrow{OM'}), \quad \theta = \angle(Oz, \overrightarrow{OM}),$$



Черт. 37

които се наричат *полярни координати* на точката M. Ще предполагаме, че $\rho \in [0,+\infty)$, $\varphi \in [0,2\pi)$, $\theta \in [0,\pi]$. За началото O имаме $\rho = 0$, а ъглите φ, θ не са дефинирани. Връзката между декартовите координати (x,y,z) на точката M и нейните полярни координати (ρ,φ,θ) се установява лесно. Достатъчно е да забележим, че $|OM'| = \rho\sin\theta$, откъдето непосредствено следват равенствата

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z = \rho\cos\theta.$$

2. Сферични (географски) координати. Ако вместо ъгъла θ разглеждаме ъгъла $\psi = \angle(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$, наредената тройка (ρ,φ,ψ) от реални числа също определя еднозначно положението на точката M в пространството. Трите числа се наричат *сферични* или *географски* координати на точката M. Предполага се, че $\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Тъй като $|OM'| = \rho\cos\psi$, връзката между декартовите и географските координати на точката M се дава с равенствата

$$x = \rho\cos\psi\cos\varphi,$$
$$y = \rho\cos\psi\sin\varphi,$$
$$z = \rho\sin\psi.$$

3. Цилиндрични координати. При означенията от черт. 37 нека $|OM'| = R$. Положението на точката M се определя еднозначно от числата R, φ, z, които се наричат нейни *цилиндрични* координати. Предполага се, че $R \in [0, +\infty)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$, $z \in (-\infty, +\infty)$. Връзката между цилиндричните координати на точката M и декартовите й координати (x, y, z) е

$$x = R\cos\varphi\,, \quad y = R\sin\varphi\,, \quad z = z\,.$$

Терминът "цилиндрични" може да се обясни със следния факт: множеството на всички точки, за които R е дадена постоянна величина, е цилиндърът с уравнение $x^2 + y^2 = R^2$.

§ 3. Метрична класификация на полиномите от втора степен на три променливи. Метрични инварианти

Всички разглеждани полиноми са с реални коефициенти.

1. Смяна на променливите. Разсъжденията в този параграф са аналогични на проведените в гл. 4, § 3 и тук обясненията ще бъдат по-кратки. Нека $F(x, y, z)$ е произволен полином от втора степен на променливите x, y, z с реални коефициенти. Ще се придържаме към означението

$$F(x,y,z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}\,. \tag{1}$$

Тъй като полиномът е от втора степен, то поне един от коефициентите a_{ij}, $1 \le i, j \le 3$, е различен от нула. Очевидно полиномът е сума на квадратичната форма $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$, линейната форма $2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z$ и свободния член a_{44}. Нека

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{34} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Полиномът може да се запише във вида

(2) $$F(x,y,z) = X^t AX + 2LX + a_{44}\,.$$

Ще сменим променливите с помощта на равенствата

(3) $$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' + x_0 \\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' + y_0 \\ z &= \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' + z_0\,, \qquad \det(\alpha_{ij}) \neq 0. \end{aligned}$$

Тук x_0, y_0, z_0 са някакви реални числа, които ще определим по-късно. Ако означим

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix},$$

смяната (3) може да се запише като едно матрично равенство:

(4) $$X = TX' + X_0\,.$$

В случая ще говорим за неособена *афинна* смяна на променливите. Ако $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, смяната е неособена *линейна* (вж. гл. 1, § 2, т. 1). Ако матрицата $T = (\alpha_{ij})$ е ортогонална, ще казваме, че (3) е *метрична* смяна на променливите.

Ако заместим равенството (4) в равенството (2) (правим неособена афинна смяна на променливите в полинома $F(x,y,z)$), след преработка буквално както в гл. 4, § 3, т. 1, ще получим полинома

(5) $$F^*(x',y',z') = X'^t(T^t AT)X' + 2(X_0^t A + L)TX' + F(x_0,y_0,z_0).$$

Ясно е, че матрицата на квадратичната форма в полинома F^* е $T^t AT$, матрицата $(X_0^t A + L)T$ от тип 1×3 се състои от коефициентите на линейната форма , а свободният член е $F(x_0,y_0,z_0)$. Ще подчертаем, че матрицата на квадратичната форма се сменя точно така, както ако смяната е линейна, т. е. без значение е дали смяната е неособена афинна, или неособена линейна.

Тъй като A е реална симетрична матрица, то от гл. 2, § 4, т. 5 знаем, че съществува ортогонална матрица T (т. е. $T^t = T^{-1}$), за която матрицата

$T^{-1}AT$ е диагонална и по диагонала стоят характеристичните корени на матрицата A. Ако допълнително определим x_0, y_0, z_0 така, че

(6) $$X_0^t A + L = 0$$

(отдясно стои нулевата матрица от тип 1×3), полиномът F^* ще добие вида

(7) $$F^*(x', y', z') = s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + s_3 z'^2 + F(x_0, y_0, z_0),$$

където s_1, s_2, s_3 са характеристичните корени на матрицата A. Анализът на възможностите за опростяване на полинома F чрез неособена афинна смяна на променливите (преход към полином F^*) се усложнява от факта, че матричното уравнение (6) за X_0 може да няма решение, или пък да има безбройно много решения. Опитът с кривите от втора степен (гл. 4) подсказва, че е удобно да си изясним предварително кои характеристики на полинома не се променят при смяната на променливите. Това представлява и самостоятелен интерес.

2. Метрични инварианти на полином от втора степен на три променливи. Ще предполагаме, че неособената афинна смяна (3) на променливите е *метрична*, т. е. че матрицата $T = (\alpha_{ij})$ е ортогонална. Вече видяхме, че квадратичната форма в полинома $F^*(x', y', z')$ има матрица $T^t AT = T^{-1}AT$ (равенството е налице, защото матрицата T е ортогонална). Следователно матриците на квадратичните форми в полиномите F и F^* са подобни, откъдето следва, че характеристичните им полиноми са равни. Непосредственото пресмятане показва, че характеристичният полином на матрицата A е:

$$\varphi_A(t) = t^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})t^2 + \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}\right)t -$$
$$- \det A.$$

Същия полином ще получим, ако вместо A използваме матрицата на квадратичната форма в полинома F^*. Следователно *числата*

$$I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad I_3 = \det A$$

са метрични инварианти на полинома F : при метрична смяна на променливите полиномът се променя, но I_1, I_2, I_3 запазват стойностите си.

Забележка. Нека s_1, s_2, s_3 са корените на полинома $\varphi_A(t)$. Тъй като матрицата A е реална симетрична, те са реални числа (вж. гл. 2, § 4, т.3). От равенството

$$t^3 - I_1 t^2 + I_2 t - I_3 = (t - s_1)(t - s_2)(t - s_3)$$

след сравняване на коефициентите получаваме

$$I_1 = s_1 + s_2 + s_3, \quad I_2 = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3, \quad I_3 = s_1 s_2 s_3 .$$

Нека

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

е матрицата от всички коефициенти в полинома F . Ще покажем, че

$$I_4 = \det \widetilde{A}$$

също е метричен инвариант на полинома. Доказателството е аналогично на съответното доказателство за полиномите от втора степен на две променливи. Разглеждаме квадратичната форма

$$f(x, y, z, t) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$

$$+ 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt + a_{44}t^2.$$

Матрицата на тази форма също е $\widetilde{A}$. Правим неособената линейна смяна на променливите

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' + x_0 t' \\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' + y_0 t' \\ z &= \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' + z_0 t' \\ t &= \phantom{\alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' + z_0} t'. \end{aligned}$$

Матрицата на смяната е

$$\widetilde{T} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & x_0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & y_0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ако $\widetilde{A}'$ е матрицата на квадратичната форма $f^*(x', y', z', t')$, получена след смяната на променливите, то $\widetilde{A}' = \widetilde{T}^t \widetilde{A} \widetilde{T}$, следователно

(8) $$\det \widetilde{A}' = \det \widetilde{T}^2 \cdot \det \widetilde{A}.$$

При ортогонална матрица $T = (\alpha_{ij})$ имаме $\det T = \pm 1$, следователно $\det \widetilde{T} = \pm 1$ и от равенството (8) имаме $\det \widetilde{A}' = \det \widetilde{A}$. Тъй като

$$f(x, y, z, 1) = F(x, y, z), \qquad f^*(x', y', z', 1) = F^*(x', y', z'),$$

матриците от всички коефициенти на полиномите F, F^* са съответно $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}'$, което завършва доказателството.

Не е сложно да се докаже, че при метрична смяна на променливите с помощта на равенствата (3) при $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ (т. е. при ортогонална *линейна* смяна на променливите при) не се променят и числата

$$\widetilde{I}_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{24} \\ a_{14} & a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{13} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$\widetilde{I}_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{14} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{24} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

Те се наричат *метрични полуинварианти* на полинома. За целта ще забележим, че при $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ матрицата $\widetilde{T}$ е ортогонална, а от равенството $\widetilde{A}' = \widetilde{T}^t \widetilde{A} \widetilde{T}$ сега следва, че матриците $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}'$ са подобни, следователно имат равни характеристични полиноми. С непосредствено пресмятане се вижда, че

$$\varphi_{\widetilde{A}}(t) = t^4 - (a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{44})t^3 + (I_2 + \widetilde{I}_2)t^2 - (I_3 + \widetilde{I}_3)t + I_4.$$

(Ще напомним, че всеки минор, който се съдържа в редове и стълбове с едни и същи номера, се нарича *главен*. В случая коефициентът пред t^3 е сумата, умножена с минус единица, на всички главни минори от първи ред в матрицата $\widetilde{A}$, коефициентът пред t^2 е сумата на главните минори от втори ред и т. н..) Твърдението следва от факта, че за матриците $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}'$ числата $I_2+\widetilde{I}_2$ и съответно $I_3+\widetilde{I}_3$ имат едни и същи стойности, а I_2 и I_3 са метрични инварианти.

Резюме на резултата от проведените разсъждения е следната

3. Теорема. *Числата* I_1, I_2, I_3, I_4, *дефинирани по-горе, са метрични инварианти на полинома* $F(x,y,z)$ *от втора степен с реални коефициенти: при метрична смяна на променливите от вида* (3) *полиномът се променя, но те запазват стойностите си. Числата* $\widetilde{I}_2, \widetilde{I}_3$ *са метрични полуинварианти*: *при метрична смяна от вида* (3), *в която* $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, *те не се променят. Ако* s_1, s_2, s_3 *са характеристичните корени на матрицата* A *на квадратичната форма в полинома* $F(x,y,z)$, *то*

$$I_1 = s_1 + s_2 + s_3, \quad I_2 = s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3, \quad I_3 = s_1 s_2 s_3 .$$

4. Афинни инварианти на полином от втора степен на три променливи с реални коефициенти. В тази точка се отказваме от предположението, че в смяната на променливите (3) матрицата $T = (\alpha_{ij})$ е ортогонална. Ще предполагаме единствено, че тя е неособена, т. е. правим произволна неособена афинна смяна на променливите.

Да прегледаме отново текста на предишната точка. Матрицата A на квадратичната форма в полинома F се сменя точно така, както се сменя матрицата на квадратична форма при неособена линейна смяна на променливите. Както знаем от закона за инерцията (гл. 1, § 2, т. 5), наредената тройка от неотрицателни цели числа (r_0, r_+, r_-), наречена *сигнатура*, е инвариант на всяка реална квадратична форма (зависи от формата, но не се променя при неособенна линейна смяна на променливите). Напомняме, че r_+ (съотв. r_-) е броят на положителните (съотв. отрицателните) коефициенти в каноничния вид на квадратичната форма. В случая имаме

$$r_0 + r_+ + r_- = 3, \quad r_0 < 3.$$

Неравенството отразява факта, че разглежданата квадратична форма не е нулева. Следователно *ненулевата наредена двойка* (r_+, r_-) *е афинен инвариант на полинома* $F(x, y, z)$.

Същите бележки важат и за разгледаната по-горе квадратична форма $f(x, y, z, t)$ с матрица $\widetilde{A}$. Нека нейната сигнатура е $(\bar{r}_0, \bar{r}_+, \bar{r}_-)$, където $\bar{r}_0 + \bar{r}_+ + \bar{r}_- = 4, \quad \bar{r}_0 < 4$. *Ненулевата наредена двойка* $(\bar{r}_+, \bar{r}_-)$ *също е афинен инвариант на полинома* $F(x, y, z)$.

От текста в т. 3 може да се извлече и следното: *ако метричният инвариант* I_3 *на полинома* $F(x, y, z)$ *е различен от нула, той се променя при афинна смяна на променливите, но запазва знака си; същото важи и за метричния инвариант* I_4.

5. **Теорема** (метрична класификация на полиномите от втора степен на три променливи). **А**) *Всеки полином* $F(x, y, z)$ *от втора степен с реални коефициенти с помощта на подходяща метрична смяна на променливите с реални коефициенти може да се преобразува в полином, който има един от следните два вида*:

а) $s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + s_3 z'^2 + a'_{44}$, *където* $s_1 \neq 0$;

б) $s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + 2a'_{34} z'$, *където* $s_1 \neq 0$ *и* $a'_{34} < 0.$

И в двата случая s_1, s_2, s_3 *са характеристичните корени на матрицата на квадратичната форма в полинома* $F(x, y, z)$, *а реалните числа* a'_{44}, a'_{34} *зависят от дадения полином. Коефициентите* s_1, s_2, s_3 *удовлетворяват допълнителното условие: ненулевите са в низходящ ред* $s_1 \geq s_2 \geq \ldots$, *а равните на нула имат най-големи номера*.

Б) *Два полинома от вида* а) *или* б) *са метрично еквивалентни точно тогава, когато са равни.*

Доказателство. **А**) В полинома $F(x, y, z)$ правим смяна на променливите по формулите (3) с ортогонална матрица T, такава, че матрицата $T^t A T$ да бъде $diag(s_1, s_2, s_3)$. Номерацията на корените s_1, s_2, s_3 може да се избира произволно, следователно и така, както се иска в заключението на теоремата. Ще разгледаме два случая.

I) Нека матричното уравнение (6) има поне едно решение X_0. Ще отбележим, че уравнението е еквивалентно на системата

$$
(9) \qquad \begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0 \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0 \end{aligned}
$$

(използвахме, че $a_{ij} = a_{ji}$). При така избрани матрица $T = (\alpha_{ij})$ и матрица X_0 след метричната смяна (3) полиномът ще получи вида а) от теоремата (вж. равенството (5) от т. 1).

Забележка. Ако инвариантът $I_3 = \det(a_{ij}) = s_1 s_2 s_3$ е различен от нула, системата (9) има решение и то е единствено.

II) Нека системата (9) няма решение. Това означава в частност, че $I_3 = s_1 s_2 s_3 = 0$.

Нека например $s_1 \neq 0$, $s_2 = s_3 = 0$. Ще направим смяната (3) при $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ (последното не е задължително). Ще получим полином от вида

$$F^*(x', y', z') = s_1 x'^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a'_{44}.$$

Преобразуваме го като

$$F^*(x', y', z') = s_1\left(x' + \frac{a'_{14}}{s_1}\right)^2 + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a''_{44}.$$

Ако $a'_{24} = a'_{34} = 0$, то след смяната $x'' = x' + \dfrac{a'_{14}}{s_1}$, $y'' = y'$, $z'' = z'$ получаваме полинома

$$s_1 x''^2 + a''_{44},$$

който е от вида а) в теоремата. Нека поне едно от числата a'_{24}, a'_{34} е различно от нула, например $a'_{24} \neq 0$. Сега

$$F^*(x', y', z') = s_1\left(x' + \frac{a'_{14}}{s_1}\right)^2 + 2a'_{24}\left(y' + \frac{a''_{44}}{2a'_{24}}\right) + 2a'_{34}z'$$

и след смяната $x'' = x' + \dfrac{a'_{14}}{s_1}$, $y'' = y' + \dfrac{a''_{44}}{2a'_{24}}$, $z'' = z'$ получаваме полинома

$$s_1 x''^2 + 2a'_{24}y'' + 2a'_{34}z'',$$

в който свободният член е равен на нула. За удобство нека сменим означенията, които обраснаха с индекси, и да разгледаме полинома

$$s_1x^2 + 2ay + 2bz\,, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Проблемът е дали можем с метрична смяна на променливите да го преобразуваме в полином от вида б), посочен в теоремата. За целта ще опитаме с ортогонална линейна смяна на променливите от вида

$$x = x', \quad y = \beta_{11}y' + \beta_{12}z', \quad z = \beta_{21}y' + \beta_{22}z'\,.$$

Целта винаги може да се постигне, стига да изберем ортогоналната матрица (β_{ij}) така, че

$$a\beta_{11} + b\beta_{21} = 0, \quad a\beta_{12} + b\beta_{22} < 0\,.$$

(Поискахме в израза $ay + bz = (a\beta_{11} + b\beta_{21})y' + (a\beta_{12} + b\beta_{22})z'$ коефициентът пред y' да е равен на нула, а пред z' - да е отрицателен.) Това винаги може да се направи: например, ако

$$(\beta_{11}, \beta_{21}) = \lambda(b, -a), \quad (\beta_{12}, \beta_{22}) = \mu(a, b)$$

и изберем подходящи λ, μ. Детайлите пропускаме.

Нека $s_1s_2 \neq 0, \quad s_3 = 0$. С разсъждения, аналогични на горните, ще стигнем до полином от вида

$$s_1x'^2 + s_2y'^2 + 2a'_{34}z' + a'_{44}\,.$$

При $a'_{34} = 0$ полиномът е от вида а) в теоремата. При $a'_{34} \neq 0$ го преобразуваме във вида

$$s_1x'^2 + s_2y'^2 + 2a'_{34}(z' + \frac{a'_{44}}{2a'_{34}})$$

и след смяната $x'' = x', \quad y'' = y', \quad z'' = \varepsilon(z' + \frac{a'_{44}}{2a'_{34}}),$ където $\varepsilon = \pm 1$ и $\varepsilon a'_{34} < 0$, получаваме полином от вида б).

Ще докажем твърдението Б).

а) Да допуснем, че два полинома

$$F_1 = s_1x'^2 + s_2y'^2 + s_3z'^2 + a'_{44}\,, \quad F_2 = s'_1x'^2 + s'_2y'^2 + s'_3z'^2 + a''_{44}$$

от вида а) са метрично еквивалентни. При метрична смяна на променливите матрицата на квадратичната форма в полинома се трансформира в подобна (вж. началото на доказателството). Тъй като полиномите F_1, F_2 са метрично еквивалентни, матриците на квадратичните им форми $diag(s_1, s_2, s_3)$ и $diag(s_1', s_2', s_3')$ са подобни, следователно множествата $\{s_1, s_2, s_3\}$ и $\{s_1', s_2', s_3'\}$ на характеристичните им корени съвпадат. От възприетия в теоремата начин за номериране вече следва $s_i = s_i',\ i = 1,2,3$.

Забележка. Същото разсъждение може да се повтори и за два полинома от вида б), или за полином от вида а) и полином от вида б).

Ако инвариантът $I_3 = s_1 s_2 s_3$ е различен от нула, то от равенството $I_4 = I_3 a_{44}' = I_3 a_{44}''$ следва $a_{44}' = a_{44}''$ и $F_1 = F_2$.

Нека $I_3 = 0$ и например $s_1 s_2 \neq 0,\ s_3 = 0$. Тъй като полиномите F_1, F_2 са метрично еквивалентни, то с помощта на метрична смяна на променливите от вида (3) F_1 може да се трансформира в F_2. По-точно нека в (3) вместо x, y, z поставим x', y', z', а вместо x', y', z' поставим x'', y'', z''. След заместване в полинома F_1 трябва да имаме равенството на полиноми

$$s_1(\alpha_{11}x'' + \alpha_{12}y'' + \alpha_{13}z'' + x_0)^2 + s_2(\alpha_{21}x'' + \alpha_{22}y'' + \alpha_{23}z'' + y_0)^2 + a_{44}'$$
$$= s_1 x''^2 + s_2 y''^2 + a_{44}''.$$

Непосредственото сравняване на коефициентите на полинома от лявата страна със съответните коефициенти на полинома отдясно показва, че равенството е възможно единствено когато $\alpha_{11} = \pm 1,\ \alpha_{22} = \pm 1,\ \alpha_{12} = \alpha_{13}$ $= \alpha_{21} = \alpha_{23} = 0$ и $x_0 = y_0 = 0$. От тези условия следва, че и $a_{44}' = a_{44}''$. Ако $s_2 = s_3 = 0$, разсъждението е аналогично.

б) Да допуснем, че два полинома

$$F_1 = s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + 2a_{34}' z',\quad F_2 = s_1' x'^2 + s_2' y'^2 + 2a_{34}'' z'$$

от вида б) са метрично еквивалентни. От забележката по-горе следва, че $s_1 = s_1',\quad s_2 = s_2'$. Ако $s_1 s_2 \neq 0$, от равенството $I_4 = s_1 s_2(-a_{34}'^2)$ $= s_1 s_2(-a_{34}''^2)$ и условията $a_{34}' < 0,\quad a_{34}'' < 0$ следва $a_{34}' = a_{34}''$, т. е. полиномите са равни. Ако $s_2 = 0$, то както в пункта а) се вижда, че равенството

$$s_1(\alpha_{11}x'' + \alpha_{12}y'' + \alpha_{13}z'' + x_0)^2 + 2a'_{34}(\alpha_{31}x'' + \alpha_{32}y'' + \alpha_{33}z'' + z_0)$$
$$= s_1 x''^2 + 2a''_{34}z''$$

е в сила единствено при $x_0 = y_0 = 0$, $\alpha_{11} = \pm 1$, $\alpha_{22} = \pm 1$, $\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$. От условията $a'_{34} < 0$, $a''_{34} < 0$ следва $\alpha_{22} = 1$ и $a'_{34} = a''_{34}$.

в) Нека някои два полинома от тип а) и от тип б) са еквивалентни. Разсъжденията са аналогични на проведените и ги оставяме за упражнение. Теоремата е доказана.

Ако полиномът $F(x, y, z)$ с помощта на метрична смяна на променливите е трансформиран в полином от вида а) или б), посочен в теоремата, ще казваме кратко, че полиномът е *приведен в каноничен вид*.

§ 4. Метрична и афинна класификация на повърхнините от втора степен

1. Бележки. Запазваме означенията от § 3. Нека е избрана декартова координатна система $Oxyz$, а $F(x, y, z)$ е произволен полином от втора степен с реални коефициенти. Разглеждаме повърхнината от втора степен с уравнение

(1) $$F(x, y, z) = 0,$$

където

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44}.$$

Смяната на променливите

(2) $$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}x' + \alpha_{12}y' + \alpha_{13}z' + x_0 \\ y &= \alpha_{21}x' + \alpha_{22}y' + \alpha_{23}z' + y_0 \\ z &= \alpha_{31}x' + \alpha_{32}y' + \alpha_{33}z' + z_0, \end{aligned}$$

където матрицата $T = (\alpha_{ij})$ е ортогонална, има познатия геометричен смисъл: сменяме декартовата координатна система $Oxyz$ с нова декартова система $O'x'y'z'$, като новото начало O' има стари координати (x_0, y_0, z_0).

Както видяхме в § 3, ако

$$(3)\qquad \begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0 \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0\ , \end{aligned}$$

новото уравнение

$$F^*(x', y', z') = 0$$

няма да съдържа членове от първа степен. Това означава, че при подходящ избор на ортогоналната матрица T полиномът $F^*(x', y', z')$ ще има вида а), посочен в теоремата от т. 5, § 3, т. е. уравнението става

$$(4)\qquad s_1 x'^2 + s_2 y'^2 + s_3 z'^2 + a'_{44} = 0\ .$$

Очевидно е, че ако точката $M(x', y', z')$ лежи върху повърхнината (еквивалентно: координатите й удовлетворяват уравнението), то и точката $M'(-x', -y', -z')$, която е симетричната на M спрямо началото O', също лежи върху повърхнината. Следователно точката O' е *център на симетрия* на повърхнината. По тази причина всяка точка с координати (x_0, y_0, z_0), удовлетворяващи равенствата (3), се нарича *център* на повърхнината. Ако повърхнината има център и той е единствен, ще казваме, че тя е *централна*. Ако разглеждаме (3) като система линейни уравнения с неизвестни x_0, y_0, z_0, ясно е, че системата е определена точно тогава, когато метричният инвариант $I_3 = \det(a_{ij})$, $i, j = 1,2,3$, е различен от нула. Иначе казано, *повърхнината с уравнение* (1) *е централна точно тогава, когато метричният инвариант I_3 на полинома $F(x, y, z)$ е различен от нула*.

Ще отбележим, че уравненията $F(x, y, z) = 0$ и $\lambda F(x, y, z) = 0$ за всяко реално число $\lambda \neq 0$ са уравнения на една и съща повърхнина. Ако $I_1,\ I_2, I_3, I_4$ са метричните инварианти на полинома $F(x, y, z)$, от определението на инвариантите следва, че $\lambda I_1, \lambda^2 I_2, \lambda^3 I_3, \lambda^4 I_4$ са метричните инварианти на полинома $\lambda F(x, y, z)$. Това трябва да се има предвид, ако искаме да говорим за *метрични инварианти на повърхнина* – те не са еднозначно определени.

Схемата, по която ще работим в следващата точка, е следната. Като предполагаме, че е направена съответната смяна на координатната система, ще разглеждаме само повърхнини с уравнения

$$\lambda F^*(x', y', z') = 0\ ,$$

където полиномът $F^*(x', y', z')$ има вида а) или б) от теоремата в т. 5, § 3. Множителя $\lambda \neq 0$ ще избираме без пояснения. По този начин ще получим метрична *класификация на уравненията* на повърхнините от втора степен. Накрая ще коментираме класификацията на повърхнините. За удобство понататък вместо x', y', z' ще пишем x, y, z и F вместо F^*.

2. Метрична класификация на повърхнините от втора степен. Първо ще разгледаме случаите, когато полиномът F е

$$F(x, y, z) = s_1 x^2 + s_2 y^2 + s_3 z^2 + a_{44}.$$

А) <u>Централни повърхнини</u> $(I_3 = s_1 s_2 s_3 \neq 0)$. В зависимост от знаците на s_1, s_2, s_3 и от стойността на a_{44} уравненията на повърхнината може да бъдат записани както следва:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$. Повърхнината с това уравнение се нарича *елипсоид*.

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$, $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$. Повърхнината с това уравнение се нарича *имагинерен елипсоид*. Тя не съдържа точки с реални координати, т. е. тя е празно множество от точки.

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$. Повърхнината с това уравнение се нарича *имагинерен конус*. Единствената точка с реални координати, която лежи върху нея, е началото на координатната система $O(0,0,0)$.

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$. Повърхнината с това уравнение се нарича *прост хиперболоид*.

5) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$. Повърхнината с това уравнение се нарича *двоен хиперболоид*.

6) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$, $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$ - реален конус, за който стана дума в § 1, т. 1; вж. там и черт. 35.

Б) Повърхнини, които имат повече от един център ($I_3 = 0$). Първо ще предполагаме, че $s_1 s_2 \neq 0,\ s_3 = 0$, а след това, че $s_1 \neq 0,\ s_2 = s_3 = 0$.

7) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\quad a > 0,\ b > 0.$ Става дума за *елиптичен цилиндър* (вж. § 1, черт. 31). Сечението с всяка равнина $z = d$, перпендикулярна на оста Oz, е елипса с уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ z = d$.

8) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1,\ a > 0,\ b > 0.$ Повърхнината се нарича *имагинерен елиптичен цилиндър*. Тя не съдържа точки с реални координати.

9) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0.$ Повърхнината е *хиперболичен цилиндър* (§ 1, черт. 32). Сечението с всяка равнина $z = d$, перпендикулярна на оста Oz, е хипербола с уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ z = d$.

10) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 0,\ a > 0,\ b > 0.$ Тъй като лявата страна може да се разложи с помощта на комплексни коефициенти, т. е. $(\dfrac{x}{a} + i\dfrac{y}{b})(\dfrac{x}{a} - i\dfrac{y}{b}) = 0$, повърхнината се нарича *двойка комплексно спрегнати имагинерни равнини*.

11) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0,\ a > 0,\ b > 0.$ Уравнението може да се запише и като $(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b})(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}) = 0$. Ясно е, че повърхнината е обединение на равнините с уравнения съответно $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$, $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$. Тъй като те се пресичат в права, повърхнината се нарича *двойка реални пресичащи се равнини*.

12) $x^2 = a^2,\ a > 0$. Повърхнината е обединение на успоредните равнини с уравнения съответно $x = a$ и $x = -a$. Нарича се *двойка успоредни равнини*.

13) $x^2 = -a^2$, $a > 0$. Тъй като уравнението може да се запише като $(x+ia)(x-ia)=0$, повърхнината се нарича *двойка комплексно спрегнати успоредни равнини.* Тя не съдържа точки с реални координати.

14) $x^2 = 0$. Повърхнината е *двойка сливащи се равнини* с уравнения $x = 0$ и $x = 0$.

В) Повърхнини, които нямат център. За тях $I_3 = 0$ и

$$F(x,y,z) = s_1x^2 + s_2y^2 + 2a_{34}z\,,\quad s_1 \neq 0\,,\quad a_{34} < 0\,.$$

Първо ще разгледаме случая $s_1s_2 \neq 0$, а след това случая $s_1 \neq 0$, $s_2 = 0$.

15) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$, $a > 0,\ b > 0$. Повърхнината се нарича *елиптичен параболоид*. Ще я разгледаме малко по-подробно в следващия параграф.

16) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 2z$, $a > 0,\ b > 0$. Повърхнината се нарича *хиперболичен параболоид*. Ще я разгледаме в следващия параграф.

17) $x^2 = 2pz,\quad p > 0.$ Това е *параболичен цилиндър*. Управителната крива е параболата $x^2 = 2pz,\ \ y = 0.$ Ос на цилиндъра е ординатната ос Oy (вж. § 1, черт. 33).

З а б е л е ж к а. С горните разсъждения получихме всъщност метрична класификация на *уравненията* на повърхнините от втора степен. Тъй като *повърхнина от втора степен* с уравнение $F(x,y,z)=0$ беше дефинирана като множество от точките с (реални) координати (x,y,z), удовлетворяващи уравнението, то логиката ни принуждава да признаем, че някои от 17-те уравнения по-горе задават една и съща повърхнина – празното множество или множество от единствена точка, т. е. те са метрично еквивалентни като повърхнини, но не са метрично еквивалентни като уравнения. Следвайки традицията, а и за да не изгубим информацията, свързана с метричната класификация на уравненията, ще считаме, че повърхнините от втора степен са 17 вида, посочени по-горе.

За удобство на читателя ще изпишем още веднъж 17-те вида уравнения, като ги групираме (елипсоиди, хиперболоиди, параболоиди, конуси и т. н.).

Списък на различните видове канонични уравнения на повърхнините:

А) *Елипсоиди:*

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $a>0,\ b>0,\ c>0$ - елипсоид;

2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$, $a>0,\ b>0,\ c>0$ - имагинерен елипсоид;

Б) *Хиперболоиди*:

3) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $a>0,\ b>0,\ c>0$ - прост хиперболоид;

4) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, $a>0,\ b>0,\ c>0$ - двоен хиперболоид;

Б) *Параболоиди*:

5) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z$, $a>0,\ b>0$, $p>0$ - елиптичен параболоид;

6) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$, $a>0,\ b>0$ - хиперболичен параболоид;

В) *Цилиндри*:

7) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0,\ b>0$ - елиптичен цилиндър;

8) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\quad a>0,\ b>0$ - хиперболичен цилиндър;

9) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1,\quad a>0,\ b>0$ - имагинерен елиптичен цилиндър;

10) $x^2=2pz$, $p>0$ - параболичен цилиндър;

Г) *Конуси*:

11) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0$, $a>0,\ b>0,\ c>0$ - реален конус;

12) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$, $a>0,\ b>0,\ c>0$ - имагинерен конус;

Д) *Обединение на равнини:*

13) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0,\quad a>0,\ b>0$ - две реални пресичащи се равнини;

14) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0,\qquad a>0,\ b>0$ - две комплексно спрегнати имагинерни пресичащи се равнини;

15) $x^2=a^2,\quad a>0$ - две реални успоредни равнини;

16) $x^2=-a^2,\quad a>0$ - две комплексно спрегнати успоредни имагинерни равнини;

17) $x^2=0$ - две сливащи се равнини.

3. Афинна класификация на повърхнините от втора степен. Отново ще предполагаме, че координатната система $Oxyz$ е декартова и ще подложим на биективни афинни преобразувания 17-те вида повърхнини от горния списък. За повърхнините, които не са параболоиди или параболичен цилиндър, нека афинното преобразувание се задава аналитично с

$$x=ax',\quad y=by',\ z=cz',$$

за параболоидите нека се задава с

$$x=ax',\quad y=by',\quad z=z',$$

а за параболичния цилиндър нека се задава с

$$x=px',\quad y=py',\quad z=pz'.$$

(Последното преобразувание е подобност.) След заместване в уравненията 1) - 17) получаваме последователно:

1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \quad\to\quad x'^2+y'^2+z'^2=1$, т. е. всеки елипсоид е афинно еквивалентен на сфера с радиус единица;

2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad \to \quad x'^2+y'^2+z'^2=-1$, т. е. всеки имагинерен елипсоид е афинно еквивалентен на имагинерна сфера с радиус i;

3) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \to \quad x'^2+y'^2-z'^2=1$ - всички прости хиперболоиди са афинно еквивалентни;

4) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \to \quad x'^2-y'^2-z'^2=1$ - всички двойни хиперболоиди са афинно еквивалентни;

5) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z \quad \to \quad x'^2+y'^2=2z'$ - всички елиптични параболоиди са афинно еквивалентни;

6) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \quad \to \quad x'^2-y'^2=2z'$ - всички хиперболични параболоиди са афинно еквивалентни;

7) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \to \quad x'^2+y'^2=1$ - всички елиптични цилиндри са афинно еквивалентни на кръгов цилиндър с радиус единица;

8) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \to \quad x'^2-y'^2=1$ - всички хиперболични цилиндри са афинно еквивалентни;

9) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1 \quad \to \quad x'^2+y'^2=-1$ всички имагинерни елиптични цилиндри са афинно еквивалентни;

10) $x^2=2pz \quad \to \quad x'^2=2z'$ - всички параболични цилиндри са *подобни*;

11) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \to \quad x'^2+y'^2-z'^2=0$ - всички реални конуси са афинно еквивалентни;

12) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0 \quad \to \quad x'^2+y'^2+z'^2=0$ - всички имагинерни конуси са афинно еквивалентни;

13) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \quad \to \quad x'^2-y'^2=0$ - всеки две двойки пресичащи се равнини са афинно еквивалентни;

14) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \quad \to \quad x'^2+y'^2=0$ - всеки две двойки комплексно спрегнати имагинерни пресичащи се равнини са афинно еквивалентни;

15) $x^2=a^2 \quad \to \quad x'^2=1$ - всеки две двойки реални успоредни равнини са афинно еквивалентни;

16) $x^2=-a^2 \quad \to \quad x'^2=-1$ - всеки две двойки успоредни комплексно спрегнати имагинерни равнини са афинно еквивалентни;

17) $x^2=0 \quad \to \quad x'^2=0$ - всеки две двойки сливащи се равнини са афинно еквивалентни (тук предполагахме, че $a=b=c=1$).

Няма да доказваме, че 17-те класа повърхнини са различни, т. е. че ако две повърхнини са от различни класове, то те не са афинно екивалентни.

§ 5. Забележителни повърхнини от втора степен

В параграфа всички координатни системи се предполагат декартови.

1. Елипсоид. Така се нарича повърхнината с канонично уравнение

(1) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a>0, \quad b>0, \quad c>0.$$

Числата $2a, 2b, 2c$ се наричат *оси* на елипсоида. Ако a,b,c са различни, елипсоидът се нарича *триосен* (черт. 38). От уравнението се вижда, че тази повърхнина е разположена в затворения правоъгълен паралелепипед, определен от неравенствата

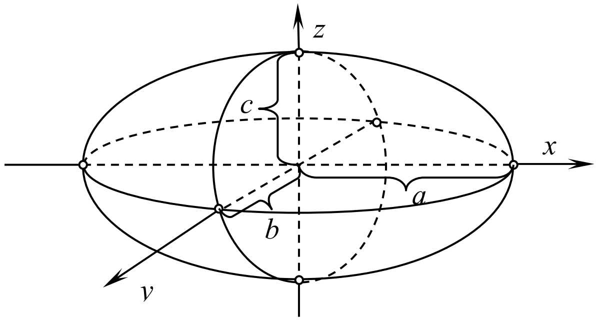
$$-a\le x\le a, \quad -b\le y\le b, \quad -c\le z\le c,$$

следователно *елипсоидът е ограничена повърхнина*. Ако d е произволно реално число, $-c<d<c$, сечението на елипсоида с равнината $z=d$ е елипсата

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1, \quad z=d\ ,$$

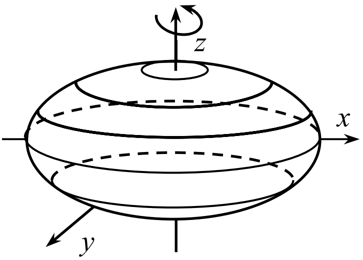
където

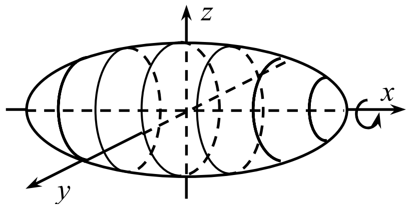
$$a'=a\sqrt{1-\frac{d^2}{c^2}}\ ,\ b'=b\sqrt{1-\frac{d^2}{c^2}}\ .$$



Черт. 38

По същия начин се вижда, че сечението на елипсоида с равнината $y=d$ или $x=d$, където съответно $-b<d<b$ или $-a<d<a$, също е елипса. Може да се докаже и по-общ факт, а именно: произволна равнина или не пресича елипсоида, или го пресича в точка (допирателна равнина), или го пресича в елипса.





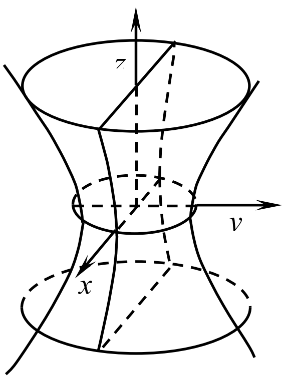
Черт. 39 Черт. 40

Ако $a=b>c$, имаме *сплеснат ротационен елипсоид* (*сфероид, диск*). Той се получава чрез въртене на елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\ y=0$, лежаща в координатната равнина Oxz, около оста Oz (около малката ос на елипсата) - черт. 39. Ако $a > b = c$, елипсоидът е *продълговат ротационен*. Получава се чрез въртене на елипсата $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ y = 0$, около оста Ox (около голямата ос на елипсата) – черт. 40. Ако $a = b = c$, елипсоидът очевидно е сфера с център началото на координатната система и радиус a. Всеки елипсоид може да бъде получен чрез свиване на подходяща сфера относно две взаимно перпендикулярни равнини през центъра й.

2. Прост хиперболоид. Каноничното му уравнение е

(2)
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad c > 0\,.$$

Сеченията на хиперболоида с координатните равнини $x = 0$ и $y = 0$ са хиперболите съответно $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ x = 0$ и $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad y = 0$ - черт. 41. Ясно е, че простият хиперболоид е *неограничена* фигура, защото хиперболите, които съдържа, са неограничени линии. Малко по-общо: ако d е произволно реално число, то сечението на простия хиперболоид с която и да е от равнините $x = d$ или $y = d$ (успоредни съответно на Oyz и Oxz) също са хиперболи. Най-общо: сечението на хиперболоида с произволна равнина $Ax + By + C = 0$, успоредна на апликатната ос Oz, е хипербола. Образно казано: както и да "придялваме" хиперболоида успоредно на оста Oz, винаги ще получаваме хиперболи. Педантичното доказателство на формулираните твърдения оставяме за упражнение.



Черт. 41

Ако пресечем хиперболоида с уравнение (2) с равнина $z = d$, ще получим елипсата $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1,\ z = d$, където

$$a' = a\sqrt{1 + \frac{d^2}{c^2}}\,, \quad b' = b\sqrt{1 + \frac{d^2}{c^2}}\,.$$

Ако завъртим хиперболата $\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad x=0$ около оста Oz, ще получим повърхнина с уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,,$$

която се нарича прост *ротационен* хиперболоид. Асимптотите на хиперболата имат уравнения $z=\frac{c}{a}y, \quad x=0$ и $z=-\frac{c}{a}y, \quad x=0$. Нека си мислим, че едновременно със завъртането на хиперболата завъртаме и асимптотите й. Те ще опишат кръговия конус с уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,,$$

който се нарича *асимптотичен конус* на ротационния хиперболоид. Ясно е, че всяка равнина, съдържаща оста Oz, пресича хиперболоида в хипербола, която е еднаква на разгледаната, и отсича от асимптотичния конус две прави, които са асимптоти на хиперболата.

Да разгледаме афинното изображение $x=x', \quad y=\frac{a}{b}y', \quad z=z'$. При него ротационният хиперболоид, разгледан по-горе, се трансформира в "общия" хиперболоид с уравнение

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=1, \tag{3}$$

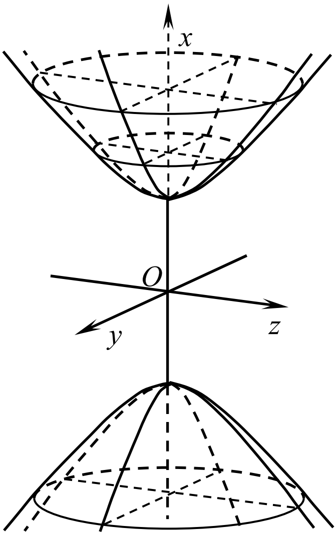
а асимптотичният конус се трансформира в конус с уравнение

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{z'^2}{c^2}=0\,. \tag{4}$$

Той се нарича *асимптотичен конус* на хиперболоида с уравнение (3). Причината е, че отново всяка равнина, съдържаща оста Oz, пресича хиперболоида с уравнение (3) в хипербола и отсича от асимптотичния конус две прави, които са асимптоти на тази хипербола. Това може да се обоснове и без пресмятания със следното разсъждение. Всяка равнина ε през оста Oz има уравнение от вида $Ax+By=0$ и при афинното изображение се трансформира в равнина ε' с уравнение $bAx'+aBy'=0$, която също минава през оста Oz. Ако означим с f разглежданото афинно изображение, то $f(\varepsilon)=\varepsilon'$. При биективно афинно изображение хипербола се изобразява в хипербола, а асимптотите й – в асимптоти (вж. зад. 5, б) от упражненията към гл. 4). Тъй като равнината ε отсича от ротационния хиперболоид хипербола, а от асимптотичния му конус – асимптотите на тази хипербола, изображението f ще ги трансформира в хипербола и нейните асимптоти в равнината ε'.

3. Двоен хиперболоид. Каноничното уравнение на тази повърхнина е

(5) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$



Черт. 42

Тя очевидно е неограничена – каквито и стойности да дадем на y,z, уравнението винаги има решение относно x. Център на повърхнината е началото на координатната система. Всяка равнина с уравнение $y=d$ (равнина, успоредна на Oxz), или с уравнение $z=d$ (успоредна на Oxy) пресича двойния хиперболоид по хиперболи с уравнения съответно

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1,\quad y=d;$$

$$\frac{x^2}{a'^2}-\frac{y^2}{b'^2}=1,\quad z=d,$$

където в първия случай $a'=a\sqrt{1+\dfrac{d^2}{b^2}},\quad c'=c\sqrt{1+\dfrac{d^2}{b^2}}$ и $a'=a\sqrt{1+\dfrac{d^2}{c^2}},\quad b'=b\sqrt{1+\dfrac{d^2}{c^2}}$ - във втория.

Равнината $x=d$ при $1-\dfrac{d^2}{a^2}>0$ (т. е. при $-a<d<a$) не пресича

двойния хиперболоид, при $1-\frac{d^2}{a^2}<0$ го пресича в елипса, а при $d=\pm a$ - в точка. Следователно повърхнината се състои от две части, които нямат обща точка: едната част лежи в полупространството $x\geq a$, а другата е в полупространството $x\leq -a$.

При $b=c$ двойният хиперболоид е ротационна повърхнина, която може да се получи чрез въртене на хиперболата $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad y=0$ около оста Ox. Ако сравним с т. 2, можем да кажем, че при въртене на хипербола около имагинерната й ос се получава ротационен прост хиперболоид, а при въртене около реалната й ос – ротационен двоен хиперболоид.

Конусът с уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

се нарича асимптотичен конус на двойния хиперболоид с уравнение (5). Геометричният му смисъл е същият, както за съответния конус на простия хиперболоид. Обосновката оставяме за упражнение.

4. Елиптичен параболоид. Каноничното му уравнение е

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z\ .$$

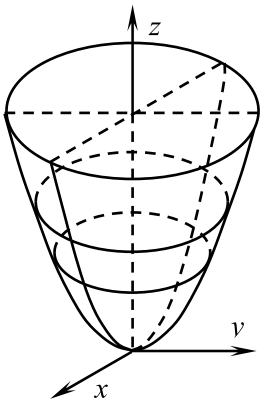
Сеченията на елиптичния параболоид с всяка от координатните равнини Oyz и Oxz са съответно параболите $\frac{y^2}{b^2}=2z,\ x=0$ и $\frac{x^2}{a^2}=2z,\ y=0$ (черт. 43). Ако се използва зад. 4 от упражненията към глава 4, лесно може да се докаже, че всяка равнина с уравнение $Ax+By+C=0$ (равнина, успоредна или минаваща през оста Oz) пресича елиптичния параболоид в парабола.

При $d<0$ равнината $z=d$ не пресича параболоида, при $d=0$ го пресича в точката $O(0,0,0)$, а при $d>0$ го пресича в елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2d\ , \quad z=d$. Ясно е, че с нарастването на d растат и осите на тази елипса.

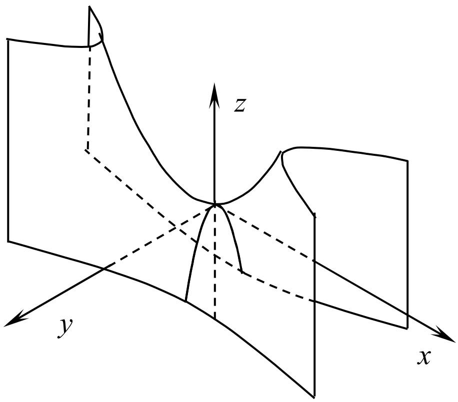
Ако завъртим параболата $\dfrac{x^2}{a^2}=2z,\ y=0$, около оста Oz, ще получим повърхнина с уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=2z\ ,$$

която се нарича *ротационен елиптичен параболоид*.



Черт. 43



Черт. 44

5. Хиперболичен параболоид (седло). Каноничното уравнение на тази повърхнина е

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z\ .$$

Сечението на параболоида (черт. 44) с всяка равнина $z=d$, $d\neq 0$ е хиперболата $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2d$, $z=d$. Нека я проектираме в равнината Oxy. Спрямо равнинната координатна система Oxy разглежданата хипербола ще има същото уравнение. При $d>0$ имаме хипербола, чиято реална ос лежи върху оста Ox, а при $d<0$ - хипербола, чиято реална ос лежи върху оста Oy. При $d=0$ имаме $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$ и равнината $z=0$ отсича от хиперболичния параболоид две пресичащи се прави с уравнения $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,\ \ z=0$ и $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\ \ z=0$.

Равнината $y=d$ пресича параболоида в параболата $\frac{x^2}{a^2}-\frac{d^2}{b^2}=2z,$ $y=d$. Нейната ос е успоредна на оста Oz. Параболите, които се получават при изменението на d, са еднакви помежду си и са еднакви на параболата $\frac{x^2}{a^2}=2z,\ \ y=0$. Сечението с равнината $x=d$ също е парабола с ос, успоредна на Oz. При изменението на d също се получават еднакви параболи. Това подсказва начин за изработване на пространствен модел на хиперболичния параболоид. Нека p_1 е параболата с уравнение $\frac{-y^2}{b^2}=2z,$ $x=0$, а p_2 - параболата $\frac{x^2}{a^2}=2z,\ \ y=0$. Те лежат в две перпендикулярни равнини: p_1 е в равнината Oyz, а p_2 - в Oxz. Ако преместваме успоредно параболата p_1, но така, че върхът й винаги да лежи върху параболата p_2, ще получим хиперболичния параболоид. Иначе казано, ако във всяка точка на p_2 "окачим" копие на параболата p_1, но така, че точката на окачването да е върхът на p_1 и равнината, в която лежи въпросното копие, да е перпендикулярна на равнината, в която лежи p_2, ще получим параболоида. (Ако сте простирали пране, ще разберете за какво става дума.)

§ 6. Праволинейни образуващи на повърхнини от втора степен

Вече видяхме, че коничните и цилиндричните повърхнини може да се разглеждат като множества от точките на някаква фамилия от прави линии. Аналогичен факт ще установим и за някои повърхнини от втора степен, които не са конуси и цилиндри.

1. Разглеждаме простия хиперболоид с уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

То може да се запише и като

$$(1') \qquad (\frac{x}{a}+\frac{z}{c})(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=(1+\frac{y}{b})(1-\frac{y}{b}).$$

Ако α, β са произволни реални числа, които не са едновременно равни на нула, нека

$$(2) \qquad \alpha(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})=\beta(1+\frac{y}{b}), \quad \beta(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=\alpha(1-\frac{y}{b}).$$

При фиксирани α, β всяко от тези уравнения е уравнение на равнина. Двете равнини са различни и не са успоредни (вж. Ч. I, гл. 6, § 5), следователно се пресичат в права линия. От уравненията (2) е очевидно, че ако координатите (x, y, z) на някаква точка удовлетворяват системата (2), то тя лежи върху простия хиперболоид. Следователно правата, определена от (2), лежи изцяло върху хиперболоида. Ако меним α, β, ще получим безкрайна фамилия от прави, които лежат върху хиперболоида. Наричат се *праволинейни образуващи* на хиперболоида.

Ще построим още една фамилия от праволинейни образуващи. За целта отново избираме призволни реални числа α_1, β_1, които не са едновременно равни на нула. Като вземаме повод от уравнението ($1'$), нека

$$(3) \qquad \alpha_1(\frac{x}{a}+\frac{z}{c})=\beta_1(1-\frac{y}{b}), \quad \beta_1(\frac{x}{a}-\frac{z}{c})=\alpha_1(1+\frac{y}{b}).$$

Както по-горе се вижда, че системата (3) задава права, която изцяло лежи върху хиперболоида.

Ще покажем, че: а) *през всяка точка* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *от простия хиперболоид минава точно една права от фамилията* (2) *и точно една права от фамилията* (3); б) *двете прави са различни*.

Доказателство. Права, зададена с уравненията (2), минава през точка с координати (x_0, y_0, z_0) тогава и само тогава, когато α, β удовлетворяват (2) при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, т. е. при

$$\alpha(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c})-\beta(1+\frac{y_0}{b})=0, \quad \alpha(1-\frac{y_0}{b})-\beta(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c})=0.$$

Детерминантата на тази система от две хомогенни уравнения с две неизвестни α, β е равна на нула, защото по условие точката $M_0(x_0, y_0, z_0)$

лежи върху хиперболоида, т. е координатите й удовлетворяват $(1')$. Рангът на системата е единица, защото поне един от коефициентите $1+\frac{y_0}{b}$, $1-\frac{y_0}{b}$ е различен от нула. Следователно разглежданата хомогенна система от две уравнения с две неизвестни има с точност до пропорционалност единствено решение α_0, β_0 (вж. Ч. I, гл. 2, § 5, т. 4). Всяко друго решение има вида $\lambda\alpha_0, \lambda\beta_0$ и определя същата права с уравнения (2). По същия начин се убеждаваме, че през точката M_0 минава и единствена права от фамилията прави (3).

Доказателството, че двете прави са различни, е малко по-дълго. Първо, за да опростим разглежданията, ще предполагаме, че в уравнението на хиперболоида $a=b=c=1$. Това не е загуба на общност, защото ако подложим хиперболоида с уравнение (1) на афинното преобразувание $x=ax'$, $y=by'$, $z=cz'$, ще получим хиперболоид с уравнение $x'^2+y'^2-z'^2=1$, а при биективно афинно преобразувание правите се изобразяват в прави, а успоредните прави – в успоредни. Второ, ще предполагаме, че параметрите α, β и α_1, β_1 удовлетворяват условията $\alpha^2+\beta^2=1$ и $\alpha_1^2+\beta_1^2=1$. Това също не е ограничително предположение, защото двойката $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ е определена само с точност до пропорционалност. Същото важи и за двойката (α_1, β_1). Трето, ще предполагаме, че координатната система е дясна декартова.

Нека g_1 е права от фамилията (2) :

$$g_1: \ \alpha(x+z)-\beta(1+y)=0, \ \ \beta(x-z)-\alpha(1-y)=0,$$

а g_2 е права от фамилията (3):

$$g_2: \ \alpha_1(x+z)-\beta_1(1-y)=0, \ \ \beta_1(x-z)-\alpha_1(1+y)=0.$$

Векторите $\vec{n}_1(\alpha,-\beta,\alpha)$ и $\vec{n}_2(\beta,\alpha,-\beta)$ са ортогонални на съответните равнини, които определят правата g_1 като тяхна пресечна права. Следователно векторното произведение $\vec{p}_1=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$ е вектор, колинеарен на правата g_1. Неговите координати са $\vec{p}_1(\beta^2-\alpha^2, 2\alpha\beta, 1)$. По същата “технология” получаваме вектора $\vec{p}_2(-\beta_1^2+\alpha_1^2, 2\alpha_1\beta_1, -1)$, колинеарен на правата g_2 (за упражнение проверете пресмятанията). Двете прави g_1 и g_2 са успоредни или се сливат точно тогава, когато векторите $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ са колинеарни. Последното е налице точно тогава, когато

$$\beta^2-\alpha^2=\beta_1^2-\alpha_1^2, \quad 2\alpha\beta=-2\alpha_1\beta_1. \tag{4}$$

Уговорихме се, че $\alpha^2+\beta^2=\alpha_1^2+\beta_1^2=1$. От условията (4) следва

$$\alpha=\pm\alpha_1, \quad \alpha\beta=-\alpha_1\beta_1.$$

Непосредствено се проверява, че ако $\alpha=\alpha_1=0$ или $\beta=\beta_1=0$, то двете прави са успоредни (системата от четирите уравнения, определящи g_1 и g_2, съдържа несъвместимите уравнения $y+1=0$ и $y-1=0$). Следователно можем да предполагаме, че $\alpha=\alpha_1\neq 0$ и $\beta=-\beta_1\neq 0$. Непосредствената проверка отново показва, че правите са успоредни.

С аналогични разсъждения може да се докаже, че: в) *всеки две праволинейни образуващи от една и съща фамилия са кръстосани*; г) *всеки две праволинейни образуващи от различни фамилии лежат в една равнина.*

2. Разглеждаме хиперболичния параболоид с уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{5}$$

То може да се запише и във вида

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2z. \tag{5'}$$

Както по-горе, избираме две ненулеви двойки реални числа α, β и α_1, β_1. Да разгледаме двете системи уравнения:

$$\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\beta z, \quad \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=2\alpha, \tag{6}$$

$$\alpha_1\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=\beta_1 z, \quad \beta_1\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=2\alpha_1. \tag{7}$$

Всяко от уравненията в системата (6) е уравнение на равнина. Двете равнини не са успоредни и не се сливат, следователно системата определя права, която очевидно лежи върху параболоида. Ако меним параметрите α, β, ще получим безкрайна фамилия от прави, които лежат върху параболоида. Същият факт е налице и за фамилията прави, зададени със системата (7). *Двете фамилии от праволинейни образуващи на хиперболичния параболоид имат свойствата а) – г), формулирани по-горе*. Налице е и следното допълнително свойство: *образуващите от фамилията* (6) *са успоредни на равнината* $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$, *а всички образуващи от фамилията* (7) *са успоредни на равнината* $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$. Доказателствата оставяме за упражнение.

Забележка. Ако се върнем към списъка на 17-те вида повърхнини от втора степен (§ 4), вече е лесно да се убедим, че прави линии лежат само върху конусите, цилиндрите, двойките равнини, простия хиперболоид и хиперболичния параболоид.

Упражнения

1. Нека координатната система $Oxyz$ е декартова.

а) Дадена е крива с уравнения $x=\varphi(u),\quad y=0,\quad z=\psi(u)$, $u\in(a,b)$. Докажете, че ротационната повърхнина, получена чрез въртене на кривата около оста Oz, има параметрични уравнения

$$x=\varphi(u)\cos v,\quad y=\varphi(u)\sin v\quad z=\psi(u),\ u\in(a,b),\quad v\in[0,2\pi).$$

б) Докажете, че ако завъртим окръжността $x^2+z^2=r^2$, $y=0$ около оста Oz, ще получим сфера с уравнение

$$x^2+y^2+z^2=r^2 .$$

в) Докажете, че ако завъртим правата $x=a,\ y=0$ около оста Oz, ще получим *правия кръгов цилиндър* с уравнение

$$x^2+y^2=a^2.$$

г) Докажете, че ако завъртим елипсата $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ z=0$ около оста Ox, то при $a>b$ ще получим ротационен продълговат елипсоид с уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{b^2}=1.$$

Ако завъртането е около оста Oy, ще получим ротационен сплеснат елипсоид (диск) с уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}=1.$$

д) Дадени са повърхнините с уравнения

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(*елипсоид* и прост *хиперболоид*). Докажете, че те са ротационни повърхнини точно тогава, когато поне два от знаменателите a^2, b^2, c^2 са равни.

Глава 6

Проективни пространства

§ 1. Мотивировка и определения

Класическата проективна геометрия е възникнала в началото на XIX век. За неин създател се счита възпитаникът на парижкото Политехническо училище, френският математик Понселе (Poncelet, 1788 – 1867). Днес тя се изгражда като строга аксиоматична теория, която е обект на други специализирани книги. Тук целта е само да дадем някои модели на проективни пространства, да обясним какво е това проективно изображение (колинеация) и да дадем някои приложения за фигурите, които изучихме до тук.

Както знаем от училищната геометрия, всеки две различни прави, които лежат в една равнина, или имат единствена обща точка, или са успоредни (нямат обща точка). Практиката е показала, че е полезно тази несиметричност да се премахне, като се въведат някакви нови обекти, наречени *безкрайни точки*, така че всеки всеки две прави, лежащи в една равнина, да се пресичат или в обичайна точка (ще я наричаме *крайна* точка), или в *безкрайна* точка. Тази идея има различни реализации (модели) и ще се спрем по-подробно на някои от тях.

1. Хомогенни координати. В тримерното афинно пространство от училищната геометрия избираме афинна координатна система $Oxyz$. *Хомогенни координати* на точката M от пространството ще наричаме всяка наредена четворка от реални числа x_1, x_2, x_3, x_4, $x_4 \neq 0$, удовлетворяваща условието: ако x, y, z са обичайните координати на точката M, то

(1) $$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}.$$

Както знаем, координатите на точката M са координатите (x, y, z) на радиус-вектора й $\overrightarrow{OM}$. Ако $x_4 = 0$, но четворката x_1, x_2, x_3, x_4 не е нулевата, ще считаме, че тя определя нов обект, който ще наричаме *безкрайна точка*. Точките от пространството ще наричаме *крайни*. Ще считаме, че две ненулеви четворки x_1, x_2, x_3, x_4 и x_1', x_2', x_3', x_4' определят една и съща точка (крайна или безкрайна) точно тогава, когато съществува реално число $\rho \neq 0$, за което

$$x_1' = \rho x_1, \quad x_2' = \rho x_2, \quad x_3' = \rho x_3, \quad x_4' = \rho x_4.$$

Подчертаваме, че нулевата четворка $0,0,0,0$ не определя точка. (Нулевата четворка е "забранена".) Тримерното афинно пространство D_3, което разглеждаме, заедно с присъединените към него безкрайни точки, ще наричаме *тримерно реално проективно пространство*.

Още веднъж подчертаваме, че хомогенните координати x_1, x_2, x_3, x_4 (те са ненулева четворка) на точка са определени само с точност до пропорционалност. Ако точката е крайна, връзката между обичайните (*нехомогенните*) координати и хомогенните се дава с (1).

Горната конструкция има очевидния недостатък, че зависи от произволния избор на координатната система $Oxyz$. Естествено е да се опасяваме, че ако сменим координатната система и спрямо новата отново построим безкрайните точки, то ще получим някакво ново проективно пространство. Следващите разглеждания разсейват тези опасения и донякъде поясняват чисто формалната конструкция. Преди всичко ще дефинираме прави и равнини в проективното пространство.

Нека ε е произволна равнина в D_3 с уравнение

(2) $$\varepsilon: \quad Ax + By + Cz + D = 0, \quad |A| + |B| + |C| \neq 0.$$

Както знаем, крайна точка с нехомогенни координати x, y, z лежи в равнината точно тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват уравнението. Ако използваме хомогенните координати x_1, x_2, x_3, x_4 на точката, същото условие може да се запише и като

(3) $$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0.$$

Ако $U(x_1, x_2, x_3, 0)$ е безкрайна точка, ще считаме (по определение), че тя лежи в равнината ε точно тогава, когато координатите ѝ удовлетворяват уравнението (3), или все едно, когато удовлетворяват системата

(4) $$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Уравнението $x_4 = 0$ е от първа степен и е естествено да приемем (по определение), че то също е уравнение на някаква *несобствена* равнина, която ще наричаме *безкрайна равнина* на проективното пространство. Тя очевидно се състои от безкрайните точки и само от тях.

Дефинираме: ако A, B, C, D са реални числа, от които поне едно е различно от нула, то множеството на всички точки с хомогенни координати x_1, x_2, x_3, x_4, удовлетворяващи уравнението (3), ще наричаме *равнина* в проективното пространство. Равнината с уравнение $Dx_4 = 0, \quad D \neq 0,$ ще наричаме *безкрайна*. Останалите равнини ще наричаме *крайни*.

От това определение следва, че равнината, зададена с уравнението (3), е крайна точно тогава, когато $|A|+|B|+|C| \neq 0$. Тя се състои от всички крайни точки, чиито нехомогенни координати удовлетворяват уравнението (2), заедно с безкрайните точки, определени от системата (4). Новото е само, че към досегашната равнина ε са присъединени безкрайни точки.

Уравненията в системата (4) са уравнения на различни равнини, които не са успоредни, защото имат поне една обща точка. Приемаме, че те определят *безкрайна права* – пресечната права на крайната равнина ε с безкрайната равнина.

Дефинираме: *права* в проективното пространство ще наричаме сечението на всеки две различни равнини. Сечението на всяка крайна равнина с безкрайната равнина ще наричаме *безкрайна права*. Останалите прави ще наричаме *крайни*.

Ще покажем, че *в проективното пространство сечението на всеки две различни равнини не е празно множество.* Следователно *в проективното пространство няма успоредни равнини*.

Наистина, нека едната равнина е крайна с уравнение (3), а другата е безкрайната равнина (по определението си тя е единствена). Те очевидно са различни, защото крайната равнина съдържа и крайни точки, докато безкрайната – само безкрайни точки. От системата (4) се вижда, че двете равнини наистина имат общи точки. Нека по-нататък $\varepsilon, \varepsilon'$ са две крайни равнини и

$$\varepsilon: \quad Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0, \quad |A|+|B|+|C| \neq 0,$$

$$\varepsilon': \quad A'x_1 + B'x_2 + C'x_3 + D'x_4 = 0, \quad |A'|+|B'|+|C'| \neq 0.$$

Ако те се сливат, то те съдържат в частност едни и същи крайни точки и според Ч. I., гл. 6, § 5 съществува число $\lambda \neq 0$, за което $(A, B, C, D) = \lambda(A', B', C', D')$. Тъй като по условие равнините са различни, такова число $\lambda \neq 0$ не съществува. Нека, например, съществува $\mu \neq 0$, за което $(A, B, C) = \mu(A', B', C')$, но $D \neq \mu D'$, т. е. равнините са успоредни като равнини в тримерното афинно пространство. Тогава всяка безкрайна точка с координати $x_1, x_2, x_3, 0$, която лежи в ε, лежи и в ε' и обратно.

Условието безкрайната точка да лежи в ε е $Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0$. То означава в частност, че векторът с обичайни координати x_1, x_2, x_3 е компланарен на равнината ε. От тази геометрична интерпретация лесно следва в частност, че *две крайни равнини определят една и съща безкрайна права тогава и само тогава, когато са успоредни като равнини в афинното пространство или се сливат*. Наистина, две крайни равнини определят една и съща безкрайна права тогава и само тогава, когато всеки вектор, компланарен на първата равнина, е компланарен и на втората равнина и обратно. Това е налице тогава и само тогава, когато двете равнини са успоредни или се сливат.

Ще определим безкрайните точки върху дадена крайна права. Нека g е пресечна права на две крайни равнини $\varepsilon, \varepsilon'$,

$$\varepsilon: \quad Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 + Dx_4 = 0, \quad |A| + |B| + |C| \neq 0,$$

$$\varepsilon': \quad A'x_1 + B'x_2 + C'x_3 + D'x_4 = 0, \quad |A'| + |B'| + |C'| \neq 0.$$

Естествено е да считаме (по определение), че безкрайните точки върху правата g това са безкрайните точки, които лежат и в двете равнини, т. е. техните хомогенни координати са решенията на системата

$$(5) \qquad Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0, \quad A'x_1 + B'x_2 + C'x_3 = 0, \quad x_4 = 0.$$

Всяко от първите две уравнения отразява факта, че векторът с (обичайни) координати x_1, x_2, x_3 е компланарен на съответната равнина, следователно е колинеарен на правата g (вж. Ч. I, гл. 6, § 4, т. 4). Тъй като равнините се пресичат, матрицата $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ има ранг 2 и системата от първите две уравнения има с точност до пропорционалност единствено ненулево решение α, β, γ. Следователно с точност до пропорционалност системата (5) има единствено решение $(\alpha, \beta, \gamma, 0)$. Това означава, че *върху всяка крайна права има единствена безкрайна точка* $U(\alpha, \beta, \gamma, 0)$. *Векторът с обичайни координати* α, β, γ *е произволен ненулев вектор, колинеарен с правата*. От последната интерпретация непосредствено следва, че *всички успоредни крайни прави определят една и съща безкрайна точка. Ако две крайни прави определят една и съща безкрайна точка, то те са успоредни или се сливат.*

Следващият факт е доста неочакван: *в проективното пространство всеки две различни прави, които лежат в една равнина, имат обща точка.* Наистина, ако правите са крайни и се пресичат, то няма какво да се доказва. Ако са крайни и успоредни, те съдържат (пресичат се в) една и съща безкрайна точка. Нека двете прави са безкрайни (лежат в безкрайната равнина). Следователно те са сечения на безкрайната равнина с крайните равнини $\varepsilon, \varepsilon'$. Тъй като правите са различни, равнините не са успоредни, следователно се пресичат в крайна права. Безкрайната точка, определена от тази права, е пресечна точка на двете безкрайни прави.

Така дефинираните прави и равнини в проективното пространство обикновено се наричат *проективни* прави и равнини, за да ги различаваме от правите и равнините в афинното пространство. Конструкцията, която изложихме, обикновено се нарича "разширяване на афинното пространство чрез присъединяване на безкрайни елементи". Разбира се, бихме могли да я приложим и за конкретна равнина ε, в която да изберем афинна координатна система Oxy и аналогично да въведем хомогенни координати x_1, x_2, x_3. Обектът, който ще получим, също се нарича проективна равнина и не е съществено различен (напротив!) от проективните равнини като подмножества на проективното пространство.

Фактът, че всяка права определя единствена безкрайна точка, а всяка равнина – единствена безкрайна права, дава известна увереност, че ако сменим координатната система и повторим конструкцията, която изложихме, то няма да получим съществено нов обект. Няма да навлизаме в същината на този проблем.

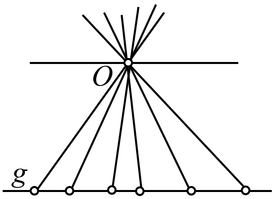
Ако погледнем в по-едър план, можем да кажем, че конструирахме някакво множество, чиито елементи нарекохме точки (крайни или безкрайни), някои подмножества нарекохме (проективни) равнини, а други подмножества нарекохме (проективни) прави. След подробния анализ, който направихме, е лесно да се попълнят (за упражнение) липсващите детайли и да се докаже, че са в сила следните твърдения:

1) Всеки две различни точки принадлежат на единствена права.
2) Всеки три различни точки, които не лежат на една права, принадлежат на единствена равнина.
3) Всяка права и всяка равнина имат обща точка.
4) Сечението на всеки две равнини съдържа права.
5) Съществуват четири точки, които не лежат в една равнина, и никои три от тях не лежат на една права.
6) Всяка права съдържа поне три точки.

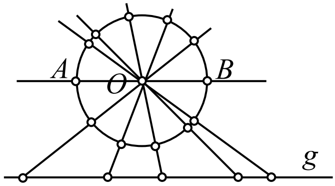
В класическата проективна геометрия тримерното проективно пространство се въвежда аксиоматично, като за първични се приемат понятията точка, права и равнина и се иска да бъдат изпълнени условията 1) – 6) (аксиоми на тримерното проективно пространство). Има обекти, които удовлетворяват условията 1) – 6), но са *съществено* различни от модела на проективно пространство, който построихме.

2. Модели на проективната права. Моделите, които ще построим в тази и следващата точка, са особено полезни в различни области на математиката. Тук те изглеждат полезни преди всичко със своята нагледност.

Нека в равнината изберем права g и точка O вън от правата. Ако към g присъединим въображаемата безкрайна точка, ще получим проективната права $\overline{g}$. Да разгледаме снопа прави (в равнината) с център точката O. Всяка права от снопа, която не е успоредна на g, пресича g в точно една точка (определя крайна точка). Нека приемем, че правата от снопа, която е успоредна на g, определя безкрайната точка на проективната права $\overline{g}$. По този начин получаваме биективно съответствие между



Черт. 45

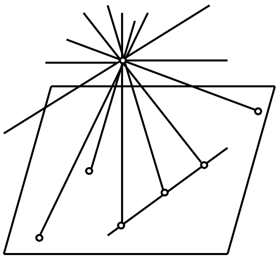


Черт. 46

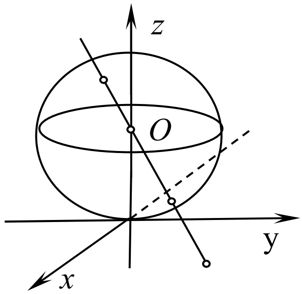
точките на проективната права $\overline{g}$ и правите от снопа. Следователно въпрос на удобство и на предпочитание е дали ще си представяме проективната права като обикновена права, разширена с безкрайна точка, или като множеството на всички прави от даден сноп (черт. 45). Първоначалното психологическо усилие, че "правите" от снопа са всъщност "точки" от проективната права, се преодолява лесно. Този модел може леко да се модифицира. Да построим произволна окръжност k с център точката O и с помощта на правите, минаващи през O, да проектираме точките от окръжността върху проективната права $\overline{g}$. При това проектиране диаметрално противоположните точки от окръжността ще се проектират в точка от правата, а двете точки A, B от диаметъра, успореден на g, ще се изобразят в безкрайната точка (черт. 46). В случая проектирането реализира биективно съответствие между точките на проективната права и точките от окръжността, в която всеки две диаметрално противоположни точки са отъждествени. Ако разрежем окръжността по диаметъра AB и премахнем дъгата, която е над диаметъра AB, можем да си представяме проективната права като полуокръжност, в която двете "крайни" точки A, B са отъждествени.

3. Модели на проективната равнина.

а) Нека ε е познатата от училище равнина (т. е. афинната равнина), а O е точка вън от нея. Множеството на всички прави в пространството, които минават през точката O, ще наречем *звезда* от прави с център O. Всяка права от звездата, която не е успоредна на равнината, я пресича в единствена точка (определя крайна точка). Ще считаме, че всяка права, успоредна на равнината, я пресича в "безкрайна точка". По този начин установяваме биективно съответствие между точките от проективната равнина $\bar{\varepsilon}$ (ε, разширена с безкрайни елементи) и правите от звездата. При такова отъждествяване можем да си представяме че крайна точка, това е права, която не е успоредна на равнината, а безкрайните точки са



Черт. 47



Черт. 48

правите, успоредни на равнината. Не е трудно да съобразим, че три точки от проективната равнина лежат на една права точно тогава, когато съответните им прави от звездата лежат в една равнина. Любопитно е, че ако запазим звездата от прави, но изберем друга равнина ε', която да не съдържа точката O, то правите от звездата отново може да се интерпретират като точки на проективна равнина, но "безкрайни точки" сега ще бъдат други прави от звездата – успоредните на ε'. Това навежда на мисълта, че всички точки от проективната равнина са равноправни – не би трябвало да има разлика в някакъв смисъл между крайни и безкрайни точки. Както ще видим по-късно, това наистина е така.

б) Моделът, който ще построим, е по същество само модификация на току-що построения. Нека ε отново е равнина (обичайната), а O е точка вън от нея. С център точката O построяваме сфера S с произволен радиус. Сега всяка права от звездата прави с център точката изобразява диаметрално противоположните точки от сферата в точки от равнината, стига да считаме, че диаметрално противоположните точки от "екватора", успореден на равнината, се изобразяват в безкрайни точки. Следователно можем да си представяме проективната равнина като сфера, в която всички диаметрално противоположни точки са отъждествени (считаме ги за съвпадащи) – черт. 48. За да избегнем частично отъждествяването, нека разрежем сферата по екватора, успореден на избраната равнина ε, и да вземем долната полусфера заедно с екватора. Ако сега проектираме от центъра O точките от полусферата, всеки две диаметрално противоположни точки от екватора ще се изобразят в една и съща безкрайна точка, а останалите точки от полусферата – в крайни точки от равнината. Следователно можем да си представяме проективната равнина и като полусфера, на която диаметрално противоположните точки от окръжността, по която е разрязана съответната сфера, са отъждествени.

След изложените модели следващото определение би трябвало да изглежда доста естествено.

4. Определение. Нека L е линейно пространство над поле N. Множеството $P(L)$ на всички едномерни подпространства на L ще наричаме *проективно пространство*, *асоциирано с линейното пространство* L. Елементите на множеството $P(L)$ ще наричаме *точки* на проективното пространство. Ако пространството L е крайномерно и размерността му е $n+1$, $n \geq 0$, числото n ще наричаме *размерност* на проективното пространство $P(L)$ и ще я бележим с $\dim P(L)$. При $n=1$ ще казваме, че $P(L)$ е *проективна права*, асоциирана с L, а при $n=2$ - *проективна равнина*, асоциирана с L. (При $n=0$ пространството $P(L)$ се състои от единствена точка.) Ако $n+1=0$, т. е. ако L е нулевото пространство, то $P(L)$ е празното множество. Ще считаме, че размерността на това проективно пространство е -1.

От определението следва, че за всяко крайномерно линейно пространство L е в сила

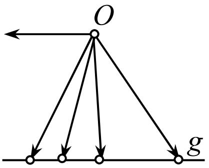
$$\dim P(L) = \dim L - 1.$$

При зададено поле N всички линейни пространства над N с размерност $n+1$ са изоморфни, ето защо вместо означението $P(L)$ често се използват и означенията $P^n(\mathrm{N})$ или само P^n.

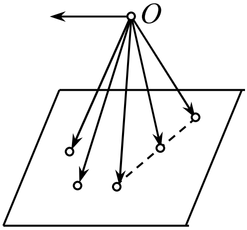
П р и м е р. При $\mathrm{N} = \mathbf{R}$ и $n=1$ можем да считаме, че двумерното пространство L се състои от всички свободни вектори, компланарни с дадена равнина. Нека в равнината изберем права g, точка O вън от правата и с начало точката O да нанасяме представители на свободните вектори. Всеки два неколинеарни вектора определят различни едномерни подпространства на пространството L и от черт. 49 се вижда нагледно, че между точките на $P(L)$ и точките на проективната права $\overline{g}$, за която стана дума в т. 2, има биективно съответствие. На векторите, колинеарни на правата g, съответства безкрайната точка на $\overline{g}$. Следователно можем да си представяме $P(L)$ като правата $\overline{g}$.

Препоръчваме на читателя да се убеди самостоятелно, че при $\mathrm{N} = \mathbf{R}$ и $n = 2$ след подходящо отъждествяване пространството $P(L)$ е проективната равнина $\overline{\varepsilon}$, за която стана дума в т. 3. Предлагаме само черт. 50.

Пространството $P(L) = P^n(\mathrm{N})$ като модел на проективно пространство има многобройни приложения. Удобството е заложено във факта, че за изучаването му почти автоматично се привлича цялата теория на крайномерните линейни и афинни пространства. Следващата точка е първа стъпка в тази насока.



Черт. 49



Черт. 50

5. Хомогенни координати в $P(L) = P^n(\mathrm{N})$. Нека линейното пространство L има размерност $n+1$ и $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ е негов базис. Всяко едномерно подпространство L_1 се определя еднозначно от който и да е ненулев вектор $l_1 \in L_1$: всеки ненулев вектор от L_1 има вида $\rho l_1, \rho \in \mathrm{N}$, $\rho \neq 0$. Ако векторът l_1 спрямо избрания базис има координати $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, който и да е ненулев вектор от L_1 има координати $\rho x_1, \rho x_2, \ldots, \rho x_{n+1}$, $\rho \neq 0$. Тъй като едномерното подпространство L_1 по дефиниция определя точка от $P(L) = P^n(\mathrm{N})$, естествено е да наречем числата $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$ (по определение те не са едновременно равни на нула) *хомогенни* или *проективни координати* на съответната точка от $P^n(\mathrm{N})$. Те са определени само с точност до пропорционалност: числата $\rho x_1, \rho x_2, \ldots, \rho x_{n+1}$ при $\rho \in \mathrm{N}$, $\rho \neq 0$, са координати на същата точка. За да се подчертае, че координатите на точка от проективното пространство са определени само с точност до пропорционалност, по традиция се използва означението $x_1 : x_2 : \ldots : x_{n+1}$.

Ще отбележим, че ако $\lambda \in \mathrm{N}$, $\lambda \neq 0$, базисът $\lambda e_1, \lambda e_2, \ldots, \lambda e_{n+1}$ определя същите координати на точката, съответстваща на вектора l_1, за който стана дума.

6. Определение. Ще казваме, че два базиса $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$ и $e'_1, e'_2, \ldots,$ e'_{n+1} на линейното пространство L определят една и съща *проективна координатна система* в проективното пространство $P^n(\mathrm{N})$ тогава и само тогава, когато съществува $\lambda \in \mathrm{N}$, за което $e'_1 = \lambda e_1$, $e'_2 = \lambda e_2$, $\ldots, e'_{n+1} =$ $= \lambda e_{n+1}$.

7. Смяна на координатите. Нека $e'_1, e'_2, \ldots, e'_{n+1}$ е още един базис на линейното пространство L (нов базис), $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$ са новите координати на вектора l_1, за който стана дума по-горе, а A е матрицата на прехода от *новия към стария* базис. Както знаем,

(6) $$X' = AX, \quad \det A \neq 0,$$

където X' е матрицата-стълб от новите координати на вектора, а X е матрицата-стълб от старите му координати. Ако преминем към координатите на съответните точки от $P^n(\mathrm{N})$, условията (6) следва да се модифицират като

(6′) $$\rho X' = AX, \ \rho \in \mathrm{N}, \quad \rho \neq 0, \quad \det A \neq 0 .$$

Те означават, че в проективното пространство координатите се сменят по формулата $(6')$, където $\rho \neq 0$ е съвършено произволно. От това следва, че в проективното пространство матрицата на прехода от стари към нови координати е определена само с точност до скаларен множител $\lambda \neq 0$: матрицата λA води до същите координати, защото от $\rho X' = AX$ следва $(\lambda\rho)X' = (\lambda A)X$, а от определението пък следва, че $(\lambda\rho)X'$ и $\rho X'$ са проективни координати на една и съща точка.

8. Твърдение. а) *За всеки три различни точки A, B, C от проективната права $P^1(\mathrm{N})$ съществува единствена координатна система, спрямо която A, B, C имат хомогенни координати съответно* $(1:0)$, $(0:1)$ *и* $(1:1)$.

б) *За всеки четири точки A, B, C, D от проективната равнина $P^2(\mathrm{N})$, никои три от които не лежат на една права, съществува* *единствена координатна система, спрямо която точките имат хомогенни координати съответно* $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$ *и* $(1:1:1)$.

Доказателство. а) Нека L е двумерно линейно пространство над N , а e_1, e_2 са ненулеви вектори от едномерните подпространства, които съответстват на точките $A, B \in P^1($N$)$. Тъй като точките са различни, то e_1, e_2 са линейно независими, следователно са базис на линейното пространство L. Спрямо този базис A има хомогенни координати $(1:0)$, а B има $(0:1)$. Нека хомогенните координати на точката C са $(x_1 : x_2)$. Тъй като тя е различна от точките A, B, то $x_1 \neq 0,\ x_2 \neq 0$. Да изберем нов базис на L, а именно x_1e_1, x_2e_2. Спрямо него всяка от точките A, B, C има исканите координати. Последният базис е определен само с точност до пропорционалност, но това именно означава, че той определя единствена координатна система.

б) Нека сега L е тримерно линейно пространство над N , а e_1, e_2, e_3 са ненулеви вектори от едномерните подпространства, които съответстват на точките A, B, C. Тъй като трите точки не лежат на една права, трите вектора са линейно независими, следователно са базис на линейното пространство L. Нека спрямо този базис точката D има хомогенни координати $(x_1 : x_2 : x_3)$. И трите числа x_1, x_2, x_3 са различни от нула. (Наистина, да допуснем, например, че $x_3 = 0$. Точката D съответства на едномерното подпространство, породено от вектора $x_1e_1 + x_2e_2$. Очевидно е, че векторите $e_1, e_2, x_1e_1 + x_2e_2$ са линейно зависими и пораждат двумерно подпространство, което означава, че точките A, B, D лежат на една права, което противоречи на условието.) Векторите x_1e_1, x_2e_2, x_3e_3 са линейно независими, т. е. те са нов базис на линейното пространство L. Спрямо него точките A, B, C, D имат хомогенни координати, посочени в заключението на теоремата.

Коментар. Непрекъснатото връщане към линейното пространство L понякога изглежда отегчително и доста автори предпочитат да въведат координати в пространството $P(L)$, без да се позовават на L. Доказаното твърдение отваря път в тази насока: *проективна* координатна система върху проективната права наричат всяко наредено множество от три различни точки от правата, а *проективна* координатна система в равнината наричат всяко наредено множество от четири точки, никои три от които не лежат на една права. Съответните координати обикновено се наричат *проективни*.

Според твърдението така дефинираната проективна координатна система в $P(L)$ възстановява еднозначно координатна система в L (вж. определението в т. 6).

9. Параметрични уравнения на права през две точки в $P^n(L)$. Нека M_1, M_2 са две различни точки от проективното пространство $P^n(L)$. По определение точките са едномерни подпространства L_1, L_2 на линейното пространство L и нека изберем ненулеви вектори от тези подпространства: $l_1 \in L_1$, $l_2 \in L_2$. Тъй като подпространствата са различни, векторите l_1, l_2 са линейно независими и линейната им обвивка е двумерно подпространство V на L. По определение $P(V)$ е права, минаваща през точките M_1, M_2. Тъй като V е единственото двумерно подпространство, съдържащо L_1 и L_2, тази права е единствена. Доказахме, че *през всеки две различни точки минава точно една права*. Всеки вектор от V се записва еднозначно във вида

(7) $$l = \lambda_1 l_1 + \lambda_2 l_2, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathrm{N} .$$

Той е ненулев точно тогава, когато λ_1, λ_2 не са едновременно равни на нула. Нека M е точката, определена от ненулевия вектор l. Тя лежи върху правата точно тогава, когато за ненулевия вектор l от съответното едномерно подпространство е в сила условието (7). Нека в линейното пространство L е избран базис и спрямо него точките M_1, M_2 имат хомогенни координати съответно $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n+1}$ и $x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n+1}$, а точката M има координати $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$. Тогава векторното равенство (7) може да се запише еквивалентно като равенства между съответните координати:

(8) $$x_1 = \lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x''_1, \quad x_2 = \lambda_1 x'_2 + \lambda_2 x''_2, \ldots, \quad x_{n+1} = \lambda_1 x'_{n+1} + \lambda_2 x''_{n+1} .$$

Тези равенства се наричат *параметрични уравнения* на проективната права през точките M_1, M_2. Напомняме, че в тях λ_1, λ_2 не са едновременно равни на нула. За краткост и удобство вместо равенствата (8) често пишат

$$M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 .$$

Ако не са въведени координати, това равенство няма ясен смисъл.

Нека $n+1=3$, т. е. нека разглежданото проективно пространство $P(L)$ е двумерна проективна равнина, в която лежи разглежданата права. Сега параметричните уравнения на правата са:

$$(9) \qquad x_1 = \lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_1'', \quad x_2 = \lambda_1 x_2' + \lambda_2 x_2'', \quad x_3 = \lambda_1 x_3' + \lambda_2 x_3''$$

Те са еквивалентни на единственото уравнение

$$(10) \qquad \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1' & x_2' & x_3' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' \end{vmatrix} = 0 \,,$$

което се нарича *уравнение на* (проективна) *права в равнината през две точки*. Наистина, уравненията (9) означават, че първият ред на детерминантата е линейна комбинация на втория и третия ред, следователно детерминантата е равна на нула. Обратно, от факта, че детерминантата е равна на нула следва, че трите й реда са линейно зависими, а тъй като вторият и третият ред са независими (точките M_1, M_2 са различни), то първият ред е линейна комбинация на втория и третия, т. е. в сила са равенствата (9).

Ако развием детерминантата по първия ред, уравнението (10) ще добие вида

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0 \,,$$

където $a, b, c \in \mathrm{N}$ не са едновременно равни на нула.

§ 2. Проективни подпространства и проективни преобразувания

1. Подпространства. Нека L е линейно пространство над поле N , а $M \subset L$ е негово подпространство. Ако M не е нулевото пространство, то всяко едномерно подпространство на M е едномерно подпространство и на L, следователно точките от проективното пространство $P(M)$ са точки и от $P(L)$, т. е. $P(M) \subset P(L)$. Естествено е да казваме, че проективното пространство $P(M)$ е *подпространство* на проективното пространство $P(L)$. Ако M е нулевото пространство, то $P(M)$ е празното множество, включването $P(M) \subset P(L)$ очевидно е налице и отново ще казваме, че $P(M)$ е подпространство. Резюмираме във вид на

2. Определение. Ще казваме, че подмножеството U на проективното пространство $P(L)$ е негово *подпространство*, ако съществува подпространство $M \subset L$ на линейното пространство L, за което $U = P(M)$.

В предишния параграф проективните пространства с размерност 0 нарекохме точки, а проективните пространства с размерност 1 – прави. Естествено е сега точките в $P(L)$ да се интерпретират като подпространства с размерност 0, а прави да наричаме подпространствата с размерност 1.

3. Проективни преобразувания в проективното пространство $P(L)$. Нека $f: L \to L$ е *биективен линеен оператор*, дефиниран в линейното пространство L. Тъй като всеки биективен линеен оператор трансформира биективно едномерните линейни подпространства в едномерни, то f индуцира биективно изображение $P(f): P(L) \to P(L)$ (биективното разместване на едномерните подпространства на L помежду им е все едно биективно разместване на точките на $P(L)$). Така дефинираното биективно изображение $P(f): P(L) \to P(L)$ се нарича *проективно преобразувание* на $P(L)$, или *проективен автоморфизъм*.

Нека $g: L \to L$ е още един биективен линеен оператор. Тъй като $f \circ g$ също е биективен линеен оператор, то $P(f \circ g)$ е проективно преобразувание. Доказателството на следните факти е леко упражнение:

$$\text{а) } P(f \circ g) = P(f) \circ P(g); \qquad \text{б) } P(f)^{-1} = P(f^{-1}) .$$

Множеството на всички проективни преобразувания на проективното пространство $P(L)$ по традиция се означава с $PGL(L)$, а ако $\dim P(L) = n$, често се използва и означението $PGL(n)$. Свойствата а), б) превръщат $PGL(L)$ в интересен обект за самостоятелно изучаване, което се прави в обширен раздел на алгебрата, наречен теория на групите.

Изучаването на проективните пространства е раздел от геометрията, наречен *проективна геометрия*. Основната ѝ задача е класификацията на фигурите с точност до проективна еквивалентност и изучаването на онези техни свойства, които се запазват при проективни преобразувания. По определение две фигури F, F' се наричат *проективно еквивалентни*, ако съществува проективно преобразувание $P(f)$, за което $P(f)(F) = F'$. Като се имат предвид а) и б), не е сложно да се съобрази, че двучленната релация “проективна еквивалентност” е релация на еквивалентност в множеството на геометричните фигури, следователно тя разделя множеството на две по две непресичащи се подмножества – класове проективно еквивалентни фигури.

Като считаме, че всяко подпространство е специален вид фигура, не е трудно да докажем, че *в крайномерно проективно пространство две* *подпространства са проективно еквивалентни точно когато имат равни размерности.* Наистина, нека $P(M)$ и $P(M')$ са две подпространства с равни размерности. Това означава, че $\dim M = \dim M'$. Да изберем базиси $e_1,\dots,e_k$ и $e'_1,\dots,e'_k$ съответно на M и M' и да ги допълним до базиси $e_1,\dots,e_k,\dots,e_{n+1}$ и $e'_1,\dots,e'_k,\dots,e'_{n+1}$ на линейното пространство L. Нека $f:L\to L$ е обратимият линеен оператор, за който $f(e_i)=e'_i$ за всички $i=1,2,\dots,n+1$. Тъй като $f(M)=M'$, проективното преобразувание $P(f)$ изобразява $P(M)$ в $P(M')$. Обратно, нека съществува проективно преобразувание $P(f)$, което изобразява $P(M)$ в $P(M')$.Това означава, че обратимият линеен оператор $f:L\to L$ изобразява M в M'. Тъй като той запазва размерностите на подпространствата, то $\dim M = \dim M'$.

От горното твърдение следва, например, че в крайномерно проективно пространство всеки две точки са проективно еквивалентни. Същото важи и за правите. Ако се върнем към модела на проективна равнина от § 1, т. 3, вече става ясно, че няма разлика между крайни и безкрайни точки, както и между крайни и безкрайни прави.

4. Изразяване на проективните преобразувания чрез координати. Предполагаме, че $\dim P(L)=n$, $n\ge 1$. Нека $f:L\to L$ е биективен (обратим) линеен оператор в линейното пространство L. Ако $e_1,e_2,\dots,e_{n+1}$ е базис на L, нека $A=\left(\alpha_{ij}\right)$ е матрицата на оператора спрямо този басис. Нека $l\in L$ е произволен вектор, а X и X' са матриците-стълбове от координатите съответно на l и $f(l)$. Както знаем от Ч. I, $\det A\ne 0$ (защото операторът е обратим) и

(1) $$X' = AX\ .$$

Ако предположим, че векторът $l\in L$ е ненулев, то за координатите на точките от проективното пространство $P(L)$, определени от l и $f(l)$, имаме

(2) $$\rho X' = AX\ ,\quad \rho\in \mathrm{N}\ ,\quad \rho\ne 0,\quad \det A\ne 0\ .$$

Произволният множител $\rho\ne 0$ е поставен, защото хомогенните координати в проективното пространство са определени само с точност до пропорционалност. Матрицата A се нарича *матрица на проективното преобразувание* $P(f)$ спрямо избрания базис на L. Тъй като размерността на $P(L)$ е n, матрицата A е от ред $n+1$. От Ч. I знаем, че в линейното пространство L връзката “обратим оператор” $\to$ ”неособена матрица” (спрямо фиксиран базис) е биективна, т. е. на всеки обратим оператор съответства еднозначно определена неособена матрица, и обратно: на всяка неособена матрица съответства еднозначно определен обратим оператор. При проективните преобразувания ситуацията е по-различна: *неособените матрици* A, B *са матрици на едно и също проективно преобразувание* (при избран базис на L) *тогава и само тогава, когато съществува* $\lambda \in \mathrm{N}$, $\lambda \neq 0$, *за което* $B = \lambda A$. Наистина, нека $\rho X' = AX$ и $\sigma X' = BX$ за всички матрици-стълбове X. Оттук следва $\rho^{-1} AX = \sigma^{-1} BX$, т. е. $(\rho^{-1} A - \sigma^{-1} B)X = 0$ (нулевата матрица). Последното равенство е изпълнено за всяка матрица-стълб X, а това е възможно само при $\rho^{-1} A - \sigma^{-1} B = 0$, т. е. $B = \lambda A$, където $\lambda = \sigma \rho^{-1}$.

Забележка. В края на предишния параграф показахме, че в проективното пространство $P(L)$ координатите на точките при смяна на координатната система се сменят по формулата $\rho X' = AX$, където $\rho \in \mathrm{N}$, $\rho \neq 0,\ \det A \neq 0$. Можем да застанем и на “активна гледна точка” и да считаме, че в тази формула координатната система е една и съща, но точка с координати X (записани като матрица-стълб X) се е трансформирала в точка с координати X'. Тъй като $\det A \neq 0$, то очевидно става дума за проективно преобразувание.

5. Определение. *Четириъгълник* в проективната равнина ще наричаме всяка наредена четворка точки, никои три от които не лежат на една права.

Често вместо термина четириъгълник казват, че точките са в *общо положение.*

6. Твърдение. *В проективната равнина всеки два четириъгълника са проективно еквивалентни.*

Доказателство. Нека A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4 са два четириъгълника. Ще покажем, че съществува (даже единствено) проективно преобразувание f на равнината, за което $f(A_i) = B_i,\ i = 1,2,3,4$. От предишния параграф знаем, че съществува единствена координатна система, спрямо която точките A_1, A_2, A_3, A_4 имат координати съответно (1,0,0), (0,1,0) (0,0,1), (1,1,1). Нека точката B_i има координати b_{1i}, b_{2i}, b_{3i}, $i = 1,2,3,4$. Да разгледаме матрицата

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \lambda_3 b_{13} \\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \lambda_3 b_{23} \\ \lambda_1 b_{31} & \lambda_2 b_{32} & \lambda_3 b_{33} \end{pmatrix},$$

където $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$ са неизвестни числа и ще бъдат определени след малко. Матрицата B е неособена, защото точките B_1, B_2, B_3 не лежат на една права. Разглеждаме проективното преобразувание f, дефинирано чрез координатите с формулата

$$X' = BX .$$

Очевидно е, че при $i = 1,2,3$ точката A_i се трансформира в точка с координати $\lambda_i(b_{1i}, b_{2i}, b_{3i})$, следователно $f(A_i) = B_i$. За да бъде изпълнено и условието $f(A_4) = B_4$, необходимо и достатъчно е $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ да удовлетворяват системата

$$b_{11}\lambda_1 + b_{12}\lambda_2 + b_{13}\lambda_3 = b_{14}$$

$$b_{21}\lambda_1 + b_{22}\lambda_2 + b_{23}\lambda_3 = b_{24}$$

$$b_{31}\lambda_1 + b_{32}\lambda_2 + b_{33}\lambda_3 = b_{34} .$$

Тя има единствено решение, което може да бъде намерено по формулите на Крамер. Всички детерминанти, които участват в тези формули, са различни от нула, защото никои три от точките B_1, B_2, B_3, B_4 не лежат на една права. Следователно $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \neq 0$.

Забележки. 1) Нека в тримерното проективно пространство е дадена наредена система от пет точки. Ще казваме, че те *са в общо положение*, ако никои четири от тях не лежат в една равнина. Може да се докаже, че всеки две такива системи от по пет точки са проективно еквивалентни. Аналогичен резултат е в сила и за $n+2$ точки в проективно пространство с размерност n, стига условието "общо положение на точките" да се формулира като "никои $n+1$ от точките не лежат в подпространство с размерност $n-1$". 2) В афинната равнина не всеки два четириъгълника са афинно еквивалентни.

7. Изоморфизъм на проективни пространства. Въпросът, кога ще считаме две проективни пространства $P(L)$ и $P(L')$ за несъществено различни (изоморфни), е съвсем естествен. Ако линейните пространства L и

L' са изоморфни, изглежда задължително да приемем, че съответните им проективни пространства са изоморфни. Логично изглежда и да приемем, че това е единственият случай, когато ще разглеждаме проективните пространства като изоморфни. Формалното определение е следното.

Нека L и L' са линейни пространства, а $P(L)$ и $P(L')$ са проективните пространства, асоциирани с тях. Ще казваме, че проективните пространства $P(L)$ и $P(L')$ са *изоморфни* тогава и само тогава, когато линейните пространства L и L' са изоморфни. (Последното предполага в частност, че L и L' са над едно и също поле.)

Ако линейните пространства L и L' са над едно и също поле и са крайномерни, то, както знаем от Ч. I, те са изоморфни точно тогава, когато имат равни размерности. Следователно *две крайномерни проективни пространства над едно и също поле са изоморфни точно тогава, когато имат равни размерности.*

§ 3. Връзка между афинни и проективни преобразувания

За простота в този параграф ще предполагаме, че всички проективни пространства са над полето $\mathbf{R}$ на реалните числа (реални проективни пространства) и допълнително ще се ограничим на пространства с размерности 2 и 3.

1. Реалната проективна равнина $\bar{\varepsilon}$. За нагледност нека си я представяме като афинната равнина ε от училищната геометрия, попълнена с безкрайни елементи (моделът от § 1). В ε избираме афинна координатна система Oxy и с нейна помощ в $\bar{\varepsilon}$ въвеждаме хомогенни координати x_1, x_2, x_3, като за точките от афинната равнина ε (крайните точки) имаме

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}.$$

Според резултата в § 2, т. 4 произволно проективно преобразувание $f : \bar{\varepsilon} \to \bar{\varepsilon}$ се изразява чрез координатите като

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \qquad (1) \\
x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \,,
\end{aligned}
$$

където, ако x_1, x_2, x_3 са хомогенните координати на точка M , то x_1', x_2', x_3' са хомогенните координати на точката $f(M)$. Разбира се $\det(a_{ij}) \neq 0$, а матрицата $A = (a_{ij})$ е определена с точност до произволен ненулев множител.

Да предположим допълнително, че проективното преобразувание f изобразява всяка безкрайна точка в безкрайна. Точка $M(x_1, x_2, x_3)$ е безкрайна точно тогава, когато $x_3 = 0$. Следователно поставеното допълнително условие е изпълнено точно тогава, когато $a_{31} = a_{32} = 0$, $a_{33} \neq 0$. От последното следва в частност, че всяка крайна точка се изобразява в крайна. Тъй като матрицата A е определена само с точност до ненулев множител, можем да го изберем така, че да бъде изпълнено $a_{33} = 1$. Тази нормировка вече определя матрицата A еднозначно. Следователно всяко проективно преобразувание на проективната равнина, което изобразява безкрайните точки в безкрайни, има вида (чрез хомогенните координати):

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\
x_3' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_3 .
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Ако $M(x_1, x_2, x_3)$ е крайна точка, то $f(M)$ също е крайна и нехомогенните й координати са $x' = x_1'/x_3'$, $y' = x_2'/x_3'$. Следователно равенствата (2) може да се запишат чрез нехомогенните координати като

$$
\begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13} \\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23} .
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Тези формули са добре познати от гл. 3, § 2 – става дума за биективно афинно изображение на афинната равнина ε в себе си. Следователно *ограничението върху афинната равнина* $\varepsilon \subset \overline{\varepsilon}$ *на всяко проективно преобразувание на проективната равнина* $\overline{\varepsilon}$*, което изобразява всяка безкрайна точка в безкрайна, е биективно афинно изображение на* ε *в себе си.* Обратното вече е почти очевидно: *на всяко биективно афинно изображение на афинната равнина* ε *в себе си, зададено чрез нехомогенни координати с равенствата* (3), *съответства еднозначно определено проективно преобразувание на* $\overline{\varepsilon}$*, определено с равенствата* (2).

Макар и малко по-грубо, същото може да се изкаже и така: ако G е множеството на всички проективни преобразувания на равнината $\overline{\varepsilon}$, а H е множеството на всички биективни афинни изображения $\varepsilon \to \varepsilon$, то $H \subset G$. Елементите на H се характеризират с това, че запазват неподвижна безкрайната права.

Резултатът от проведения анализ може да се резюмира и така: *ако две фигури от афинната равнина са афинно еквивалентни, то те са и проективно еквивалентни. Всяко биективно афинно изображение на афинната равнина в себе си може да се продължи до проективно преобразувание на проективната равнина*. Обратното, изобщо казано, не е вярно. Например всеки два четириъгълника са проективно еквивалентни, но не винаги са афинно еквивалентни.

Аналогични бележки са верни и за тримерното проективно пространство. Ще формулираме само основните резултати – доказателствата им повтарят горните разсъждения. Нека D_3 е познатото от училище тримерно афинно пространство, а $\overline{\mathrm{D}_3}$ е попълнението му с безкрайни елементи, т. е. тримерното реално проективно пространство. Ако в $\overline{\mathrm{D}_3}$ са въведени хомогенни координати, то всяко проективно преобразувание $f : \overline{\mathrm{D}_3} \to \overline{\mathrm{D}_3}$ се записва като

$$
\begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\
x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\
x_4' &= a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 ,
\end{aligned} \tag{3}
$$

където матрицата $A = (a_{ij})$ е неособена и е определена само с точност до ненулев множител. Ако освен това f изобразява всяка безкрайна точка в безкрайна (т. е. от $x_4 = 0$ винаги следва $x_4' = 0$), то $a_{41} = a_{42} = a_{43} = 0$, $a_{44} \neq 0$ и обратно.

Следователно всяко проективно преобразувание на пространството, което изобразява безкрайните точки в безкрайни (еквивалентно: запазва неподвижна безкрайната равнина), може да се запише чрез хомогенните координати във вида

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \\
x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \\
x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\
x_4' &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad x_4 ,
\end{aligned}
$$

където $\det(a_{ij}) \neq 0, \quad 1 \leq i, j \leq 3$. Ако разглеждаме само крайни точки (т. е. точки, за които $x_4 \neq 0$) и преминем към нехомогенни координати, формулите (4), по които се трансформират координатите, ще добият вида

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14} \\
y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24} \\
z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34} .
\end{aligned}
$$

Ясно е, че f действа на точките от афинното пространство D_3 (на крайните точки) като афинен автоморфизъм.

§ 4. Криви и повърхнини от втора степен

Всички пространства, разглеждани в параграфа, са над полето $\mathbf{R}$ на реалните числа.

1. Криви от втора степен. Нека

$$
f(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2
$$

е ненулева реална квадратична форма на три променливи. Предполагаме, че в реалната проективна равнина $\overline{\mathrm{D}}_2$ е избрана координатна система (въведени са хомогенни координати). Множеството на всички точки с координати x_1, x_2, x_3, удовлетворяващи уравнението

$$
(1) \qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0 ,
$$

ще наричаме *крива от втора степен* с уравнение (1). Ясно е, че така въведеното понятие не зависи от координатната система – да я сменим с друга е все едно в квадратичната форма да направим неособена линейна смяна на променливите и отново ще получим квадратична форма.

Ако $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}$ е полином от втора степен с реални коефициенти и в афинната равнина D_2 координатната система Oxy е такава, че

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

ясно е, че от

$$F(x,y) = 0 \tag{2}$$

следва уравнението (1) (обратното следва само при $x_3 \neq 0$). Като имаме предвид тази бележка, ще считаме, че всяка крива от втора степен в афинната равнина D_2 (афинна крива) определя крива от втора степен в проективната равнина $\overline{\mathrm{D}}_2$ (проективна крива).

От гл. 1, § 2, т. 3 знаем, че с помощта на неособена линейна смяна на променливите квадратичната форма f може да бъде приведена в каноничен вид. Тук смяната може да бъде интерпретирана като проективно преобразуване, на което кривата е подложена. Като вземем предвид и закона за инерцията на реалните квадратични форми (пак там, т. 5), получаваме веднага, *че всяка крива от втора степен е проективно еквивалентна на една от кривите със следните уравнения:*

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, 2) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, 3) $x_1^2 + x_2^2 = 0$,

4) $x_1^2 - x_2^2 = 0$, 5) $x_1^2 = 0$.

Кривите, които са проективно еквивалентни на кривата с уравнение 1), се наричат *имагинерни овали*. Те не съдържат точки с реални координати. Напомняме, че ако числата x_1, x_2, x_3 са координати на точка, то поне едно от тях е различно от нула. Кривите, еквивалентни на кривата с уравнение 2), се наричат *овални*. Тъй като $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2)$, кривата с уравнение 3) се нарича *двойка пресичащи се спрегнати имагинерни прави*. Точката с координати $0,0,1$ е единствената реална точка, която лежи върху кривата. Кривата с уравнение 4) е двойка пресичащи се прави, защото $x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$. Кривата 5) е двойка сливащи се прави (двойна права).

Тъй като при проективно преобразуване права се трансформира биективно в права, а точка с реални координати - в точка с реални координати, ясно е, че петте класа криви са проективно различни.

От същото съображение следва, че елипсите, хиперболите и параболите се съдържат в класа, определен от 2). Тъй като този факт изглежда изненадващ, ще го анализираме по-подробно. Понеже всички елипси са афинно еквивалентни, разглеждаме елипса с уравнение в нехомогенни координати

$$x^2 + y^2 = 1$$

и хипербола с уравнение

$$x^2 - y^2 = 1\,.$$

След преход към хомогенни координати уравненията им добиват съответно вида

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \qquad x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0\,.$$

Разглеждаме проективното преобразуване $x_1' = x_3, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_1$. То трансформира уравненията на елипсата и на хиперболата съответно в

$$x_3'^2 + x_2'^2 - x_1'^2 = 0\,, \qquad x_3'^2 - x_2'^2 - x_1'^2 = 0.$$

Тъй като координатната система е една и съща, писането на знака “щрих” е излишно. Следователно можем да кажем, че елипсата се е преобразувала в крива с уравнение $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$, т. е. в хипербола, а хиперболата се е преобразувала в крива с уравнение $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, т. е. в елипса. Този донякъде смущаващ факт (как така разкъсахме елипсата и я превърнахме в хипербола?) може да се обясни със следното. Хиперболата пресича безкрайната права (тя има уравнение $x_3 = 0$) в точките $(1,1,0)$ и $(1,-1,0)$, т. е. върху хиперболата има две безкрайни точки. При проективното преобразуване, което приложихме, безкрайната права $x_3 = 0$ се трансформира в крайната права $x_1 = 0$, а двете безкрайни точки от хиперболата се изобразяват в крайните точки $(0,1,1)$, $(0,-1,1)$. Крайната права $x_1 = 0$ няма общи точки с хиперболата. При преобразуванието тя се трансформира в безкрайната права $x_3 = 0$ и естествено последната няма общи точки с образа на хиперболата. Полезно е и да си спомним, че в § 1 видяхме, че проективната равнина прилича на сфера с отъждествени диаметрално противоположни точки, а не на “безкрайна черна дъска”.

Ако разгледаме парабола с уравнение $y^2 = x$ в нехомогенни координати, уравнението й в хомогенни координати е $x_2^2 = x_1 x_3$. Ако приложим върху нея проективното преобразуване

$$x_1 = x_1' + x_3', \quad x_2 = x_2', \; x_3 = x_1' - x_3',$$

параболата ще се преобразува в крива с уравнение $x_2^2 = x_1^2 - x_3^2$, която е хипербола. (Вместо x_i' писахме x_i.)

2. Повърхнини от втора степен. Нека

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij} x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad 1 \le i, j \le 4,$$

е ненулева квадратична форма на четири променливи с реални коефициенти. Нека в тримерното реално проективно пространство са въведени хомогенни координати. Множеството на всички точки с координати x_1, x_2, x_3, x_4, за които

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0, \tag{3}$$

ще наричаме *повърхнина от втора степен* (в проективното пространство). С помощта на неособена линейна смяна на променливите квадратичната форма може да се приведе в каноничен вид, или еквивалентно, с помощта на подходящо проективно преобразувание повърхнината с уравнение (3) може да се преобразува в повърхнина с уравнение

$$f^*(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

в което лявата страна е квадратична форма в каноничен вид. Като имаме предвид закона за инерцията на реалните квадратични форми и факта, че уравненията $f^* = 0$ и $-f^* = 0$ са уравнения на една и съща повърхнина, веднага получаваме, че *всяка повърхнина от втора степен е проективно еквивалентна на една от следните повърхнини с уравнения:*

1) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$; 2) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$;

3) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = 0$; 4) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$;

5) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$; 6) $x_1^2 + x_2^2 = 0$; 7) $x_1^2 - x_2^2 = 0$; 8) $x_1^2 = 0$.

§ 5. Полюс и поляра

1. Полюс и поляра. Ще направим някои геометрични приложения на резултатите от гл. 1, § 1. Въпреки, че разглежданията могат да се проведат и по-общо, за простота ще предполагаме, че L е тримерно линейно пространство над $\mathbf{R}$, а $P(L)$ е реалната проективна равнина. С L^* ще означаваме множеството на всички линейни функции $L \to \mathbf{R}$, дефинирани в L. От Ч. I знаем, че L^* по естествен начин се разглежда като линейно пространство (над $\mathbf{R}$).

Нека $g(l,m)$ е неособена симетрична билинейна форма, дефинирана в L. Както видяхме в гл. 1, § 1, т. 10, за всяка линейна функция $h: L \to \mathbf{R}$ съществува еднозначно определен вектор m_h, за който $h(l) = g(l, m_h)$ за всеки вектор $l \in L$. Съответствието $h \to m_h$ дефинира биективно изображение $L^* \to L$. Рутинната проверка, че то е изоморфизъм на линейни пространства, оставяме за упражнение. В частност имаме $\lambda h \to \lambda m_h$ за всяко $\lambda \in \mathbf{R}$.

Нека h е ненулева линейна функция. Векторите $l \in L$, за които

$$h(l) = 0,$$

образуват подпространство L_0 на L с размерност $\dim L - 1 = 3 - 1 = 2$. Същото подпространство задава и уравнението $\lambda h(l) = 0$, $\lambda \neq 0$. Нека h_1 е ненулева линейна функция, за която $h_1(l) = 0$ за всеки вектор $l \in L_0$. Да изберем произволен вектор $l_0 \in L \setminus L_0$. Линейната обвивка на L_0 и на вектора l_0 е цялото пространство L, защото разликата в размерностите на L и на L_0 е единица. Числата $h(l_0)$ и $h_1(l_0)$ са различни от нула, защото, ако например $h(l_0) = 0$, то ще имаме $h(l) = 0$ за всеки вектор $l \in L$, противно на условието, че функцията h е ненулева. Следователно съществува реално число $\lambda \neq 0$, за което $h_1(l_0) = \lambda h(l_0)$. Тъй като L е линейната обвивка на подпространството L_0 и на вектора l_0, то $h_1(l) = \lambda h(l)$ за всеки вектор $l \in L$. С това доказахме, че *ако две ненулеви линейни функции се анулират върху едно и също линейно подпространство с размерност 2, то функциите са пропорционални.* Обратното, че ако функциите са пропорционални, то те се анулират върху едно и също подпространство с размерност 2, е очевидно. От Ч. I, гл. 2, § 5, т. 7 може лесно да се извлече, че за всяко подпространство $L_0 \subset L$ с размерност 2 съществува ненулева линейна функция h, за която

$$L_0 = \{ l \in L \mid h(l) = 0 \}.$$

Преди да преминем към проективните пространства $P(L)$ и $P(L^*)$, удобно е да преформулираме резултатите от горните разсъждения. С помощта на неособената симетрична билинейна форма $g(l,m)$, дефинирана в L, на всяко едномерно подпространство $\{\lambda m_0 \mid \lambda \in \mathbf{R}\} \subset L$ съпоставяме едномерното подпространство $\{g(l,\lambda m_0) \mid \lambda \in \mathbf{R}\} \subset L^*$. Това съответствие е биекция между едномерните подпространства на L и L^*. На всяко едномерно подпространство $\{g(l,\lambda m_0) \mid \lambda \in \mathbf{R}\} \subset L^*$ съответства еднозначно определено *двумерно* подпространство на L, а именно

$$L_0 = \{l \in L \mid g(l,\lambda m_0) = 0\} = \{l \in L \mid g(l,m_0) = 0\}.$$

Това съответствие също е биекция между едномерните подпространства на L^* и двумерните подпространства на L. Като имаме предвид установената биекция между едномерните подпространства на L и L^*, можем да кажем, че *с помощта на формата $g(l,m)$ дефинирахме биективно съответствие между едномерните и двумерните подпространства на линейното пространство L*. При прехода от L към проективното пространство $P(L)$ едномерните подпространства на L се превръщат в точки от проективната равнина, а двумерните подпространства – в прави. Следователно с помощта на формата $g(l,m)$ установихме биективно съответствие между точките и правите в проективната равнина. Така дефинираното съответствие се нарича *полярно съответствие*. Ако точка и права са съответни, казва се, че точката е *полюс* на правата, а правата е *поляра* на точката.

Полярното съответствие най-често се използва при следната ситуация. Нека в проективната равнина е избрана координатна система и

(1) $$f(x_1,x_2,x_3) = 0$$

е крива от втора степен, където

$$f(x_1,x_2,x_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j, \quad a_{ij} = a_{ji}.$$

Кривата с уравнение (1) се нарича *неизродена* (неособена), ако $\det(a_{ij}) \neq 0$. (Това условие е еквивалентно на изискването каноничният вид на квадратичната форма f да съдържа три квадрата с ненулеви коефициенти, т. е формата да има ранг 3.) Предполагаме, че кривата е неизродена и да разгледаме поляризацията на квадратичната форма f (вж. гл. 1, § 2, т. 1). Това е неособената симетрична билинейна форма

$$g(l,m)=\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_i y_j \ .$$

Полярното съответствие, определено от тази билинейна форма, обикновено се нарича *полярност спрямо дадената крива* от втора степен. Ако M_0 е точка с координати x_1^0, x_2^0, x_3^0 (или вектор m_0 със същите координати), уравнението на полярата на тази точка е

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_j^0 x_i = 0 \ .$$

Записано подробно, то е

$$(a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + a_{13}x_3^0)x_1 + (a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + a_{23}x_3^0)x_2$$

$$+ (a_{31}x_1^0 + a_{32}x_2^0 + a_{33}x_3^0)x_3 = 0 \ .$$

Това наистина е уравнение на права, защото, ако коефициентите съответно пред x_1, x_2, x_3 са едновременно равни на нула, то $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$, тъй като $\det(a_{ij}) \neq 0$. От друга страна поне една от хомогенните координати на точката M_0 е различна от нула.

Ако полюсът M_0 лежи върху дадената крива, то полярата му очевидно минава през M_0, което дава повод за следното формално

2. Определение. Нека Q е неизродена крива от втора степен (в проективната равнина) и M_0 е точка от кривата. *Допирателна* към кривата през точката M_0 ще наричаме полярата на точката (спрямо кривата).

Препоръчваме да се сравни това определение с уравнението на допирателна от гл. 4, § 5, т. 4. Там то е записано в нехомогенни координати.

От уравнението на полярата на произволна точка лесно следва, че *ако полярата на точката M_0 минава през точката $M_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$, то полярата на точката M_1 минава през точката M_0*. Достатъчно е да забележим, че полярата на точката M_1 има уравнение

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}x_j^1 x_i = 0 \, ,$$

а тъй като полярата на M_0 минава през M_1, то

$$\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_j^0 x_i^1 = 0 .$$

Последното показва, че полярата на M_1 минава през точката M_0.

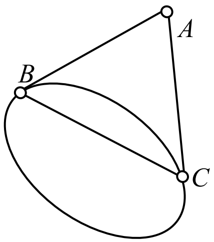
От доказаното следва, че ако точката M се движи по дадена права, то полярата й винаги минава през полюса на дадената права. Може да се докаже педантично (за упражнение), че всяка полярност задава биективно съответствие между точките на дадена права и правите от снопа прави с център полюса на дадената права.

Като се използва определението на допирателна и доказаното по-горе, лесно е да се построи геометрично полярата на дадена точка. За определеност нека кривата е елипса. Ще разгледаме три случая.

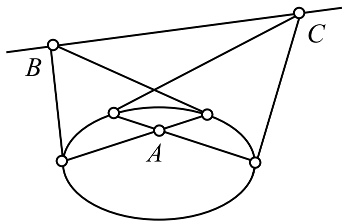
а) Точката A лежи върху елипсата. Тогава нейна поляра е допирателната към елипсата в точката A.

б) Точката A е вън от елипсата. Построяваме през A двете допирателни към елипсата. Ако B, C са допирните точки, правата през точките B, C е поляра на точката A (черт. 51).

в) Точката A е вътре в елипсата. Построяваме произволна хорда през точката A, а през краищата й построяваме допирателни към елипсата. Нека те се пресичат в точка B. Построяваме още една хорда през A, през краищата й отново построяваме двете допирателни и нека те се пресичат в точка C. Правата през точките B, C е поляра на точката A (черт. 52).



черт. 51



черт. 52

З а б е л е ж к а. Полярно съответствие може да се разглежда и в произволно проективно пространство $P(L)$ с размерност $n \geq 2$. Ролята на линейните функции $h : L \to \mathrm{N}$ е същата, но в общия случай подпространството $L_0 = \{l \in L \mid h(l) = 0\}$ има размерност $\dim L - 1 = (n+1) - 1 = n$. Повече по темата може да се намери в книгата на Кострикин и Манин [4].

Азбучен указател

Доц. д-р Никола Т. Петров е роден през 1944 г. в село Славяново, общ. Попово. Гимназия завършва в гр. Попово през 1962 г. Същата година постъпва в Софийския университет в специалността Математика производствен профил. Завършва през юли 1967 година. След успешно издържан конкурс, обявен от БАН, е зачислен в редовна аспирантура в Математическия институт “В. А. Стеклов” на Академията на науките на СССР. Заминава за Москва през 1968 година. Там научен ръководител му е член-кореспондент професор д.м.н. Алексей Иванович Кострикин. Ръководител на Отдела по алгебра в Института е академик на РАН И. Р. Шафаревич. През 1972 г. защитава дисертация на тема “Върху инволютивната дължина на крайните прости групи”. Научният съвет на Иститута “В. А. Стеклов” му присъжда научната степен “кандидат на физико-математическите науки” (доктор по математика според днешната терминология). След завръщането в България е разпределен в новооткрития Висш педагогически институт в град Шумен. Постъпва по задължение през февруари 1973 г., където работи като един от основателите на Катедрата по алгебра. През 1977 г. е единодушно избран за доцент от Специализирания научен съвет по математика гр. София.

В Шумен е чел лекции по *Линейна алгебра*, *Висша алгебра, Елементарна теория на числата, Теория на алгебричните числа, Линейна алгебра и аналитична геометрия, Основи на математиката, Висша математика, Алгебра и геометрия (за физици)*. Чел е и спецкурсове по *Теория на Галоа, Теория на групите, Представяне на групи, Алгебри на Ли, Групи и геометрии*.

Научните му интереси и основни публикации са в областта на крайните прости групи.